

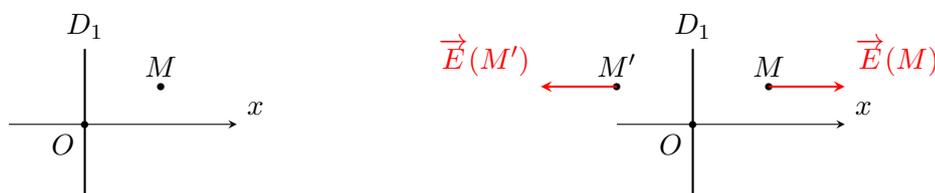
Corrigé du DS n°3bis – Partie physique

1. Réalisation d'un accéléromètre capacitif

I. Étude d'un condensateur plan idéal - Centrale TSI

1. Étant donné un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) , les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ sont deux plans de symétrie des charges contenant M . On en déduit que : $\vec{E}_1(M) = E_1(x, y, z) \vec{e}_x$. De plus, il y a invariance par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui entraîne que E_1 ne dépend ni de y , ni de z . On a donc :

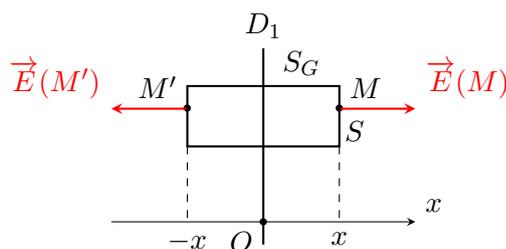
$$\vec{E}_1(M) = E_1(x) \vec{e}_x$$



2. Le plan de D_1 qui est (Oyz) est un plan de symétrie des charges électriques : de part et d'autre de ce plan, le champ électrique est transformé en son symétrique. Nous avons donc :

$$\vec{E}_1(M') = \text{sym}_{Oyz} \vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M)$$

3. On prend une surface de Gauss (surface fermée) S_G en forme de cylindre de génératrices // à Ox , de surface de base S et placé symétriquement par rapport au plan de D_1 . Un point M de coordonnée $x > 0$ est supposé être situé sur la base supérieure du cylindre.



Le théorème de Gauss donne :

$$\iint_{S_G} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\text{Base inf}} \vec{E}_1(M') \cdot d\vec{S}_{M'} + \iint_{\text{Surf lat}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}$$

L'intégrale sur la surface latérale du cylindre est nulle et les deux premières intégrales sont égales. Il vient alors :

$$\iint_{S_G} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M = 2 E_1(x) S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

et donc $E_1(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ si $x > 0$. Dans le cas où $x < 0$, on utilise la propriété de symétrie de \vec{E}_1 de part et d'autre du plan de symétrie P_1 . En résumé :

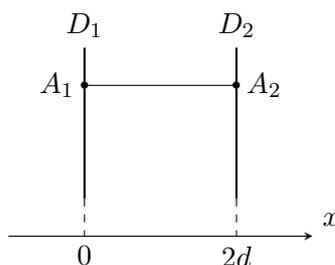
$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. En utilisant le principe de superposition, on peut dresser le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$2d$	$+\infty$
\vec{E}_1		$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$
\vec{E}_2	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$
\vec{E}	$\vec{0}$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\vec{0}$

On a donc : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$ entre les deux disques D_1 et D_2 et $\vec{E}(M) = \vec{0}$ partout ailleurs.

5. Appliquons le théorème de la circulation entre les deux disques, le long d'un chemin rectiligne allant d'un point A_1 de D_1 vers un point A_2 de D_2 .



On obtient :

$$U = V(A_1) - V(A_2) = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (2d)$$

d'où :

$$U = \frac{Q(2d)}{S\varepsilon_0}$$

En remarquant que Q est proportionnelle à U , nous obtenons la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armatures du condensateur

5. Initialement, les électrons de conduction de D se déplacent sous l'influence du champ électrique $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \vec{e}_x$ créé par le condensateur. Comme $\vec{F}_{e1} = -e\vec{E}$, les électrons s'accumulent sur la face A et il y a un défaut d'électron sur la face B . On a donc :

$$\sigma_A < 0 \quad \text{et} \quad \sigma_B > 0$$

Comme la plaque est initialement non chargée, on a :

$$\sigma_A = -\sigma_B$$

6. Le champ électrique total \vec{E}_{tot} créé par l'ensemble $\{D_1 + D_2 + A + B\}$ est la superposition du champ \vec{E} créé par $\{D_1 + D_2\}$ qui a déjà été calculé à la question I.4. et des champs électriques \vec{E}_A et \vec{E}_B créés par les faces A et B . En ordonnant les résultats dans un tableau, nous avons :

x	0	x_0	$x_0 + h$	$2d$
\vec{E}	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{e}_x$	
\vec{E}_A	$-\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	
\vec{E}_B	$-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	$\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{e}_x$	

Pour $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, le champ électrique total s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x + \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x - \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x + \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} \vec{e}_x = \vec{0}$$

On en déduit que :

$$\sigma_A = -\sigma \quad \text{et} \quad \sigma_B = \sigma$$

7. D'après le tableau étudié à la question précédente, nous avons :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{pour } x \in [0, x_0] \quad \text{et} \quad x \in [x_0 + h, 2d]$$

ce qui signifie que dans ces deux régions les champs électriques créés par A et B se compensent.

Comme le champ électrique est nul dans le domaine $x \in [x_0, x_0 + h]$, le potentiel y est constant et $V(x_0) = V(x_0 + h)$. On en déduit que :

$$U = V(x=0) - V(x=2d) = \{V(0) - V(x_0)\} + \{V(x_0+h) - V(2d)\} = \frac{\sigma x_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma(2d - x_0 - h)}{\varepsilon_0}$$

et donc :

$$U = \frac{\sigma(2d - h)}{\varepsilon_0}$$

8. En posant $\sigma = Q/S$, il vient :

$$U = \frac{Q(2d - h)}{S\varepsilon_0} = \frac{Q}{C'}$$

et donc :

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{2d - h} > \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = C$$

La plaque métallique D permet donc d'augmenter la capacité du condensateur.

III. Application à la mesure de l'accélération d'un véhicule. Mines - Ponts MP 2013

III.A. – Analyse du mouvement mécanique

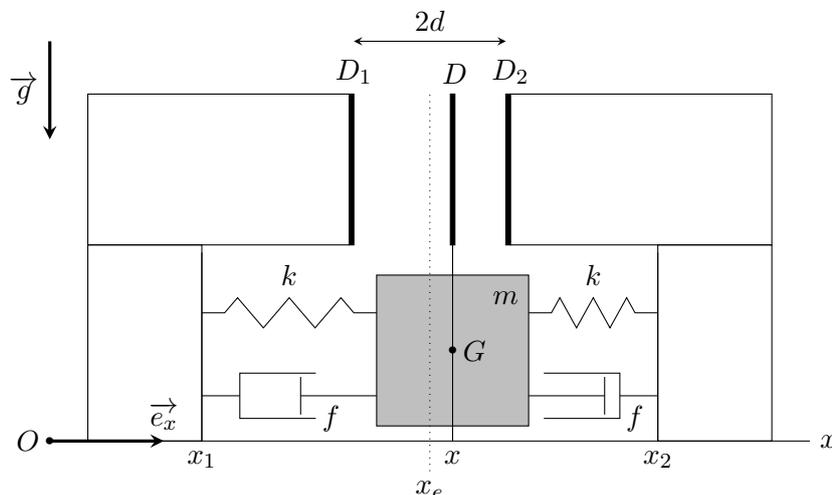


FIGURE 1 – Modélisation mécanique à une dimension du MEMS

9. On commence par les ressorts :

Pour le ressort de gauche, $\ell_g = x - b/2 - x_1$ et il exerce la force : $\vec{F}_{r,g} = -k(\ell_g - \ell_0) = -k(x - b/2 - x_1 - \ell_0) \vec{e}_x$. A l'équilibre, $\vec{F}_{r,g} = \vec{0}$ et $x = x_e = b/2 + x_1 + \ell_0$, d'où :

$$\vec{F}_{r,g} = -k(x - x_e) \vec{e}_x$$

De même, le ressort de droite est de longueur $\ell_d = x_2 - x - b/2$ et il exerce la force : $\vec{F}_{r,d} = k(x_2 - b/2 - x - \ell_0) \vec{e}_x$. Le même raisonnement conduit alors à :

$$\vec{F}_{r,d} = -k(x - x_e) \vec{e}_x$$

et finalement :

$$\boxed{\vec{F}_r = -2k(x - x_e) \vec{e}_x = -2kL \vec{e}_x}$$

La vitesse de m par rapport au bâti étant $\dot{x} \vec{e}_x$, les deux amortisseurs exercent des forces de frottement fluides égales, valant chacune $-f \dot{x} \vec{e}_x$, ce qui donne une force totale :

$$\boxed{\vec{F}_a = -2f \dot{x} \vec{e}_x = -2f \dot{L} \vec{e}_x}$$

10. Le véhicule est un référentiel non galiléen, en translation par rapport au sol (qui est galiléen). Il y a donc une force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}$, mais pas de force d'inertie de Coriolis. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) à m dans le référentiel du véhicule on obtient :

$$m \ddot{x} \vec{e}_x = -2kL \vec{e}_x - 2f \dot{L} \vec{e}_x - m \vec{a}$$

d'où :

$$\ddot{L} + \frac{2f}{m} \dot{L} + \frac{2k}{m} L = -a \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\ddot{L} + 2\mu \omega_0 \dot{L} + \omega_0^2 L = -a}$$

11. On passe dans le domaine complexe :

$$(-\omega^2 + 2j\mu\omega_0\omega + \omega_0^2)\underline{L} = -\underline{a}$$

et donc :

$$\frac{\underline{L}}{\underline{a}} = \frac{-1/\omega_0^2}{1 - \xi^2 + 2j\mu\xi}$$

Le domaine de pulsations dans lequel une mesure de L permet de déterminer l'accélération du véhicule est celui où \underline{L} et \underline{a} sont proportionnels. Cela est réalisé à basse fréquence $\xi \ll 1$ et on aura alors :

$$L(t) \approx -a(t)/\omega_0^2$$

12. Une fois le régime libre négligeable (solution homogène qui tend nécessairement vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$), L tend vers la solution particulière $L_\infty = -a/\omega_0^2$.

On sait que le régime libre tend le plus rapidement vers 0 et sans oscillations lorsque le régime critique est réalisé, ce qui correspond au discriminant $\Delta = 4\omega_0^2(\mu^2 - 1) = 0$. Il faut donc réaliser $\mu = 1$.

III.B. – Mesure de l'accélération

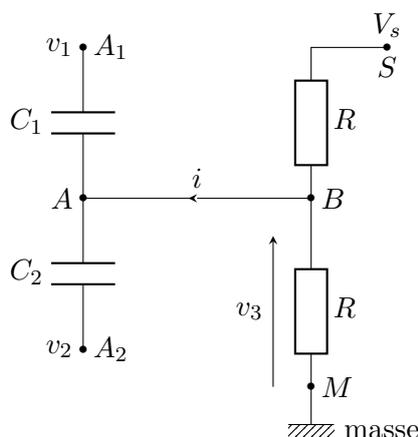


FIGURE 2 – Modélisation électrique

13. Cela correspond à la capacité de deux condensateurs plans :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d + L} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - L}$$

14. Appliquons une loi des nœuds à l'aide des potentiels en A et B respectivement :

- En A :

$$i = C_1 \frac{d(v_A - v_1)}{dt} + C_2 \frac{d(v_A - v_2)}{dt}$$

- En B :

$$i = \frac{0 - v_B}{R} + \frac{V_s - v_B}{R} \quad \text{avec} \quad v_A = v_B = v_3$$

L'élimination de i conduit à :

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + \frac{2v_3}{R} = \frac{V_s}{R} + C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

et le remplacement de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ par leurs expressions mène à :

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + \frac{2v_3}{R} = \frac{V_s}{R} + (C_1 - C_2) \omega V_1 \cos(\omega t)$$

d'où :

$$\boxed{\frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{\tau} = \frac{V_s}{2\tau} + \omega V_2 \cos(\omega t)}$$

15. Il faut réinsérer la solution générale dans l'équation différentielle. La partie $Ae^{-t/\tau}$ va disparaître car c'est la solution de l'équation homogène. De même, $V_s/2$ se simplifie et il ne reste que :

$$-\omega A_3 \sin(\omega t) + \omega B_3 \cos(\omega t) + \frac{A_3}{\tau} \cos(\omega t) + \frac{B_3}{\tau} \sin(\omega t) = \omega V_2 \cos(\omega t)$$

d'où :

$$\left(\omega B_3 + \frac{A_3}{\tau} - \omega V_2 \right) \cos(\omega t) + \left(-\omega A_3 + \frac{B_3}{\tau} \right) \sin(\omega t) = 0$$

Les deux applications $t \rightarrow \cos(\omega t)$ et $t \rightarrow \sin(\omega t)$ formant un système libre, cela entraîne :

$$\omega B_3 + \frac{A_3}{\tau} = \omega V_2 \quad \text{et} \quad -\omega A_3 + \frac{B_3}{\tau} = 0$$

qui se résout en :

$$\boxed{A_3 = V_2 \frac{\tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad B_3 = V_2 \frac{\tau^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

16. On a donc $\tau \omega = 500$ ce qui fait que $A_3 \approx 2.10^{-3} V_2$ et $B_3 \approx V_2$. On peut donc négliger le terme en A_3 , de même que $Ae^{-t/\tau}$ puisque $t \gg \tau$. Il ne reste que :

$$\boxed{v_3(t) = \frac{V_s}{2} + V_2 \sin(\omega t)}$$

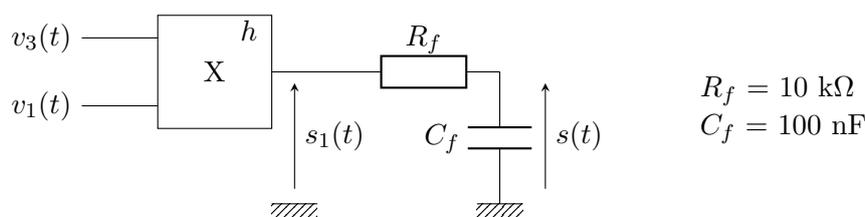


FIGURE 3 – Dispositif de mesure de l'accélération

17. On a :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= h \left(\frac{V_s}{2} + V_1 \sin(\omega t) \right) \times \left(\frac{V_s}{2} + V_2 \sin(\omega t) \right) \\ &= \frac{hV_s^2}{4} + \frac{hV_s(V_1 + V_2)}{2} \sin(\omega t) + hV_1V_2 \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{hV_s^2}{4} + \frac{hV_1V_2}{2} + \frac{hV_s(V_1 + V_2)}{2} \sin(\omega t) - \frac{hV_1V_2}{2} \cos(2\omega t) \end{aligned}$$

en utilisant la relation $\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$.

Le circuit $R_f C_f$ est un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure $\omega_C = \frac{1}{R_f C_f} = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$. On a donc manifestement $\omega \gg \omega_C$ et $2\omega \gg \omega_C$; les termes en $\sin(\omega t)$ et $\cos(2\omega t)$ sont donc éliminés. On a donc :

$$s(t) = \frac{h}{4} (V_s^2 + 2V_1V_2) = \frac{h}{4} \left(V_s^2 + 2V_1^2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

Il s'agit d'un signal continu. Sur l'oscilloscope en DC on observera un trait horizontal reflétant cette valeur constante. On calcule :

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = -\frac{L}{d}$$

et donc :

$$s = \frac{h}{4} \left(V_s^2 - 2V_1^2 \frac{L}{d} \right) = \frac{h}{4} \left(V_s^2 + 2V_1^2 \frac{a}{\omega_0^2 d} \right)$$

d'où finalement :

$$\boxed{s = \frac{h}{4} \left(V_s^2 + 2V_1^2 \frac{ma}{kd} \right)}$$

C'est une fonction affine de l'accélération a .

2. Mesure des variations du champ de gravitation terrestre

1. Les deux équations locales de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday dans le cadre du régime stationnaire s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (1)$$

Les champs de gravitation et électrostatique jouent un rôle analogue. La masse volumique est remplacée par la charge volumique et on a $-4\pi G \longleftrightarrow 1/\varepsilon_0$.

2. Pour toute surface fermée S_F le flux du champ de gravitation à travers S_F vérifie l'équation ci-dessous :

$$\boxed{\Phi(\vec{g}/S_F) = -4\pi G M_{\text{int}}}$$

où M_{int} est la masse contenue à l'intérieur de S_F .

3. On considère une tranche de matière d'épaisseur h comprise entre les deux plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Cette tranche est infinie dans les directions Ox et Oy et on suppose que la masse volumique ρ de la matière qui y est contenue est uniforme

- a) En un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) on peut écrire a priori :

$$\vec{g}(M) = g_x(x, y, z) \vec{e}_x + g_y(x, y, z) \vec{e}_y + g_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

- Les plan (Mxy) et (Myz) sont des plans de symétrie de la distribution de masses, contenant M . Il en résulte que :

$$\vec{g}(M) = g_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

- La tranche est invariante par toute translation de direction \vec{e}_x et toute translation de direction \vec{e}_y . On en déduit que :

$$\boxed{\vec{g}(M) = g_z(z) \vec{e}_z \stackrel{\text{noté}}{=} g(z) \vec{e}_z}$$

- b) Si M est un point du plan (xOy) , plan de symétrie de la tranche, alors $\vec{g}(M) = g(0) \vec{e}_z$ oit appartenir à ce plan. On en déduit que $g(0) = 0$.

De plus, si M' est le point symétrique de M par rapport au plan (xOy) , alors :

$$\vec{g}(M') = \text{sym}/xOy \vec{g}(M) = -\vec{g}(M)$$

On en déduit que $g(z)$ est une fonction impaire de z .

- c) Méthode 1 : par les équations locales.

$$\text{div } \vec{g} = \frac{dg}{dz} = -4\pi G \rho(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -h/2 \\ -4\pi G \rho & \text{si } -h/2 \leq z \leq h/2 \\ 0 & \text{si } z > h/2 \end{cases}$$

d'où :

$$g(z) = \begin{cases} C_1 & \text{si } z < -h/2 \\ -4\pi G \rho z + C_2 & \text{si } -h/2 \leq z \leq h/2 \\ C_3 & \text{si } z > h/2 \end{cases}$$

Comme $g(0) = 0$ on en déduit que $C_2 = 0$. De plus, la continuité de g en $z = \pm h/2$ (pas de masses surfaciques) entraîne que :

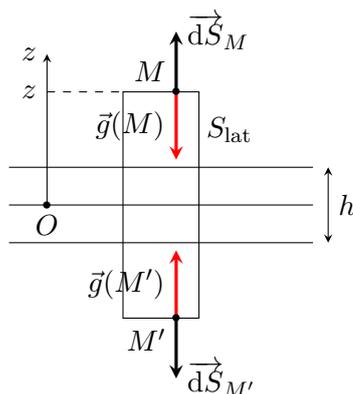
$$C_1 = 2\pi G \rho h \quad \text{et} \quad C_3 = -2\pi G \rho h$$

On a donc :

$$\boxed{\vec{g}(M) = \begin{cases} 2\pi G \rho h \vec{e}_z & \text{si } z < -h/2 \\ -4\pi G \rho z \vec{e}_z & \text{si } -h/2 \leq z \leq h/2 \\ -2\pi G \rho h \vec{e}_z & \text{si } z > h/2 \end{cases}}$$

Méthode 2 : par le théorème de Gauss.

La surface de Gauss (fermée) S_G est un cylindre de génératrices parallèles à Oz , dont les deux bases ont même surface S et sont placées symétriquement par rapport au plan xOy : la base supérieure étant d'abscisse $z > 0$ et la bas inférieure d'abscisse $-z < 0$.



La contribution de la surface latérale S_{lat} au flux est nulle et les contributions des deux bases sont égales. On obtient donc :

$$\Phi(\vec{g}/S_G) = 2 \iint_{\text{Base Sup}} g(z) \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dS_M = 2g(z)S$$

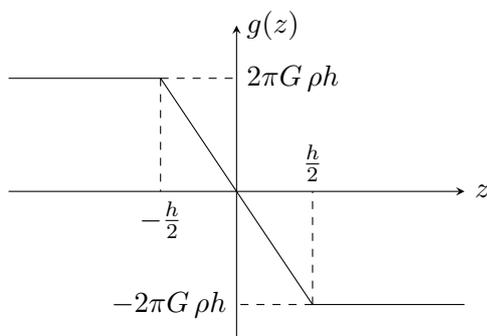
De plus :

$$M_{\text{int}} = \begin{cases} 2\rho Sz & \text{si } 0 \leq z \leq h/2 \\ \rho Sh & \text{si } h/2 < z \end{cases}$$

On applique le théorème de Gauss pour trouver :

$$g(z) = \begin{cases} -4\pi G \rho z & \text{si } 0 \leq z \leq h/2 \\ -2\pi G \rho h & \text{si } h/2 < z \end{cases}$$

On complète ensuite le résultat par imparité de $g(z)$ pour obtenir la même chose que dans la méthode 1.



4. a) On applique le théorème de Gauss gravitationnel en choisissant comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon $r > R_T$. Comme $M_{\text{int}} = m_T$ il vient :

$$\Phi(\vec{g}_T/S_G) = -4\pi r^2 g_T(r) = -4\pi G m_T \quad \text{d'où} \quad \boxed{g_T(r) = G \frac{m_T}{r^2}}$$

- b) On a :

$$g_T(r) = G \frac{m_T}{(R_T + h)^2} = \underbrace{G \frac{m_T}{R_T^2}}_{=g_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

d'où :

$$\boxed{g_T(r) \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)}$$

A.N. : $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

On se propose de calculer la variation du champ de gravitation terrestre telle qu'elle a été mesurée par Bouguer en 1738 sur un haut plateau chilien situé à l'altitude $h = 1000$ m par rapport au niveau de la mer (figure ??). On fait les hypothèses suivantes :

- le plateau est de masse volumique $\rho_P = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ uniforme ;
- on le suppose suffisamment étendu dans les directions horizontales pour pouvoir l'assimiler à une tranche infinie d'épaisseur h pour les calculs qui nous intéressent.
- On note \vec{e}_z le vecteur unitaire ascendant dans la direction de la verticale locale au niveau du plateau.

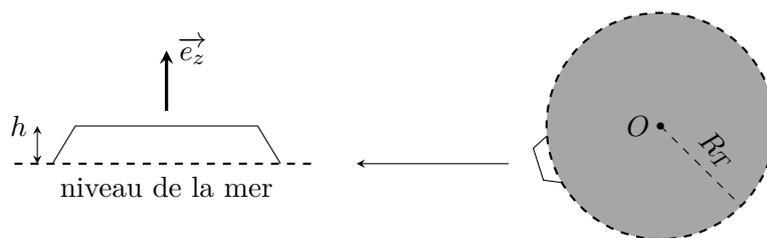


FIGURE 4 – Modélisation du plateau chilien.

5. À la surface du plateau, le champ de gravitation est la somme du champ de gravitation créé par la boule de rayon R_T et de celui créé par la tranche (théorème de superposition). D'après les questions précédentes on a donc :

$$\vec{g} = -g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) \vec{e}_z - 2\pi G \rho_P h \vec{e}_z = -g \vec{e}_z$$

et donc :

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) + 2\pi G \rho_P h$$

d'où :

$$\Delta g = g - g_0 = 2\pi G \rho_P h - g_0 \frac{h}{R_T}$$

A.N. : $\Delta g = -4,21 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$.

Remarque : $\Delta g < 0$ car le terme de gravitation de la boule $-g_0 h/R_T$ l'emporte sur le terme dû par le plateau $2\pi G \rho_P h$.

6. (R.P.) La période d'un pendule simple est donnée par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Au niveau de la mer, $g = g_0$ et $T = T_0 = 1\text{s}$. Sur le plateau chilien : $g = g_0 + \Delta g$ avec $|\Delta g| \ll g_0$ et la période devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 + \Delta g}} = \underbrace{2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0}}}_{=T_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta g}{g_0}\right)^{1/2}} \approx T_0 \left(1 - \frac{\Delta g}{2g_0}\right) \quad (*)$$

On remarque que $T > T_0$.

Déterminons maintenant les intervalles dans lesquels il y a 100% de chance qu'une mesure de T (resp. de T_0) soit située.

- Comme $T_0 = 1\text{s}$ (ce qui correspond à l'espérance mathématique de T_0), la demi-amplitude pour T_0 sera $\Delta_{T_0} = 1 \times 10^{-5}$. L'intervalle de confiance de T_0 sera donc :

$$I = [1 - 10^{-5}, 1 + 10^{-5}]$$

- L'espérance mathématique de T est donnée par la formule (*) ci-dessus ; elle vaut $1,000021458\text{s}$ et la demi-étendue associée est $\Delta_T = 1,000021458 \times 10^{-5}$. L'intervalle J dans lequel toute mesure de T a 100% de chance de tomber est donc :

$$J = [1,00002458 \times (1 - 10^{-5}), 1,00002458 \times (1 + 10^{-5})]$$

Afin que la mesure de l'écart entre les deux périodes soit significatif, il est nécessaire que les deux intervalles I et J soient *disjoints*. Or :

$$1 + 10^{-5} < 1,00002458 \times (1 - 10^{-5})$$

car :

$$1,00001 < 1,00001458$$

Les deux intervalles de confiance sont donc disjoints et on peut donc conclure, qu'avec ses moyens de l'époque, Bouguer était en capacité de mesurer l'écart entre les deux périodes et de déterminer la variation de g .

Remarque : pour en savoir plus sur l'aventure de Bouguer, on pourra se reporter aux sites :
 — <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/pendule-pesanteur-altitude.xml#ref2>
 — <http://www.anales.org/archives/cofrhigeo/bouguer.html>

3. Piéger une particule. Extrait Mines-Pont MP 2015

1. On sait que $\vec{F} = q\vec{E} = -q\overrightarrow{\text{grad}}V$. En utilisant les coordonnées cartésiennes il vient :

$$ax = -q\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad ay = -q\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad bz = -q\frac{\partial V}{\partial z} \quad (1)$$

Comme en dehors des charges, V satisfait à l'équation de Laplace, nous avons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{a}{q} - \frac{a}{q} - \frac{b}{q} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{b = -2a}$$

Si on reprend les équations (1) on obtient alors par intégration :

$$V(x, y, z) = -\frac{a}{q}(x^2 + y^2) - \frac{b}{q}z^2 + \alpha = \alpha - \frac{a}{q}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

d'où en posant $\beta = -a/q$, on obtient le résultat demandé.

De plus, l'énoncé indique que (sachant que $z_0 = r_0/\sqrt{2}$) :

$$V(0, 0, z_0) = \alpha - 2\beta z_0^2 = \alpha - \beta r_0^2 = 0 \quad \text{et pour } x^2 + y^2 = r_0^2 \text{ et } z = 0, \quad \alpha + \beta r_0^2 = V_0$$

d'où :

$$\begin{cases} \alpha - \beta r_0^2 & = & 0 \\ \alpha + \beta r_0^2 & = & V_0 \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{V_0}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{V_0}{2r_0^2}}$$

2. Équipotentielle dans le plan xOz :

Le plan xOz est tel que $y = 0$, le potentiel a pour expression :

$$V(x, 0, z) = \frac{V_0}{2r_0^2}(x^2 - 2z^2 + r_0^2)$$

Cherchons l'équation de l'équipotentielle $V(x, 0, z) = V_1$. En posant $k = 2V_1/V_0$ nous obtenons l'équation :

$$(k - 1)r_0^2 = x^2 - 2z^2$$

Plusieurs cas se présentent :

- Si $k = 1$ on obtient les deux droites $x = \pm\sqrt{2}z$.
- Si $k < 1$ alors on met l'équation précédente sous la forme : $2z^2 = x^2 + r_0^2(1 - k)$, c'est à dire :

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + r_0^2(1 - k)} = f_k(x)$$

L'axe Oz est axe de symétrie de la courbe équipotentielle (parité de la fonction f_k), de même que l'axe Ox . Les courbes ont pour asymptote $z = \pm x/\sqrt{2}$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

- Si $k > 1$ alors :

$$x = \pm \sqrt{2z^2 + (k - 1)r_0^2} = g_k(z)$$

L'axe Oz est axe de symétrie (à cause du \pm), de même que l'axe Ox par parité de la fonction $g_k(z)$. Les courbes ont pour asymptote les droites $x = \pm\sqrt{2}z$.

On obtient la représentation de la figure ?? à gauche. Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

Équipotentielles du plan xOy

C'est ici plus facile car le plan xOy est tel que $z = 0$ et le potentiel a pour expression :

$$V(x, y, 0) = \frac{V_0}{2r_0^2} (x^2 + y^2 + r_0^2)$$

L'équipotentielle $V(x, y, 0) = V_1$ a pour équation :

$$x^2 + y^2 = (k - 1)r_0^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{2V_1}{V_0}$$

Seules les valeurs $k > 1$ sont permises et on obtient alors des cercles de centre O et de rayon $\sqrt{k - 1}$. Les lignes de champ sont orthogonales à ces cercles et ce sont donc des droites passant par O : figure ?? à droite.

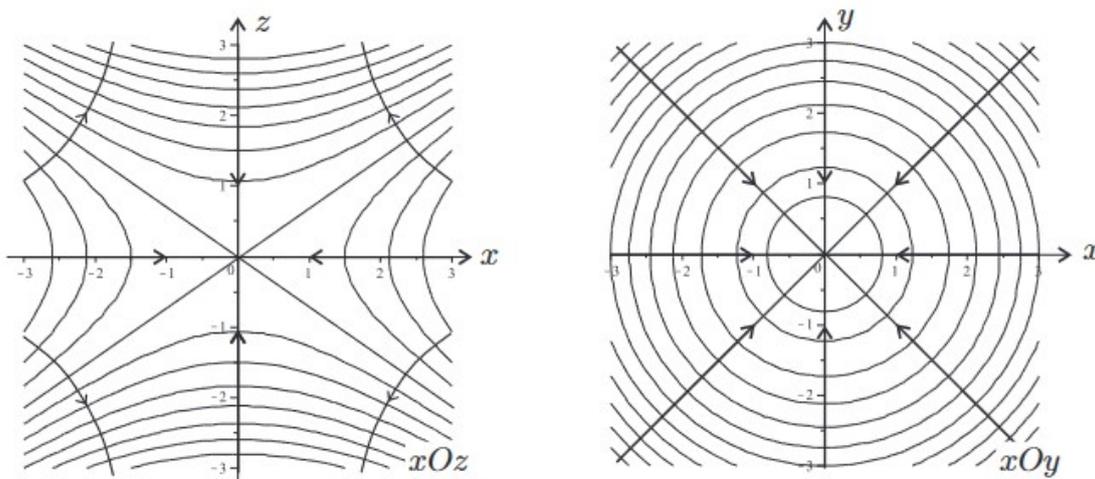


FIGURE 5 – Équipotentiels et lignes de champ du piège électrostatique

3. On a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{V_0}{r_0^2} (-x \vec{u}_x - y \vec{u}_y + 2z \vec{u}_z) \quad \text{et} \quad \vec{F} = q \vec{E}$$

On remarque que $\vec{F} = \vec{0}$ en $O(0, 0, 0)$, ce qui correspond bien à une position d'équilibre. Le principe fondamental de la dynamique (noté PFD par la suite) conduit aux trois équations (on note m la masse de la particule) :

$$\ddot{x} + \frac{qV_0}{mr_0^2} x = 0 \quad ; \quad \ddot{y} + \frac{qV_0}{mr_0^2} y = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} - \frac{2qV_0}{mr_0^2} z = 0$$

- Si $qV_0 > 0$ alors les équations en x et y sont des oscillateurs harmoniques (noté OH par la suite) mais pas celle en z : il y aura donc une instabilité selon l'axe Oz puisque z sera une combinaison linéaire de ch et de sh.
- Si $qV_0 < 0$ alors c'est l'équation en z qui est un OH mais pas les deux autres. Cette fois c'est x et y qui seront des combinaisons linéaires de ch et de sh.

4. Il faut ajouter à la force électrique la force magnétique :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = -eB_0 (-\dot{x} \vec{u}_y + \dot{y} \vec{u}_x)$$

Le PFD conduit à :

$$\ddot{x} - \frac{eV_0}{m_p r_0^2} x + \frac{eB_0}{m_p} \dot{y} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} - \frac{eV_0}{m_p r_0^2} y - \frac{eB_0}{m_p} \dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + \frac{2eV_0}{m_p r_0^2} z = 0$$

c'est à dire :

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \omega_c \dot{y} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} - \omega_0^2 y - \omega_c \dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0$$

En posant $\xi = x + iy$ on obtient les deux équations différentielles :

$$\boxed{\ddot{\xi} - i\omega_c \dot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0}$$

L'équation en z est un OH ce qui assure le confinement de l'antiproton dans la direction de Oz . Cherchons les solutions de pour ξ ; l'équation caractéristique s'écrit :

$$X^2 - i\omega_c X - \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = -\omega_c^2 + 4\omega_0^2$$

Afin d'assurer le confinement selon les axes Ox et Oy , il faut des solutions sinuïdales en $x(t)$ et $y(t)$, ce qui implique que les racines de l'EC soient imaginaires pures. Il est donc nécessaire que :

$$\Delta < 0 \iff 2\omega_0 < \omega_c \quad \text{d'où} \quad \frac{2m_p \omega_0}{e} < B_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{B_{\min} = \frac{2m_p \omega_0}{e}}$$

A.N. : $B_{\min} = 8,2 \cdot 10^{-2}$ T. Le champ magnétique $B_0 = 1$ T appliqué est donc largement suffisant.

5. On calcule $\omega_c = 9,4 \cdot 10^7$ rad.s⁻¹ et $\omega_0 = 3,8 \cdot 10^6$ rad.s⁻¹. On a donc $2\omega_0 \ll \omega_c$ et la condition de la question précédente est bien vérifiée. Les deux racines de l'équation caractéristique sont donc :

$$X_1 = i \frac{\omega_c}{2} + i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}}{2} \approx i\omega_c$$

et

$$X_2 = i \frac{\omega_c}{2} - i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}}{2} = i \frac{\omega_c}{2} - i \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} \approx i \frac{\omega_c}{2} - i \frac{\omega_c}{2} \left(1 - 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}\right) = i \frac{\omega_0^2}{\omega_c}$$

On pose alors $\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_c} \ll \omega_0 \ll \omega_c$, ce qui donne pour solutions :

$$\xi(t) = a_1 e^{i\omega_c t} + b_1 e^{i\omega_1 t} \quad \text{et} \quad z(t) = a_2 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + b_2 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)$$

Le mouvement dans le plan (xOy) est donc une superposition d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_c donc rapide et d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_1 très lent. Le mouvement sur l'axe Oz est un mouvement sinusoïdal de pulsation $\sqrt{2}\omega_0$ lent.