NOM : Prénom :

# Interrogation de cours n°10

10

## 1 Équations locales de l'électromagnétisme

- Remplir le tableau ci-dessous. Pour les lois intégrales, on précisera le nom de la loi ou du théorème **et** on donnera son expression dans le cas général.

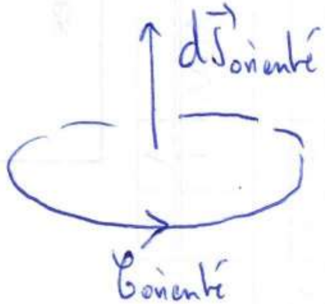
| Nom de l'éq. de Maxwell | Cadre général | Dans le vide | En statique | Loi intégrale qui en découle (cadre général) |
|---|---|---|---|---|
| Maxwell-Gauss (MG) | $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ | $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ | $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ | Th. de Gauss $\oiint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ |
| Maxwell Thomson (MT) ou Flux (MΦ) | $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ | $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ | $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ | $\vec{B}$ à flux conservatif $\oiint_{\Sigma \text{ fermée}} \vec{B}\cdot d\vec{S}_{ext} = 0$ |
| Maxwell Faraday (MF) | $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ | Loi de Faraday $e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}_{orienté} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$ |
| Maxwell Ampère (MA) | $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (ou $1/c^2$) | $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ | Th d'Ampère $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}_{orienté} = \mu_0 I_{enlacé} + \mu_0 \underbrace{\iint_{\Sigma} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}_{= \frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt} \text{ si } \Sigma \text{ fixe}}$ |

5 (chaque erreur retire 0,5 pt)

- Démontrer l'expression du théorème d'Ampère **en régime statique**.

En statique : (MA) $\Rightarrow \vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} \Rightarrow \underbrace{\iint \vec{\mathrm{Rot}}\cdot d\vec{S}_{orienté}}_{\text{Th de Stokes} \; \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}_{orienté}} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j}\cdot d\vec{S}_{orienté}}_{\mu_0 I_{enlacé}}$ (*)

(*) ↳ orienté par rapport à celle de $d\vec{S}_{orienté}$



$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}_{orienté} = \mu_0 I_{enlacé}} \; \oplus$$

(*) mention d'une convention d'orientation.

2

• Démontrer que le champ électrique $\vec{E}$ vérifie une équation de D'Alembert dans le vide.
On donne

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\vec{a}$$

1,5

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0 \text{ d'après MG dans le vide}}) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E} \quad ⊛$$

$$\underset{(MF)}{=} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) \underset{(MA)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad ⊛$$

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad ⊛$$

avec $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

• Donner les conditions d'application de la loi de Laplace et la démontrer.

1,5

En statique ⊛, dans le vide ⊛

$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$

$\rho = 0 \Rightarrow$ MG devient $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ devient $-\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\right) = 0$

soit $\boxed{\Delta V = 0}$ ⊛ Equation de Laplace.