

Énergie électromagnétique - Matériaux conducteurs

Table des matières

I Bilan énergétique en électromagnétisme dans le cas général	2
I.1 Les différentes grandeurs énergétiques en électromagnétisme	2
I.2 Bilan énergétique local de l'interaction électromagnétique	4
I.3 Equation locale de Poynting	5
II Bilan énergétique en électromagnétisme dans le cas particulier des conducteurs dans l'ARQS	6
II.1 Milieu conducteur	6
II.2 Loi d'Ohm locale	7
II.3 Neutralité d'un conducteur	7
II.4 Équations de Maxwell dans un conducteur dans le cadre de l'ARQS	8
II.5 Modèle microscopique de la conduction électrique : modèle de Drude	9
II.6 Forme intégrale de la loi d'Ohm	11
II.7 Puissance des forces de Lorentz et effet Joule dans un conducteur	12
II.8 Bilan énergétique dans un conducteur ohmique	12

Introduction

Le champ électromagnétique est capable de mettre en mouvement des charges (par exemple dans les accélérateurs de particules) et de transmettre de l'énergie à la matière (par exemple dans le cas du four à micro-ondes), par l'intermédiaire de la force de Lorentz.

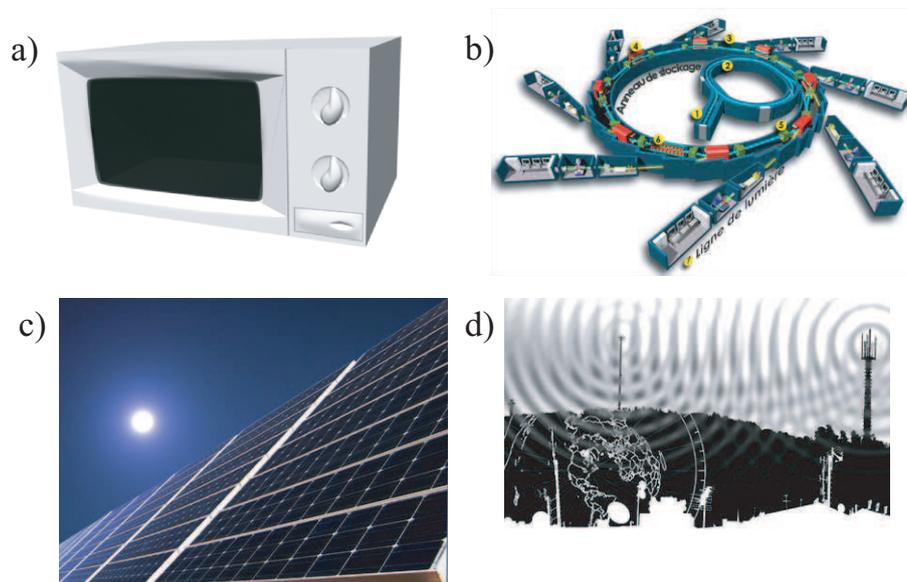


FIGURE 1 – Applications utilisant l'énergie électromagnétique : a) four à micro-ondes, b) accélérateur de particules (Soleil-Saclay), c) panneaux solaires, d) radio.

De plus, cette énergie électromagnétique peut se propager par rayonnement, comme en attestent les rayons du soleil propageant de l'énergie du Soleil vers la Terre, dont l'énergie peut être récupérée à l'aide de panneaux solaires (cellules photovoltaïques). La radio utilise également le rayonnement de l'énergie électromagnétique.

Transition : L'objet de ce chapitre est tout d'abord de déterminer l'énergie échangée entre le champ et les charges et courants, puis de faire un bilan énergétique local afin de montrer que la présence d'un champ électromagnétique atteste de l'existence d'une **énergie électromagnétique locale** que l'on notera U_{em} . Nous verrons enfin le cas particulier des bilans énergétiques dans un conducteur ohmique.

I Bilan énergétique en électromagnétisme dans le cas général

I.1 Les différentes grandeurs énergétiques en électromagnétisme

a) Densité d'énergie électromagnétique

La *densité volumique d'énergie électromagnétique* $u_{em}(M, t)$ (analogue à la densité volumique de charge), qui s'exprime en $J.m^{-3}$, représente l'énergie électromagnétique contenue dans un volume $d\tau$ autour du point M à l'instant t . Elle s'écrit :

$$\text{énergie} \quad \boxed{\delta U_{em} = u_{em}(M, t)d\tau} \quad [\text{cf} \quad \delta Q_{int} = \rho(M, t)d\tau \quad \text{charge}]$$

b) Puissance électromagnétique rayonnée

Le *vecteur puissance surfacique rayonnée* ou *vecteur de Poynting* $\vec{\Pi}_{em}(M, t)$ (analogue au vecteur densité de courant électrique), qui s'exprime en $W.m^{-2}$, tel que la puissance¹ électromagnétique rayonnant à travers la surface élémentaire centrée sur M à l'instant t est :

$$\text{puissance} \quad \boxed{\underbrace{\delta \mathcal{P}_{ray}}_{\text{débit d'énergie}} = \underbrace{\vec{\Pi}_{em}(M, t)}_{\text{puissance surfacique}} \cdot d\vec{S}} \quad \left[\text{cf} \quad \underbrace{\delta I}_{\text{débit de charge}} = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S} \quad \text{intensité} \right]$$

Comme nous le reverrons en optique, la norme du vecteur de Poynting $\|\vec{\Pi}_{em}\|$ correspond à l'**éclairement** ou à l'**intensité lumineuse** de l'onde électromagnétique lorsque cette dernière correspond à un rayonnement visible.

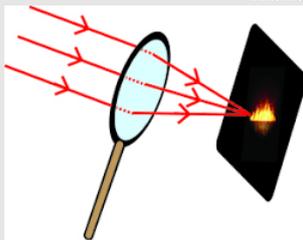
Exemple

Ordres de grandeur :

- L'éclairement solaire frappant le sol dans des conditions optimales équivaut à $1\,400\,W.m^{-2}$. On retiendra donc $\Phi_{solaire} \simeq 1000\,W.m^{-2}$
- L'effet d'une simple loupe de $10\,cm^2$ permet d'atteindre un éclairement presque mille fois supérieur en focalisant cette puissance sur une surface d'environ $1\,mm^2$:

$$\mathcal{P}_{ray} = \Pi_{em,incident} S_{loupe} = \Pi_{em,foyer} S_{tache\,focale}$$

$$\Rightarrow \Pi_{em,foyer} = \frac{S_{loupe}}{S_{tache\,focale}} \Pi_{em,incident} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} 10^3 = 10^6\,W.m^{-2}$$



Cet éclairement est capable d'enflammer un papier ou un corps organique fin et sec.

1. En raisonnant par analogie, on voit que si U_{em} est l'analogue de q , alors l'analogue de I est une puissance \mathcal{P} , puisqu'on passe de q à I en divisant par le temps.

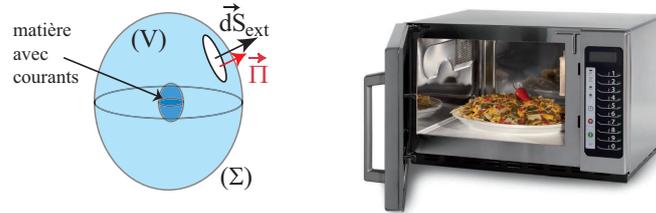
c) Puissance volumique des forces de Lorentz**Remarque**

On raisonne très souvent en valeur moyenne dans le cas d'un volume fixe, et on pourra donc intervertir intégration spatiale et valeur moyenne temporelle :

$$\langle \mathcal{P}_{Lor}(t) \rangle = \left\langle \iiint_{M \in V} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau \right\rangle = \iiint_{M \in V} \langle \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) \rangle d\tau$$

I.2 Bilan énergétique local de l'interaction électromagnétique

Considérons un volume V fixe² délimité par une surface fermée (Σ). Nous allons chercher une équation traduisant le bilan d'énergie électromagnétique dans ce volume V , analogue à l'équation de conservation de la charge.



La variation de l'énergie électromagnétique dans le volume peut s'expliquer par trois phénomènes :

- une accumulation d'énergie électromagnétique dans le volume ;
- une puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière (puissance des forces de Lorentz) \mathcal{P}_{Lor} ;
- une puissance perdue par le champ électromagnétique vers l'extérieur par rayonnement \mathcal{P}_{ray} .

On obtient alors la formule intégrale suivante³ :

2. On peut par exemple penser à un œuf placé dans un micro-onde.

3. Les signes "-" viennent du fait que les puissances \mathcal{P}_{Lor} et \mathcal{P}_{ray} sont respectivement cédée et sortante, c'est à dire perdues pour le champ électromagnétique compris dans le volume V . Ceci doit donc nécessairement entraîner une diminution de l'énergie électromagnétique U_{em} au cours du temps.

I.3 Equation locale de Poynting

Essayons maintenant de déterminer les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_{em}$ en fonction du champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$.

Nous allons procéder par identification de chacun des termes du bilan local d'énergie électromagnétique avec une autre équation faisant intervenir le terme $\vec{j} \cdot \vec{E}$, et obtenue à partir des équations de Maxwell.

$$\frac{(MA)}{\mu_0} \Rightarrow \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{(MA)}{\mu_0} \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (2)$$

$$(3)$$

or d'après le formulaire d'analyse vectorielle :

$$\text{div} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$(MF) \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{(MF) \cdot \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$(6) - (4) \Rightarrow \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

En réarrangeant cette expression, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}} \quad \text{que l'on peut identifier avec} \quad \boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi}_{em} = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

On obtient donc par identification les expressions :

densité volumique d'énergie électromagnétique

$$\boxed{u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

puissance surfacique rayonnée ou vecteur de Poynting

$$\boxed{\vec{\Pi}_{em} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

Transition : Nous avons introduit ici le cadre général des bilans énergétiques en électromagnétisme. Ceci sera valable dans tous les milieux et pour tout type d'onde électromagnétiques (optique visible, ondes radio, rayons X, UV, IR).

Nous allons maintenant étudier un milieu en particulier : les conducteurs.

II Bilan énergétique en électromagnétisme dans le cas particulier des conducteurs dans l'ARQS

II.1 Milieu conducteur

Un milieu **conducteur** est un milieu possédant des porteurs de charge mobiles (électrons, ions, trous). Lorsqu'un champ électrique lui est appliqué, un courant électrique apparaît. Les trois principaux types de conducteurs sont les *métaux* (cuivre, fer...), les *solutions électrolytiques* (ex : eau salée) et les plasmas (ex : gaz ionisés comme une flamme, un éclair).

Attention : dans un métal par exemple, ce sont les électrons qui jouent le rôle des porteurs de charge. Cependant, ce ne sont pas les seules charges. En effet, il existe aussi des ions chargés positivement qui peuvent être considérés comme fixes dans le réseau cristallin.

On distingue les conducteurs des milieux **isolants** comme le vide, et les diélectriques possédant des charges *liées* (verre, céramique, eau déminéralisée, bois), pour lesquels les nuages électroniques des atomes du milieu se déplacent légèrement, mais en restant "attachés" aux noyaux.

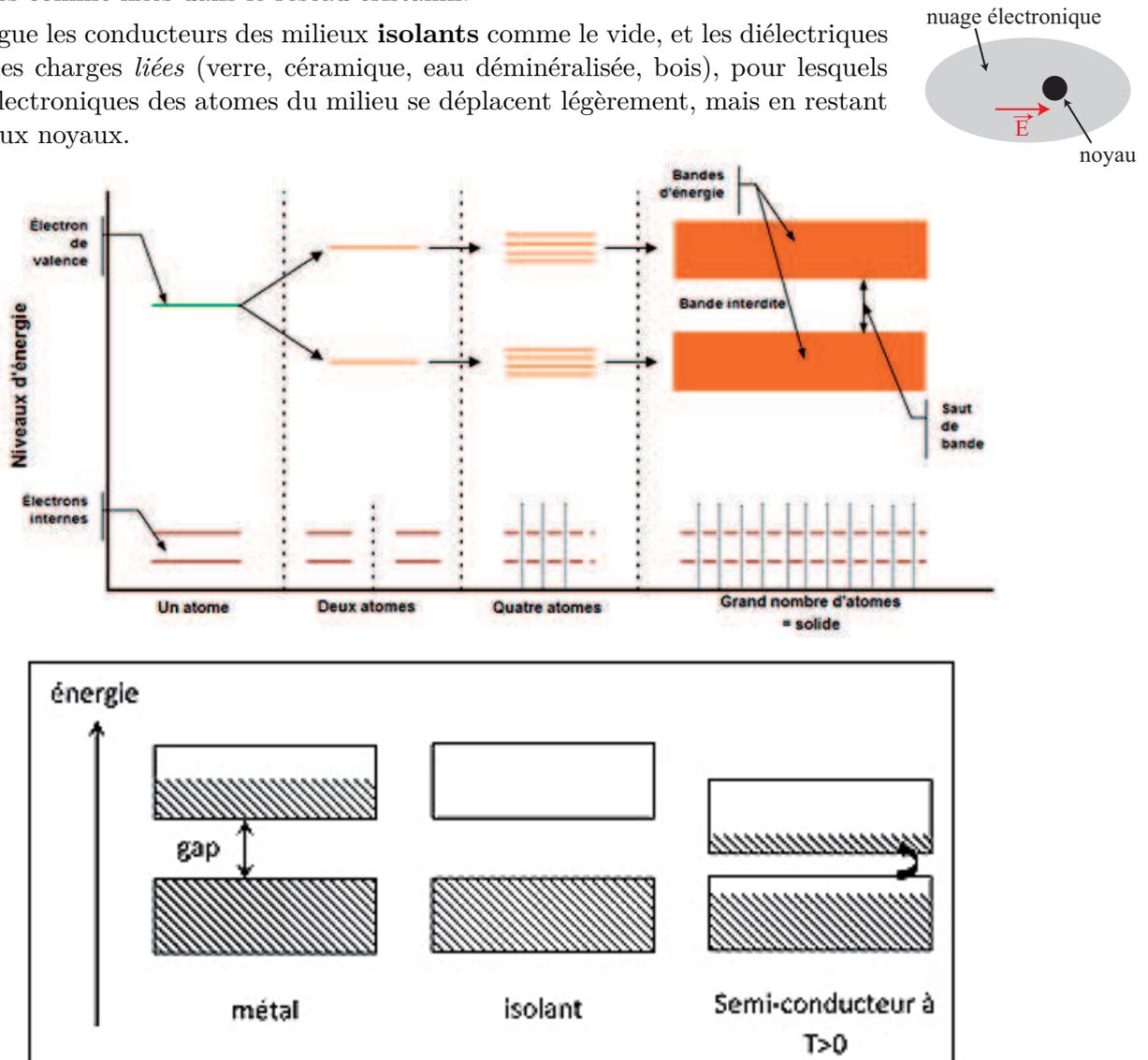


FIGURE 2 – Lorsque les atomes sont mis les uns à côté des autres dans un cristal, la structure électronique est constituée de bandes d'énergie (comprenant des niveaux discrets très proches en énergie) elles-mêmes séparées par des zones d'énergies interdites appelées "gaps". Ainsi lorsqu'une bande est totalement remplie, les électrons ne peuvent plus se déplacer car ils ne trouvent plus d'états vides accessibles : il faut franchir le gap pour cela. On a donc un **isolant**. Si le gap n'est pas trop grand et que la température n'est pas trop faible (c'est à dire $k_B T \simeq \Delta E_{gap}$), il peut tout de même y avoir des électrons dans la bande vide au-dessus du gap, mais la conduction reste tout de même faible : on parle alors de **semi-conducteurs**.

II.2 Loi d'Ohm locale

On constate *expérimentalement*, pour une très grande variété de matériaux conducteurs, que la densité de courant \vec{j} est proportionnelle au champ électrique \vec{E} appliqué. Cette propriété reste vraie pour des valeurs de champ électrique variant dans une très large gamme.

Dans un conducteur, la densité volumique de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} vérifient :

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}} \quad \text{Loi d'Ohm locale}$$

où γ est un scalaire appelé *conductivité électrique du milieu* s'exprimant en $\Omega^{-1}.m^{-1}$, et dépendant notamment du milieu conducteur et de la température.

	Isolant (vide)	Solutions électrolytiques (solution aqueuse)	Métal (Cu)	Métal parfait (supraconducteur)
Conductivité électrique γ (en $\Omega^{-1}.m^{-1}$)	0	10^{-4}	10^8	∞

II.3 Neutralité d'un conducteur

Attention : ρ correspond à la densité volumique totale des charges dans le milieu conducteur. Dans un métal, les porteurs de charge sont les électrons de conduction (densité de charge $\rho_e < 0$), mais également les ions du réseau cristallin (densité de charge $\rho_{ion} > 0$), de sorte que :

$$\rho = \rho_e + \rho_{ion} = 0$$

On rappelle que ceci n'est pas en contradiction avec l'existence d'un courant puisque les ions sont fixes dans le référentiel du métal et ne donnent lieu à aucun courant.

Remarque

|| Un conducteur ne peut être chargé en volume mais peut toutefois être chargé en surface avec une densité surfacique de charge σ .

4. \vec{E} est en $V.m^{-1}$ et \vec{j} en $A.m^{-2}$, donc γ est en $A.V^{-1}.m^{-1}$ soit en $\Omega^{-1}.m^{-1}$. Nous verrons comment retrouver cette unité autrement à partir de l'expression de la résistance électrique d'un barreau cylindrique plus tard.

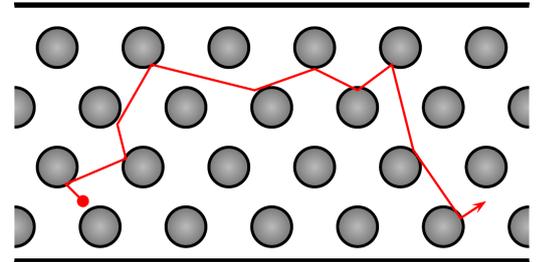
II.4 Équations de Maxwell dans un conducteur dans le cadre de l'ARQS

II.5 Modèle microscopique de la conduction électrique : modèle de Drude

Essayons maintenant d'interpréter cette relation de proportionnalité entre le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} dans un milieu conducteur, en utilisant un modèle microscopique. On se restreindra pour simplifier à la seule présence d'un champ électrostatique, mais la relation est valable pour tout régime.

Dans un métal (comme dans tout autre solide), les atomes sont disposés régulièrement et ne vibrent que très légèrement autour de leur position d'équilibre.

Ces atomes perdent facilement un ou deux de leurs électrons périphériques ; de cette façon, ils se transforment en ions chargés positivement. Chaque ion continue à occuper la même place que l'atome dont il provient. Au contraire, les électrons libérés, dits *de conduction* peuvent se déplacer dans le métal. La figure ci-contre modélise le trajet d'un électron dans un fil métallique sous tension.

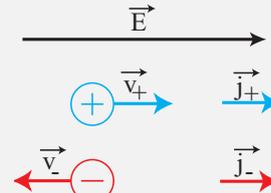


Remarque

- On voit ici que quel que soit le signe de la charge électrique, la conductivité est positive :

$$\gamma > 0$$

Ceci s'explique par le fait que le sens de déplacement des porteurs de charge est sensible au signe de la charge, donc des porteurs négatifs se déplacent dans le sens opposé aux porteurs positifs.

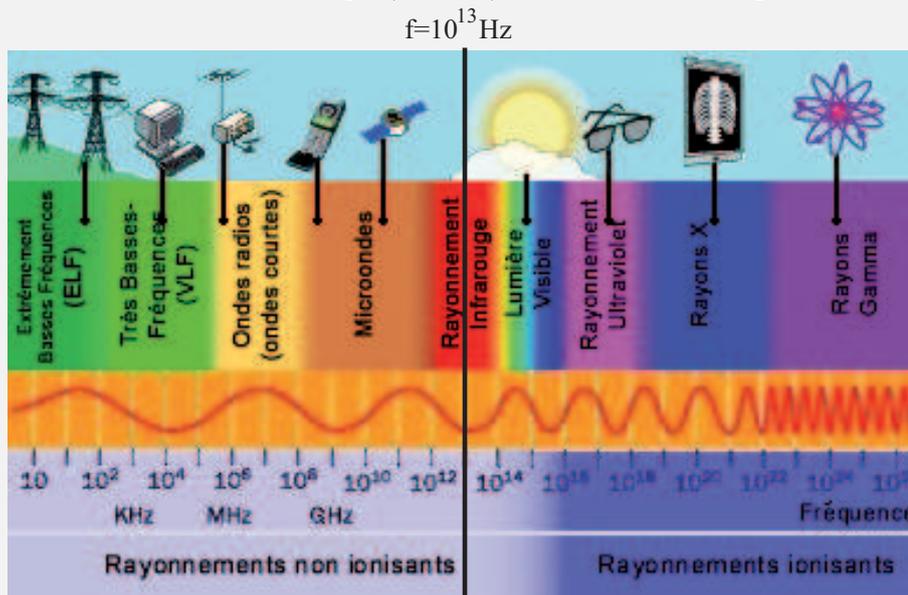


- Calculons le temps d'établissement τ du courant dans un métal, sachant que γ mesurée est de l'ordre de $10^8 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, et que la densité d'électrons mobiles est de l'ordre de $n_e = 10^{29} m^{-3}$ (on peut retrouver cet ordre de grandeur facilement en supposant qu'il y a environ un électron de conduction par atome, soit $n_e \simeq \frac{1}{a^3} = 10^{30} m^{-3}$) :

$$\tau = \frac{m_e}{\lambda} = \frac{m_e \gamma}{n_e q^2} = \frac{10^{-30} \times 10^8}{10^{29} \times (10^{-19})^2} \simeq 10^{-13} s$$

Ce temps étant très inférieur aux temps d'observations expérimentaux, on pourra considérer l'établissement du courant dans un matériau conducteur comme instantané^a.

a. Remarque : on peut ajouter que pour des fréquences supérieures à $f = 10^{13} Hz$, les charges n'ont pas le temps de réagir aux variations du champ en profondeur dans un métal (en surface oui puisqu'il existe un champ réfléchi, c'est à dire rayonné par les charges), ce qui explique que pour les fréquences du visible, de l'ordre de $10^{15} Hz$, la lumière ne crée pas de courant dans un métal. En revanche, les fréquences radio et wifi sont capables de mettre en mouvement les charges (antennes), comme le montre le spectre électromagnétique ci-dessous.



II.6 Forme intégrale de la loi d'Ohm

Remarque

On voit d'après l'expression précédente qu'une variation de longueur ΔL d'un fil conducteur s'accompagne d'une variation de sa résistance ΔR . Cet effet est utilisé dans les **jauges d'extensométrie** pour déterminer par exemple l'allongement d'une poutre en flexion. C'est ce principe qui est également utilisé dans les peses-personnes électroniques.

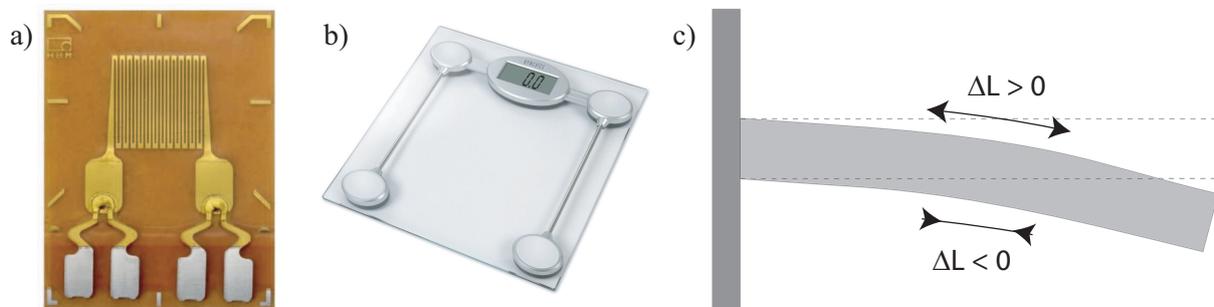


FIGURE 3 – a) Jauge d'extensométrie. b) Pèse personne électronique. c) Illustration des variations de longueurs lors de la flexion d'une poutre.

II.7 Puissance des forces de Lorentz et effet Joule dans un conducteur

II.8 Bilan énergétique dans un conducteur ohmique

On considère un câble électrique assimilé à un conducteur ohmique cylindrique de longueur ℓ , d'axe Oz et de rayon a , de conductivité γ , parcouru par une densité volumique de courants uniforme et stationnaire $\vec{j} = j\vec{e}_z$ dont l'intensité totale est notée I . On néglige les effets de bord, c'est-à-dire qu'on suppose que les champs ont même géométrie que si le cylindre était infiniment long.

1. Déterminer le champ électrique et le champ magnétique \vec{B} créé à l'intérieur du câble. Vérifier la compatibilité avec les équations de Maxwell et la conservation de la charge.
2. En déduire l'expression du vecteur de Poynting en un point de la surface du câble, puis la puissance électromagnétique rayonnée reçue par le câble à travers sa surface latérale.
3. Montrer que cette puissance reçue s'identifie avec la puissance consommée par les forces de Lorentz. Comment cette puissance est-elle finalement dissipée ?
4. Les expressions obtenues sont-elles en accord avec l'équation de Poynting ?

