TD n°10 - Énergie électromagnétique - Matériaux conducteurs

1 Rayon classique de l'électron

Un électron, de charge électrique totale $-e$, est modélisé par une boule de centre O et de rayon a, uniformément chargée en volume (de densité volumique de charge ρ). On suppose l'électron immobile.

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace par cette distribution de charges.
2. Calculer l'énergie électrique U_E totale contenue dans tout l'espace. En supposant que cette énergie est égale à l'énergie de masse $E = mc^2$ de l'électron, en déduire la valeur du rayon a (rayon classique de l'électron).
3. Application numérique : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ u.S.I. ; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Calculer a

Réponses : 2. $U_E = \dfrac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 a}$, 3. $a = \dfrac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 1,7.10^{-15}\ m$.

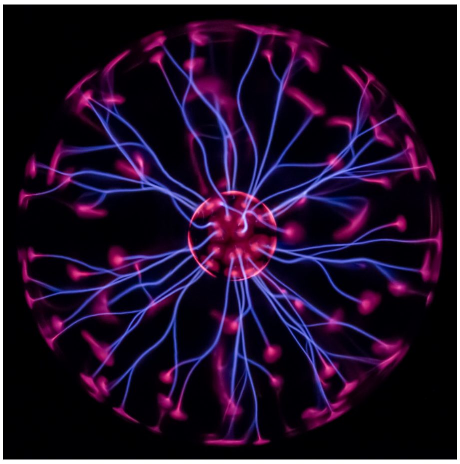
2 Conductivité complexe dans le modèle de Drude

En adoptant le modèle de la conduction de Drude dans un métal soumis à un champ électromagnétique $\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left[\underline{\overrightarrow{E}}\right] = \mathcal{R}e\left[\underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{i(\omega t)}\right]$ montrer qu'on peut définir une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

où n^* est le nombre volumique d'électrons libres et où τ est défini par l'intermédiaire de la force $-m\dfrac{\overrightarrow{v}}{\tau}$ exercée par le réseau sur les électrons de conduction.

3 Champs créés par deux sphères concentriques



Deux sphères métalliques minces (S_1) et (S_2), de même centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ sont séparées par un gaz initialement isolant et dont les constantes électromagnétiques peuvent être confondues avec celles du vide, c'est à dire ϵ_0 et μ_0.

Initialement, (S_2) n'est pas chargée et (S_1) porte la charge électrique Q, uniquement répartie sur sa surface. L'intérieur de (S_1) (c'est à dire la boule de rayon R_1) ne contient pas de charges et restera électriquement neutre dans tout l'exercice. Le milieu extérieur à (S_2), caractérisé par $r > R_2$, est le vide.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le gaz devient brusquement conducteur et qu'il obéit à la loi d'Ohm locale (relation revue plus tard dans le chapitre suivant), ce qui signifie que $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ en tout point du gaz, γ étant la conductivité électrique (grandeur supposée constante).

1. (a) En analysant les symétries du problème, montrer que le champ électrique est nécessairement de la forme :
$$\vec{E}(M) = E(r,t)\,\vec{u}_r \text{ pour toute valeur de } r = OM$$
où $\vec{u}_r$ désigne le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques.
   (b) En déduire une expression similaire pour le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ dans le gaz.
   (c) Finalement, montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ ne peut être que nul en tout point de l'espace.
2. (a) Déterminer à l'aide des équations de Maxwell une équation différentielle par rapport au temps, vérifiée par $E(r,t)$ pour $R_1 < r < R_2$. En déduire l'expression de $E(r,t)$ en fonction de t, r et Q. On introduira un temps caractéristique τ, dont on donnera l'ordre de grandeur dans le cas où le gaz séparant les deux sphères est un air humide (respectivement sec) de conductivité électrique égale à $10^{-9}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$ (respectivement $10^{-15}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$). Commenter.
   (b) Déterminer la densité volumique de charges ρ dans l'espace entre les deux sphères. L'équation de conservation de la charge électrique est-elle vérifiée dans le gaz ?
   (c) Calculer les charges $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ portées par les deux armatures à tout instant.
   (d) En déduire la charge totale $Q(t)$ présente dans le problème sur les armatures et dans le gaz à tout instant. Commenter.
   (e) Déterminer $E(r,t)$ pour $r < R_1$.
   (f) Déterminer $E(r,t)$ pour puis $r > R_2$.

4 Chauffage par induction

Un solénoïde « infini » comportant n spires par unité de longueur, de rayon a, d'axe Oz, est parcouru par le courant $i(t) = i_0 cos\omega t$ s'enroulant dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz.

En son centre O, on place un cylindre métallique de même axe, de longueur $L \gg a$, de rayon $b < a$. On note respectivement γ et μ_r la conductivité électrique et la perméabilité relative du cylindre.

1. A l'intérieur du cylindre métallique, justifier pourquoi l'équation de Maxwell-Ampère peut s'écrire sous la même forme qu'en régime stationnaire.
   En déduire sans démonstration l'expression du champ magnétique à l'intérieur du barreau. On précise que dans un matériau magnétique, on doit remplacer la perméabilité relative du vide μ_0 par le produit $\mu_0\mu_r$, où μ_r est la perméabilité relative du milieu, qui est un nombre sans dimension égal à l'unité pour le vide.
2. Montrer, en utilisant les symétries du problème, que le champ électrique s'écrit : $\overrightarrow{E} = E_\theta(r,t)\overrightarrow{u}_\theta$.
3. En utilisant la circulation de $\overrightarrow{E}$ sur un contour que l'on précisera, on calculera l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ pour $r < b$.
4. En déduire les courants volumiques qui prennent naissance dans le cylindre en négligeant le champ magnétique créé par les courants induits.
5. Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre. Expliquer pourquoi on parle alors de *chauffage par induction.*
6. En vous inspirant de la situation envisagée dans cet exercice, proposer une explication du fonctionnement des plaques à induction utilisées comme plaques de cuisson. On s'aidera d'un schéma.
   Sachant que $\mu_r(Al) \simeq 1$ et $\mu_r(Fe) \simeq 10\,000$, on expliquera en outre pourquoi les casseroles en Aluminium ne sont pas compatibles avec les plaques à induction.

Réponses : 3. $\overrightarrow{E} = \dfrac{r\omega\mu_0\mu_r n i_0}{2} sin\omega t\,\overrightarrow{u}_\theta$, 5. $\langle \mathcal{P}_{Lor} \rangle = \dfrac{\pi}{16}(\mu_0\mu_r n i_0)^2\gamma\omega^2 b^4 L$.

5 Étude énergétique d'une bobine

Un solénoïde "très long" comporte une densité linéïque de spires n, enroulées sur un cylindre de rayon a et d'axe $(O, \overrightarrow{e}_z)$. Il est parcouru par un courant i variable au cours du temps. On rappelle ici qu'on peut alors l'assimiler à un solénoïde infini, créant un champ magnétique [1] :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \begin{cases} \mu_0 n i(t) \overrightarrow{e}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \overrightarrow{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

1. On s'intéresse au champ $\overrightarrow{E}$ engendré.
   (a) Sachant que la source de champ électrique est la variation du champ magnétique, en déduire par des considérations d'invariance et de symétrie que $\overrightarrow{E} = E(r,t)\overrightarrow{e}_\theta$.
   (b) En utilisant l'expression intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression de $\overrightarrow{E}$. Commentaires ?
2. Déterminer le vecteur de Poynting ainsi que la puissance rayonnée vers l'extérieur à travers une longueur ℓ du solénoïde.
3. Déterminer l'énergie magnétique U_m stockée dans une longueur ℓ de solénoïde. En déduire l'expression de l'inductance de la bobine.

Réponses : 1. $\overrightarrow{E}(M,t) = \begin{cases} -\frac{r}{2}\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_\theta & \text{si } r < a \\ -\frac{a^2}{2r}\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$, 2. $\mathcal{P}_{ray} = -\pi a^2 \ell \mu_0 n^2 i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, 3. $U_m = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2 \pi a^2 \ell$

1. Dans le cadre de l'ARQS, on admettra qu'on peut négliger le terme dû au courant de déplacement dans l'expression du champ amgnétique.