

Correction - DM n°10 : Électromagnétisme et chimie

1 Température de flamme

1. La réaction est exothermique car $\Delta_r H^0 < 0$. Ceci est cohérent avec le fait qu'il s'agisse d'une flamme.
2. La réaction se produit dans une enceinte adiabatique. La réaction étant exothermique, elle libère de l'énergie thermique qui est utilisée pour chauffer le mélange réactionnel (pas d'échange thermique avec l'extérieur). La température finale sera supérieure à la température initiale.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique au système réactionnel, évoluant de façon isobare :

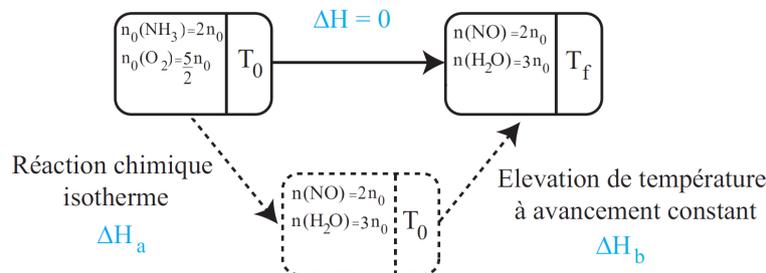
$$\Delta H = Q + W_u = 0$$

où Q est la chaleur reçue par le système et W_u le travail utile (autre que celui des forces de pression). Ici $Q = 0$ et $W_u = 0$ L'enthalpie se conserve au cours de la transformation. Il reste à calculer sa variation en fonction des paramètres du problème.

L'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas de la transformation suivie. On décompose la transformation en deux étapes, comme le montre la figure ci-dessous :

- ★ réaction chimique totale à la température constante $T_0 = 298 \text{ K}$. On note ΔH_a la variation d'enthalpie associée.
- ★ un échauffement des espèces présentes après réaction, de 298 K à la température finale T_f . On note ΔH_b la variation d'enthalpie associée.

Par conséquent $\Delta H = 0 = \Delta H_a + \Delta H_b$.



Faisons un tableau d'avancement sachant que le mélange est stœchiométrique et en considérant la réaction totale

	2 NH_3	+	$\frac{5}{2} \text{ O}_2$	\rightleftharpoons	2 NO	+	$3 \text{ H}_2\text{O}$
état initial	$n_0(\text{NH}_3) = 2n_0$		$n_0(\text{O}_2) = \frac{5}{2}n_0$		0		0
état intermédiaire	$n_0(\text{NH}_3) - 2\xi$		$n_0(\text{O}_2) - \frac{5}{2}\xi$		2ξ		3ξ
état final	0		0		$2\xi_f$		$3\xi_f$

- (a) On suppose que la réaction est totale : $\xi_f = n_0$ et dans l'état final, seuls sont présents les produits.

Pendant la première phase, la variation d'enthalpie n'est due qu'à la réaction chimique, la température et la pression restant fixées. Par ailleurs, l'enthalpie dépend peu de la pression et l'on peut considérer que l'enthalpie s'identifie à l'enthalpie standard, obtenue pour $P = P^0 = 1 \text{ bar}$.

On obtient donc

$$\Delta H_a = \Delta_r H \quad \xi_f \approx \Delta_r H^0 \quad \xi_f$$

À la fin de la première phase, seuls $\text{NO}(\text{g})$ et $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ sont présents. La variation d'enthalpie du système, due à l'échauffement de $T_0 = 298 \text{ K}$ à $T = T_f$ vaut

$$\Delta H_b \approx \Delta H_b^0 = C_p^0 \Delta T = \left[2\xi_f C_p^0(\text{NO}, \text{g}) + 3\xi_f C_p^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g}) \right] (T_f - T_0)$$

La relation $\Delta H_a + \Delta H_b = 0$ devient

$$\Delta_r H^0 \xi_f + \left[2\xi_f C_p^0(\text{NO}, \text{g}) + 3\xi_f C_p^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g}) \right] (T_f - T_0) = 0$$

On en déduit

$$T_f = T_0 - \frac{\Delta_r H^0}{2C_p^0(\text{NO}, \text{g}) + 3C_p^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g})} > T_0 \quad \text{car} \quad \Delta_r H^0 < 0$$

La température finale ne dépend pas de la quantité de matière introduite initialement si le mélange est stœchiométrique. En effet, si la quantité de matière initiale augmente, l'énergie thermique libérée est plus importante mais sert à échauffer une quantité plus importante de matière !

Numériquement, on trouve

$$T_f = 298 - \frac{-452,19 \cdot 10^3}{2 \times 28,4 + 3 \times 36,7} = 3 \cdot 10^3 \text{ K}$$

L'échauffement de près de 3000°C est extrêmement important.

- (b) **On suppose que le taux d'avancement final de la réaction est de 90%** : $\xi_f = 0.9 * n_0$ et dans l'état final, et il reste encore des réactifs en fin de réaction.

En fin de réaction, les quantités de matière sont les suivantes :

- $n(\text{NH}_3) = 2n_0 - 2\xi_f = 0.2n_0$
- $n(\text{O}_2) = \frac{5}{2}(n_0 - \xi_f) = 0.25n_0$
- $n(\text{NO}) = 2\xi_f = 1.8n_0$
- $n(\text{H}_2\text{O}) = 3\xi_f = 2.7n_0$

La relation $\Delta H_a + \Delta H_b = 0$ devient maintenant

$$\Delta_r H^0 0.9n_0 + \left[1.8n_0 C_p^0(\text{NO}, \text{g}) + 2.7n_0 C_p^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g}) + 0.2n_0 C_p^0(\text{NH}_3, \text{g}) + 0.25n_0 C_p^0(\text{O}_2, \text{g}) \right] (T_f - T_0) = 0$$

Numériquement, on trouve maintenant

$$T_f = 298 - 0.9 \times \frac{-452,19 \cdot 10^3}{1.8 \times 28,4 + 2.7 \times 36,7 + 0.2 \times 35,1 + 0.25 \times 29,4} = 2771 \text{ K}$$

L'échauffement reste du même ordre de grandeur, mais il est cohérent de trouver une température plus faible puisque la chaleur libérée est plus faible.

Attention, on aurait pu également s'attendre à un effet allant dans l'autre sens : la quantité de gaz produite est plus faible ($4.95n_0$ dans la question 2 contre $5n_0$ pour la question), ce qui signifie que la température devrait être plus grande pour une même chaleur dégagée. Ce second effet est moins important car la quantité de gaz ne varie pas assez.

3. La température d'une flamme ne dépend pas que de sa température, mais également du gaz ou de la poudre qui subit la combustion.

2 Résolution numérique de l'équation de Poisson

Pour la correction, on se reportera au Jupyter Notebook dont le référence est **3838-1064495** dans Capytale.

3 Lévitiation d'un aimant au dessus d'un supraconducteur

$$I \ 1^{\circ}) \quad \delta = 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 217 \text{ \AA}$$

Afin de déterminer la dimension de δ , il faut tout d'abord déterminer celle de μ_0 , qui peut être obtenue à partir de l'expression du champ créé par un solénoïde infini :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{v}_z \Rightarrow [\mu_0] = \frac{[B] L}{[i]} = [B] L I^{-1}$$

* la force de Lorentz pour déterminer $[B]$:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q] L T^{-1}} = \frac{M L T^{-2}}{I T \cdot L T^{-1}} = M T^{-2} I^{-1}$$

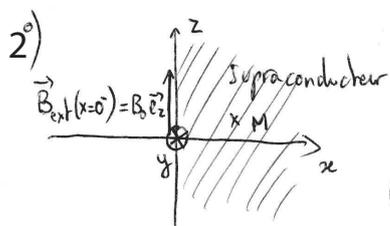
$$\Rightarrow [\mu_0] = M L T^{-2} I^{-2}$$

$$\text{Finalement, on en déduit: } [\delta] = \left(\frac{M}{L^{-3} [q]^2 [\mu_0]} \right)^{1/2} = \left(\frac{M}{L^{-3} I^2 M L T^{-2} I^{-2}} \right)^{1/2} = L$$

Donc δ est homogène à une longueur et s'exprime en m.

La valeur calculée précédemment (217 Å) est à la fois très faible à l'échelle macroscopique et relativement grande à l'échelle atomique ($L \approx 1 \text{ \AA}$).

Tant qu'on s'intéresse à des phénomènes ou des propriétés macroscopiques, on pourra considérer que $\delta \approx 0$.



La source du champ à l'intérieur du supraconducteur ainsi que le milieu sont invariants par translation selon y et $z \Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(x)$

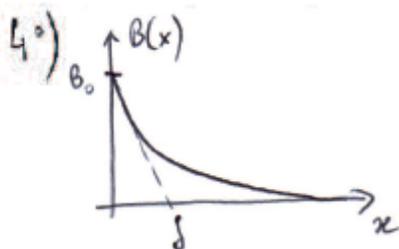
$$(1) \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{a} e^{-\frac{x}{\delta}} + \vec{b} e^{\frac{x}{\delta}}$$

où \vec{a} et \vec{b} sont des constantes d'intégration.
 Le champ \vec{B} ne peut diverger dans le supraconducteur pour $x \rightarrow \infty$, donc $\vec{b} = \vec{0}$, et de plus $\vec{B}(x=0^+) = \vec{B}(x=0^-) = B_0 \vec{e}_z = \vec{a}$.

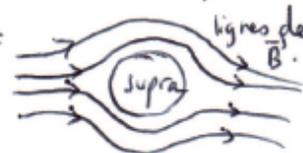
on se place au niveau microscopique et il ne peut donc y avoir de courant surfacique (ces derniers sont une modélisation macroscopique de courants localisés sur une faible épaisseur). Comme $\vec{j}_s = \vec{0}$, \vec{B} est donc continu à l'interface du supraconducteur.

Finalement: $\vec{B} = B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \vec{e}_z$ Le champ reste localisé en surface (cf effet de peau pour \vec{E} dans un conducteur)

3°) Toujours en régime stationnaire, (MA) $\Rightarrow \vec{j} = \frac{\text{Rot } \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \vec{j} = -\frac{\partial B_0 e^{-\frac{x}{\delta}}}{\partial x} \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \vec{e}_y$ $\textcircled{*}$ on voit que δ est ici l'analogie de l'épaisseur de peau.



4°) Le champ \vec{B} tend vers $\vec{0}$ sur une épaisseur de quelques δ . Or $\delta \approx 20 \text{ nm}$, et on peut donc dire qu'à l'échelle macroscopique, le champ magnétique ne pénètre pas à l'intérieur du supraconducteur. C'est l'"effet Meissner". On dit aussi qu'un supraconducteur repousse les lignes de champ \vec{B} :



5°) La force élémentaire sur un élément de courant en présence d'un champ magnétique correspond à la force de Laplace $d\vec{F} = id\vec{l} \wedge \vec{B}$. Dans le cas d'un courant volumique, cette force magnétique élémentaire s'écrit: $d\vec{F} = \vec{j} dC \wedge \vec{B}$.

Par unité de surface $dS = dy dz$, on obtient:

↑
coordonnées de la surface du supraconducteur

$$d\vec{F}_S = \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{j} \wedge \vec{B} dx \Rightarrow \vec{F}_S = \int d\vec{F}_S = \int_0^{\infty} \vec{j} \wedge \vec{B} dx$$

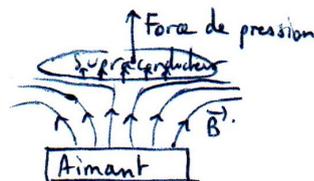
$$\vec{F}_S = \int_0^{\infty} \left(\frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \vec{e}_y \right) \wedge \left(B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \vec{e}_z \right) dx = \frac{B_0^2}{\mu_0 \delta} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx \vec{e}_x = \frac{B_0^2}{\mu_0 \delta} \left[-\frac{\delta}{2} e^{-\frac{2x}{\delta}} \right]_0^{\infty} \vec{e}_x$$

$\Rightarrow \vec{F}_S = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \vec{e}_x$ La force magnétique par unité de surface qui s'exerce sur le supraconducteur est dirigée

suivant \vec{e}_x . C'est donc une force pressante qui correspond à

une pression $P_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$ Rq: c'est aussi une énergie volumique $U_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

La force de pression est dirigée vers le supraconducteur. On peut donc imaginer faire léviter un supraconducteur au dessus d'un aimant dans la configuration ci-contre. C'est ce qui est présenté dans la suite du problème avec une autre approche.



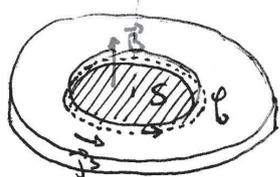
Ordre de grandeur :

$$\|\vec{F}\| = PS = \frac{B_0^2 S}{2\mu_0} = \frac{(0,1)^2 \times \pi (5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 30 \text{ N}$$

↳ compense le poids mg.

\Rightarrow cela permet de faire léviter un objet de 3 kg environ, ce qui est donc très facile à réaliser pour une petite pastille de supraconducteur.

II 1°) Intégrons l'équation de (MF) sur la surface S s'appuyant sur un contour \mathcal{C} s'appuyant sur l'intérieur du supraconducteur.



↳ courants surfaciques générant \vec{B} .

$$\iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt}$$

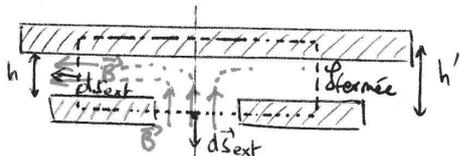
$$= \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$$

↳ \mathcal{C} est tangent au bord du supraconducteur, or $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$ et la composante tangentielle de \vec{E} est nécessairement continue, donc la composante intégrée sur \mathcal{C} est nulle en tout point du contour.

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\phi = \text{cste}}$$

2°) a) Utilisons le fait que \vec{B} est à flux conservatif : $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_{\mathcal{S}_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$.

On choisit comme surface fermée le cylindre dessiné sur la figure ci-dessous (hauteur $h' > h$ et rayon $r \in [a; b]$):



$$\oint_{\mathcal{S}_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\phi + 2\pi r h B(r) = 0$$

$\vec{B} = \vec{0}$ à l'intérieur du supraconducteur

$$\Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\phi}{2\pi r h}} \quad \text{Il est logique de constater que } B \text{ décroît lorsque } r \text{ augmente, par conservation du flux.}$$

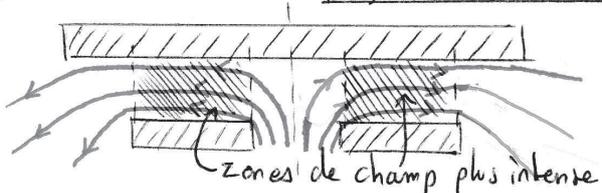
b) D'après les questions précédentes, le champ magnétique exerce sur le supraconducteur supérieur une pression qui dépend de r :

$$P_m(r) = \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{\phi^2}{8\pi^2 h^2 \mu_0 r^2} \quad \text{La force globale s'exerçant sur le}$$

supraconducteur supérieur correspond donc à :

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\phi^2}{4\pi h^2 \mu_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr \vec{e}_z = \boxed{\frac{\phi^2}{4\pi \mu_0 h^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \vec{e}_z}$$

on se limite à la pression exercée sur la couronne tq $r \in [a; b]$ à cause de la forme des lignes de champ de la figure ci-contre.



La pression chute rapidement dès que les lignes de champ s'écartent, c'est à dire que \vec{B} diminue, d'autant plus que $P_m \propto B^2$. Ceci justifie l'approximation de ne prendre en compte la force de pression qu'entre $r=a$ et $r=b$.

3°) A l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\Phi^2}{4\pi\mu_0 h_0^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = mg$

$\Rightarrow \boxed{h_0 = \sqrt{\frac{\Phi^2 \ln(b/a)}{4\pi\mu_0 mg}}}$

A.N. $h_0 = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm.}$

La lévitation est donc clairement visible.

4°) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à l'aimant hors équilibre: $m\ddot{h} = \frac{\Phi^2 \ln(b/a)}{4\pi\mu_0 h^2} - mg$

or on perturbe peu l'aimant autour de sa position d'équilibre, de sorte que $h = h_0 + \epsilon \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{(h_0 + \epsilon)^2} = \frac{1}{h_0^2} \frac{1}{(1 + \frac{\epsilon}{h_0})^2} \approx \frac{1}{h_0^2} (1 - 2\frac{\epsilon}{h_0})$

Enfinement, sachant que $\epsilon = h - h_0$:

$m\ddot{h} = -\frac{\Phi^2 \ln(b/a)}{2\pi\mu_0 h_0^3} (h - h_0) + \underbrace{\frac{\Phi^2 \ln(b/a)}{4\pi\mu_0 h_0^2} - mg}_{=0 \text{ d'après la définition de } h_0} \Rightarrow \ddot{h} + \frac{\Phi^2 \ln(b/a)}{2\pi\mu_0 h_0^2 m} (h - h_0) = 0$

C'est une équation harmonique

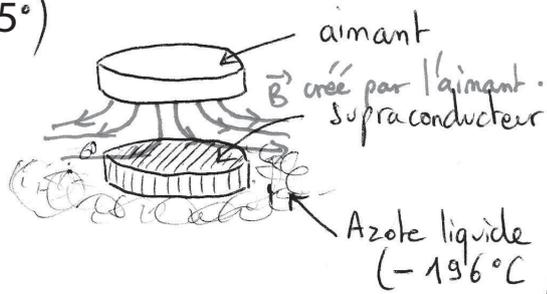
de solution: $h(t) = h_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\Phi^2 \ln(b/a)}{2\pi\mu_0 h_0^2 m}}$

soit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{h_0}}}$

A.N.: $f = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 7 \text{ Hz.}$

↳ c'est bien une fréquence observable à l'œil nu.

5°)



La source de \vec{B} est ici l'aimant situé au-dessus. Ce champ magnétique exerce une pression sur le supra. situé au-dessous, et donc d'après le principe de l'action et de la réaction, cela permet à l'aimant

de léviter. L'azote liquide permet à la pastille du dessous de rester dans l'état supraconducteur. Les bulles, correspondent à l'ébullition de l'azote au contact de l'air chaud de l'atmosphère.