Introduction à la physique des ondes

Table des matières

Introduction

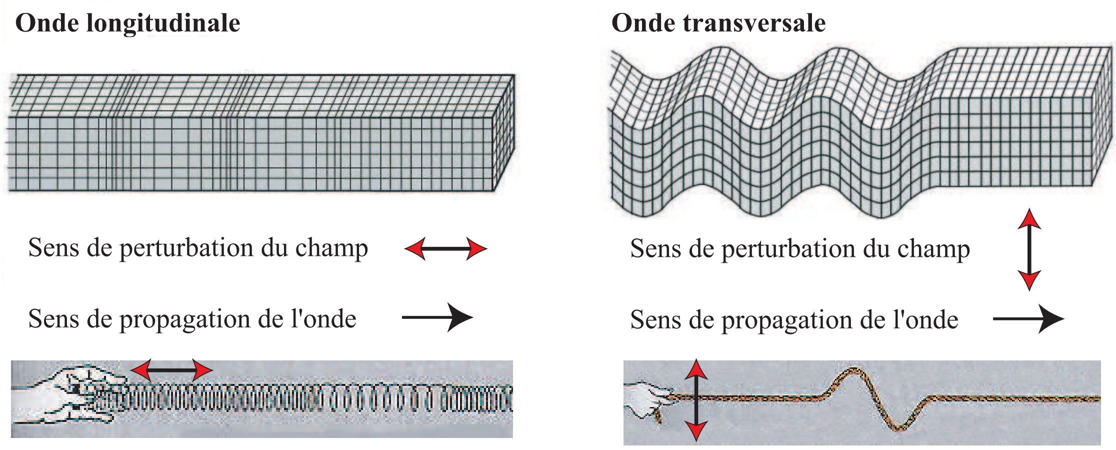
Nous allons maintenant étudier les propriétés des **ondes**, qui correspondent à un champ scalaire ou vectoriel dont les variations dépendent à la fois de l'espace et du temps. De tels champs permettent notamment de modéliser la propagation de perturbations de proche en proche. On rencontre des phénomènes ondulatoires dans de nombreux domaines de la physique. Nous allons nous intéresser à deux grands types d'ondes :

- les **ondes longitudinales** pour lesquelles la perturbation du champ se fait suivant la direction de propagation de l'onde. C'est le cas par exemple :
  - ▷ des ondes de compression d'un ressort suivant son axe (*ondes mécaniques*)
  - ▷ des ondes sonores dans les fluides et les solides (*ondes mécaniques*)
  - ▷ des ondes sismiques de type P (*ondes mécaniques*)
- les **ondes transversales (ou transverses)** pour lesquelles la perturbation du champ se fait suivant une direction orthogonale à la direction de propagation de l'onde. C'est le cas par exemple :
  - ▷ des ondes sur une corde (*ondes mécaniques*)
  - ▷ des ondes à la surface de l'eau (*ondes mécaniques*)
  - ▷ de la ola dans un stade (*ondes mécaniques*)
  - ▷ des ondes lumineuses, radio, micro-ondes... (*ondes électromagnétiques*)
  - ▷ *ondes gravitationnelles* (confirmation expérimentale en 2016)

Les seules ondes figurant explicitement au programme de MP sont les ondes électromagnétiques [1]. Cependant, on peut montrer que tous les phénomènes de propagation unidimensionnels non dispersifs cités ci-dessus sont régis par une même équation d'onde appelée *équation de D'Alembert.* Ainsi, avant de restreindre notre étude aux ondes électromagnétiques dans les chapitres suivants, nous rappellerons le cas des ondes mécaniques sur une corde et des ondes sonores, qui permet d'avoir une approche plus intuitive des phénomènes ondulatoires.

Nous détaillerons ensuite les deux familles de solutions de l'équation de D'Alembert : les *ondes planes progressives* et les *ondes stationnaires.*

1. On notera qu'en plus des ondes longitudinales et transverses, il existe aussi des ondes de cisaillement (certaines ondes sismiques par exemple).



Expérience : Mise en évidence des ondes transverses et longitudinales sur un ressort et des ondes longitudinales avec une corde. On notera que la vitesse à laquelle se propage l'onde ne correspond absolument pas à la vitesse des particules constituant le ressort ou la corde[2].

I Equations de D'Alembert

I.1 Equations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ vérifie une équation de D'Alembert, avec une célérité c définie par :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie la même équation de D'Alembert, toujours avec une célérité c définie par :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

I.2 Équation de propagation des ondes sur une corde

On souhaite maintenant étudier la propagation d'une **onde transverse** le long d'une corde. L'onde se propage selon l'axe x, et les déplacements de la corde se font selon y.

Ce type de système permet de modéliser notamment le fonctionnement des instruments à corde (guitare, violon, piano...), dont les cordes ont une masse linéique μ et sont tendues avec une tension T_0

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}} \quad \textbf{équation de D'Alembert}$$

2. On comprend ainsi pourquoi le courant électrique peut par exemple se propager pratiquement à la vitesse de la lumière sans que les électrons ne se déplacent à cette vitesse dans les fils électriques.

I.3 Équation de propagation des ondes sonores

a) Dans les solides

On peut modéliser un solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, où $u(x,t)$ représente l'écart d'un atome par rapport à sa position d'équilibre, selon l'axe x, et vérifie l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0} \qquad \text{avec} \quad c \simeq 5000\ m.s^{-1}$$

Remarque : C'est le fait que la vitesse d'une onde dans un solide soit très rapide, et surtout qu'elle soit très peu atténuée qui permet de justifier l'image bien connue dans les westerns d'une personne qui colle son oreille sur un rail pour savoir si un train arrive.

b) Dans les fluides

On peut montrer que la propagation de petites perturbations dans un fluide peuvent être décrites par une équation de D'Alembert vérifiée par la surpression p, la vitesse $\overrightarrow{v}$ des particules de fluide et la variation de masse volumique μ, avec une célérité :

$$c_{air} \simeq 340\ m.s^{-1} \qquad \text{et} \qquad c_{eau} \simeq 1500\ m.s^{-1}$$

Transition : Nous avons vu que l'équation de D'Alembert permettait de décrire la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ainsi que celle des ondes sur une corde et des ondes sonores.

Intéressons nous tout d'abord aux solutions de l'équation de D'Alembert à une seule dimension.

II Solutions unidimensionnelles de l'équations de D'Alembert

II.1 Solutions en ondes planes progressives

Supposons que la propagation d'une grandeur unidimensionnelle $a(x,t)$ vérifie l'équation undimensionnelle de D'Alembert, c'est à dire que :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

a) Recherche de la solution générale

L'équation de D'Alembert couple les variables temporelle et spatiale. On ne sait pas la résoudre telle quelle. Afin de découpler cette équation, effectuons le changement de variable suivant :

$$\boxed{a(x,t) \to a(u,v) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}}$$

On peut alors montrer que l'équation de D'Alembert se réduit à [3] :

$$4\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right) = 0$$

3. On utilise les règles de dérivation de fonctions à plusieurs variables et le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial a(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial a}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial a(u,v)}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-c} + \frac{\partial a}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c} = -c\frac{\partial a}{\partial u} + c\frac{\partial a}{\partial v}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{\partial^2 a(u,v)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 a}{\partial v^2}$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial^2 a(u,v)}{\partial t^2} = -c\frac{\partial}{\partial u}\left[-c\frac{\partial a}{\partial u} + c\frac{\partial a}{\partial v}\right] + c\frac{\partial}{\partial v}\left[-c\frac{\partial a}{\partial u} + c\frac{\partial a}{\partial v}\right] = c^2\left[\frac{\partial^2 a}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 a}{\partial v^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial a}{\partial v}=h(v) \qquad \Longrightarrow \qquad a(u,v)=f(u)+g(v)$$

où $h(v)$ est une fonction de la seule variable v, de primitive $g(v)$, et $f(u)$ une fonction de la seule variable u.

On obtient finalement que toutes les solutions s'écrivent sous la forme suivante [4] :

$$\boxed{a(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)}$$

Remarque

- *On vérifie bien de manière immédiate que cette expression est solution de l'équation de D'Alembert.*
- *l'équation de D'Alembert étant **linéaire**, toute solution pourra s'écrire comme une superposition de fonctions des variables $x+ct$ et $x-ct$.*
- *le changement de variable nous a permis de découpler mathématiquement l'équation différentielle, mais il n'y a pas de découplage physique car les variables temporelle t et spatiale x restent liées.*
- *la solution obtenue est unique car on peut montrer que l'équation de D'Alembert ainsi que la donnée des conditions initiales $u(x,t=0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t=0)$ constituent un problème de Cauchy.*

b) Interprétation physique

α) Ondes planes

Les champs $f(x-ct)$ et $g(x+ct)$ représentent des **ondes planes** car ils prennent des valeurs identiques dans des plans $x = cste$ à un instant t fixé :

☛ ①

Remarque

Contre exemple : $h(y)f(x-ct)$ n'est pas une onde plane, car à t fixé, il faut fixer x et y, on obtient donc l'équation d'une droite et pas d'un plan.

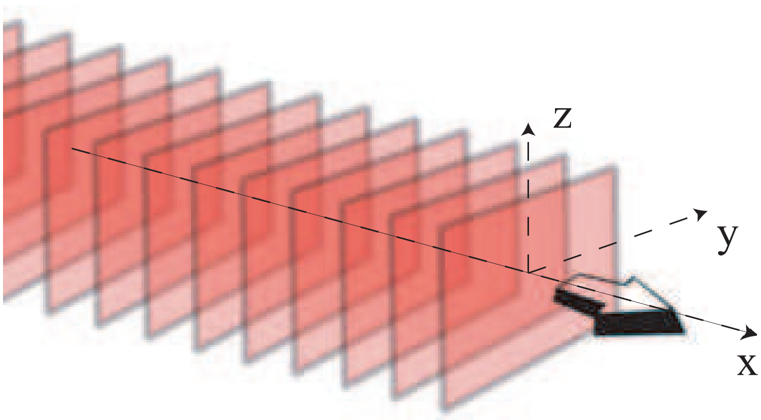


FIGURE 1 – *Représentation d'une onde plane.*

finalement $$\frac{\partial^2 a(u,v)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a(u,v)}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v}$$

4. On aurait pu montrer exactement le même résultat en partant de la seconde équation différentielle $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)=0$. On admettra finalement qu'il y a unicité des solutions ce problème de Cauchy.

β) **Solution en $f(x-ct)$**

☛ ②

γ) **Solution en $g(x+ct)$**

Considérons une solution de l'équation de d'Alembert de la forme $a(x,t) = g(x+ct)$. De même que précédemment, on montre qu'il s'agit d'une **onde plane progressive dans le sens des x décroissants** (ou d'onde plane régressive), notée **OPP(-)**.

δ) **Réversibilité**

Le fait que les ondes se déplacent en bloc sans déformation est caractéristique d'un phénomène **réversible**. En effet, en changeant t en $-t$ dans l'équation de D'Alembert, on retrouve exactement la même équation, ce qui signifie qu'il est impossible de savoir si un film représentant une onde est passé à l'endroit ou à l'envers. Il n'en est pas de même dans le cas d'un phénomène irréversible (diffusion de permanganate dans l'eau par exemple).

ϵ) **Caractère non physique des ondes planes**

Chaque onde plane a un caractère non physique ; en effet, l'invariance par translation selon y et z imposerait que la source de cette onde soit elle-même invariante par les mêmes translations, c'est à dire de surface infinie. De plus, elles nécessiteraient d'avoir été créées depuis l'origine des temps et devraient se propager jusqu'à la fin des temps.

Afin de décrire une onde réelle, nous verrons qu'il faut sommer une infinité d'ondes planes.

c) Solutions de l'équation de D'Alembert

L'équation de D'Alembert étant linéaire, le principe de superposition s'applique, et donc :

Propriété

Toute solution de l'équation de D'Alembert est une superposition linéaire d'OPP(+) et d'OPP(-) :

$$a(x,t) = \sum_i f_i(x-ct) + \sum_i g_i(x+ct)$$

Transition : Comme nous l'avons déjà vu, toute fonction peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales du temps grâce à la transformée de Fourier.

Ainsi, plutôt que de raisonner sur des fonction $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$, on pourra, sans perdre aucune généralité, se limiter à l'étude de fonctions élémentaires appelées *ondes planes progressives harmoniques* (OPPH) ou *monochromatiques*.

d) Cas de l'onde plane progressive harmonique (OPPH)

Définition

On appelle *ondes planes progressives harmoniques* (notées OPPH) ou *monochromatiques* les ondes de la forme :

$$a(x,t) = A\cos\varphi(x,t) = \begin{cases} A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right)+\varphi_0\right] = f(x-ct) & \textbf{OPPH(+)} \\ A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)+\varphi_0\right] = g(x+ct) & \textbf{OPPH(-)} \end{cases}$$

où $\varphi(x,t)$ est appelée *phase de l'onde*, et où l'amplitude A et φ_0 [a] sont indépendantes des variables x et t.

a. On a choisi arbitrairement ici un signe "-" mais on aurait pu prendre l'autre convention. On appelle également parfois abusivement cette grandeur la "phase".

Ces fonctions, toujours non physiques prises seules, ont une double périodicité temporelle et spatiale :

$\boxed{T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}}$ *période temporelle* et $\boxed{\lambda = cT = \dfrac{2\pi c}{\omega}}$ *longueur d'onde ou période spatiale*

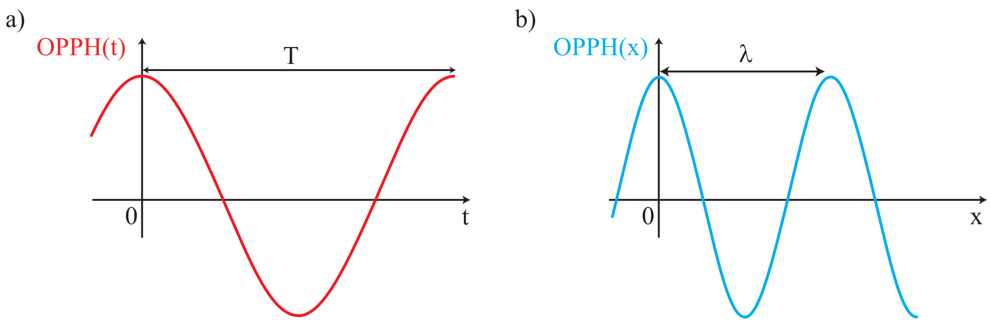


FIGURE 2 – *Onde plane progressive harmonique : a) en représentation temporelle et b) en représentation spatiale.*

Afin de caractériser une telle onde, on définit également le *vecteur d'onde* $\overrightarrow{k}$ orienté dans le sens de propagation de l'onde [5], et dont la norme est toujours définie par :

$\boxed{k = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$ **norme du vecteur d'onde** ou **nombre d'onde**

Dans le cas d'une onde plane progressive harmonique, on obtient [6] :

$\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$ **norme du vecteur d'onde pour une OPPH (air ou vide)**

5. Ici, $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}_x$ pour une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des x croissants, et $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{u}_x$ pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants. On notera qu'on aura toujours $k > 0$ d'après sa définition, même si le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ peut changer de sens.

6. On notera que $k = \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$. Attention, ces expressions ne sont plus valables dans le cas d'un milieu dispersif pour lequel le vecteur d'onde est complexe, comme évoqué plus bas.

Propriété

Une onde plane progressive harmonique peut donc s'écrire dans le cas général :

$\boxed{a(x,t) = Acos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)}$ **OPPH(+)** ou $\boxed{a(x,t) = Acos\left(\omega t + kx + \varphi_0\right)}$ **OPPH(-)**

Remarque

Vérifions que les OPPH(+) et OPPH(-) sont bien solutions de l'équation de D'Alembert :

☛ ③

Remarque

L'équation de D'Alembert et la majeure partie des équations que l'on rencontrera étant linéaire, on pourra utiliser la notation complexe[a] pour les OPPH :

$$a(x,t) = Re\left[\underline{a}(x,t)\right] \qquad \text{avec} \qquad \underline{a}(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{A}e^{i(\omega t - kx)} \qquad \text{et} \qquad \underline{A} = Ae^{i\varphi}$$

Par exemple, on peut vérifier simplement que les OPPH sont bien solutions de l'équation de D'Alembert[b] :

☛ ④

a. Attention, la notation $e^{i(\omega t - kx+\varphi)}$ n'est pas universelle, et on aurait tout aussi bien pu choisir la notation $e^{-i(\omega t - kx+\varphi)}$.

b. Nous le reverrons par la suite dans le chapitre correspondant, mais la relation obtenue ici entre k et ω est appelée *relation de dispersion* :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Définition

On appelle surfaces équiphases l'ensemble des points M pour lesquels la phase est constante, c'est à dire tels que :

$$\varphi(x,t) = \omega t - kx + \varphi_0 = cste \qquad \textbf{équation des surfaces équiphases}$$

Lorsque l'amplitude est constante, on les appelle alors surfaces d'onde ou fronts d'onde.

A un instant donné t, ces surfaces d'ondes sont des plans dont l'abscisse x vérifie :

☛ ⑤

Les surfaces d'onde se déplacent donc à la vitesse suivante, appelée **vitesse de phase**[7] :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$$

7. Nous verrons dans le cours sur la dispersion que la vitesse de phase est définie plus généralement par la relation :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|\mathcal{R}e(\underline{k})|}$$

Pour une OPPH(+), on en déduit donc que :

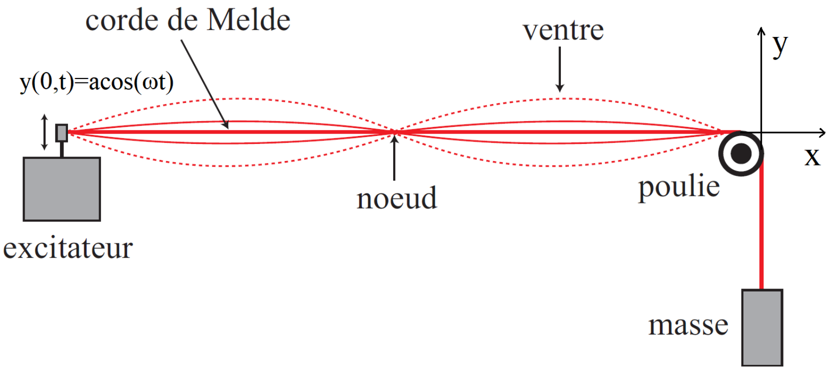
$$v_\varphi = c$$

La vitesse de phase est indépendante de la pulsation ω (c'est le cas dans l'air et dans le vide), et on qualifie la propagation de **non dispersive**.

II.2 Solutions en ondes stationnaires de l'équation de D'Alembert

a) Expérience de la corde de Melde

L'expérience de la corde de Melde est décrite dans la figure ci-dessous :



b) Expression des solutions en ondes stationnaires

Cherchons une solution permettant de décrire les oscillations constatées lors de l'expérience précédente. Les solutions en ondes planes progressives seules ne conviennent pas puisque l'onde ne se propage pas.

On constate qu'à une abscisse x donnée, l'amplitude maximale d'oscillation est fixée et ne dépend pas du temps. Il n'y a pas de couplage entre les variables x et t de sorte que l'onde ne se propage pas. Recherchons donc les solutions particulières de l'équation de D'Alembert en séparant les variables spatiale et temporelle [8] :

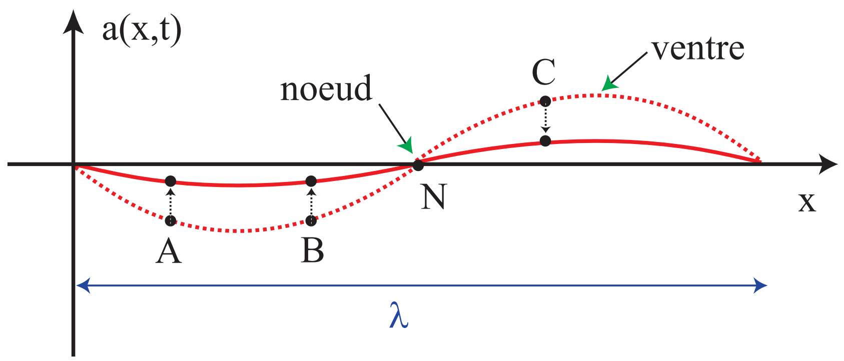
☛ ⑥

8. On notera que cette méthode est une méthode générale de recherche de solutions lors de la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Remarque

> *Ce type d'onde est appelé* ***onde plane stationnaire harmonique****, notée* ***OPSH*** *et se distingue nettement des ondes planes progressives car les dépendances spatiales et temporelles interviennent ici séparément.*
> *La dépendance spatiale intervient dans l'amplitude uniquement, et non plus dans la phase, de sorte que tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase. Dans la figure ci-dessous, A et B vibrent en phase alors que A et C vibrent en opposition de phase. Le point N a une amplitude nulle à tout instant ; il correspond à un* ***nœud*** *de vibration.*

On retrouve ainsi l'allure précédente obtenue expérimentalement.



Nous avons trouvé ici une seconde famille de solutions de l'équation de D'Alembert, ce qui pourrait sembler en contradiction avec la résolution précédente, sensée nous avoir permis d'obtenir toutes les solutions de cette équation.

En fait, il n'en est rien car on peut exprimer les ondes stationnaires comme une superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans des directions opposées [9] :

☛ ⑦

Video : Propagation de deux OPPH en sens inverse mettant en évidence que leur somme est une onde stationnaire.

Remarque

> *On choisira donc l'une ou l'autre des décompositions selon le problème étudié. Quand le milieu est illimité (au moins d'un côté), on privilégiera toujours la description en OPPH. Quand il est limité, on privilégiera plutôt les ondes stationnaires.*

Transition : Afin de déterminer complètement les solutions, c'est à dire de déterminer les constantes A, ϕ et ψ, il nous reste encore à préciser les conditions initiales et les conditions limites. C'est ce que nous verrons dans les chapitres suivants lors de la réflexion au niveau d'un métal parfait et dans les guides d'onde. Nous reviendrons également sur l'exemple de la corde de Melde.

9. La réciproque est évidemment également vraie.

c) Modes propres sur une corde de Melde libre

Utilisons maintenant les conditions aux limites imposées en $x = 0$ et $x = L$ aux extrémités de la corde juste après avoir arrêté l'excitation sinusoïdale [10] (régime libre) :

☛ ⑧

II.3 Solutions en ondes sphériques progressives

Lorsque le problème est unidimensionnel et à symétrie sphérique, le maillon élémentaire permettant de décomposer toute onde correspond non plus à une onde plane, mais à une onde sphérique [11] :

$$s(r,t) = \frac{s_0}{r} cos(kr - \omega t + \varphi)$$

On voit que $r = cste \quad \Rightarrow$ à t fixé, $s = cste$, ce qui justifie le qualificatif d'onde sphérique. Nous montrerons en optique que le facteur $\frac{1}{r}$ provient de la conservation de l'énergie.

Conclusion

Nous avons vu que des phénomènes de propagation simples pouvaient se ramener à l'étude de l'équation de D'Alembert, et que les solutions sont soit des OPPH, soit des ondes planes stationnaires, suivant les conditions aux limites.

Nous poursuivrons l'étude des phénomènes ondulatoires avec l'étude des ondes électromagnétiques, moins intuitives car les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ qui se propagent résultent des interactions à distance et non plus de contact.

Notons que tous les phénomènes de propagation ne sont pas régis par des équations de D'Alembert :

- l'équation décrivant les modèles précédents peut être modifiée simplement pour tenir compte de l'amortissement :
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial a}{\partial t}$$
On notera que dans ce cas, l'équation n'est plus invariante par changement de t en $-t$: il n'y a plus irréversibilité, à cause de la dissipation.
- l'équation de la chaleur :
$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
- l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, qui est à valeurs complexes :
$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

10. On notera que lorsque l'excitation est toujours en marche, la condition imposée en $x = 0$ est sinusoïdale et n'est plus strictement nulle (régime forcé). Nous reviendrons sur ce cas dans les chapitres suivants, et nous montrerons que les modes d'oscillations s'identifient aux modes propres déterminés ici en régime libre.
11. On notera que c'est $s \times r$ qui vérifie une équation de D'Alembert.