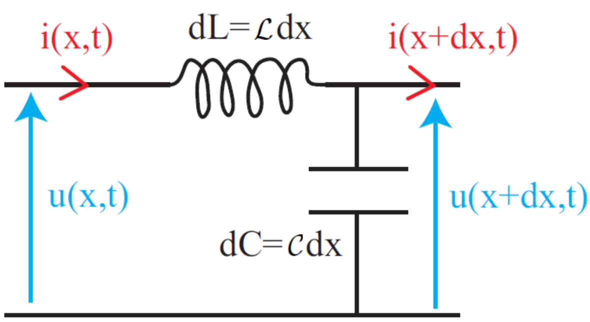
TD n°11 - Introduction à la physique des ondes

1 Ligne bifilaire - Modélisation d'un câble coaxial

Une tranche infinitésimale d'épaisseur dx d'une ligne électrique bifilaire (ou d'un câble coaxial) peut être modélisée par le schéma de la figure ci-dessous, comportant une inductance élémentaire $dL = \mathcal{L}dx$ et une capacité élémentaire $dC = \mathcal{C}dx$. On traite ce circuit de faible dimension dx dans le cadre de l'ARQS. Cette approximation est valable à l'échelle d'une tranche de ligne d'épaisseur dx car on peut négliger les phénomènes de propagation à cette échelle. En effet, lorsqu'on fait tendre dx vers zéro, $dx \ll \lambda = cT$. En revanche, à l'échelle de la ligne complète, les phénomènes de propagation sont essentiels.



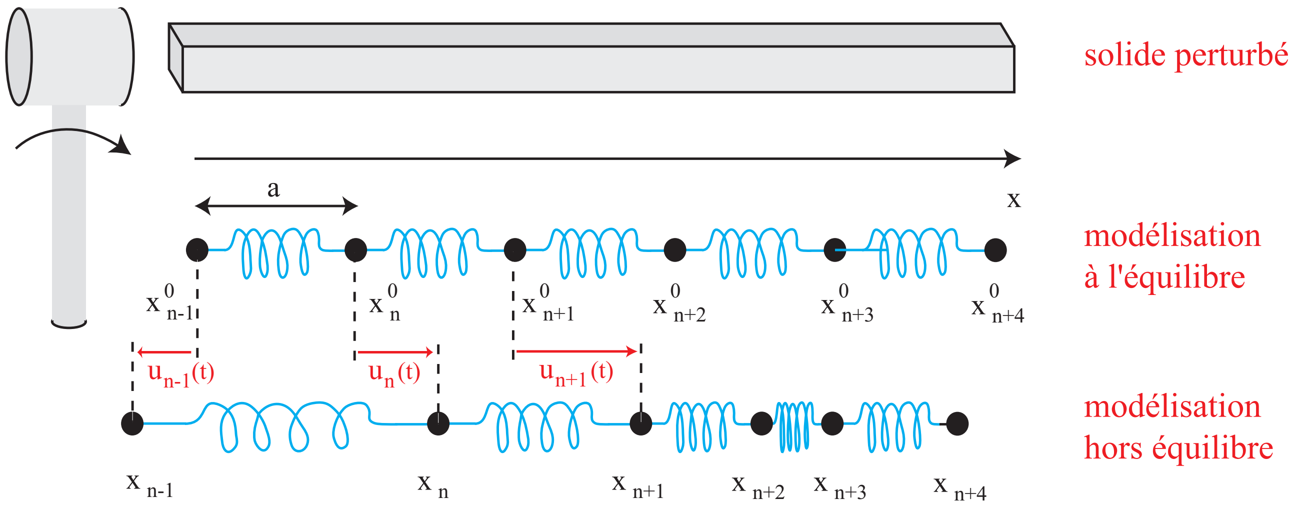
1. Établir deux équations aux dérivées partielles couplées reliant l'intensité $i(x.t)$ et la tension $u(x,t)$. En déduire que ces grandeurs sont solutions d'une équation de d'Alembert unidimensionnelle et exprimer la célérité c de l'onde correspondante.
2. Dans le cas d'une onde plane progressive harmonique se propageant selon $\overrightarrow{u}_x$, montrer que le rapport $\dfrac{u(x,t)}{i(x,t)}$ est une constante liée aux caractéristiques de la ligne.
   Que vaut le même rapport pour une onde progressive se propageant selon $-\overrightarrow{u}_x$?
   On ferme en $x = 0$ une ligne semi-infinie, s'étendant de $x = -\infty$ à $x = 0$ sur une résistance R ; on néglige les phénomènes de propagation dans R. À quelle condition une onde progressive peut-elle se propager selon $\overrightarrow{u}_x$ sur cette ligne semi-infinie ?
3. Dans le cas où la ligne semi-infinie est fermée en $x = 0$ par un court-circuit et où une onde progressive harmonique incidente $u_i(x,t) = Acos(\omega t - kx)$ est émise en $x = -\infty$, déterminer la tension $u(x,t)$ et le courant $i(x,t)$ en tout point de la ligne.

Réponses : 1. $-\dfrac{\partial i}{\partial x} = \mathcal{C}\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $-\dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{L}\dfrac{\partial i}{\partial t}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$, 2. $\dfrac{u(x,t)}{i(x,t)} = \pm\sqrt{\dfrac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$, 3. $u(x,t) = 2Asin(kx)sin(\omega t)$ et $i(x,t) = 2A\sqrt{\dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{L}}}cos(kx)cos(\omega t)$.

2 Ondes sonores dans les solides

On cherche à étudier la propagation d'une onde de compression unidirectionnelle dans un solide. Lorsque la perturbation créée par cette onde est faible, on peut modéliser le solide par une chaîne linéaire infinie d'atomes assimilés à des points matériels de masse m, reliés par des ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, et susceptibles de se déplacer sans frottement le long de l'axe Ox.

1. Les ondes sont-elles longitudinales ou transverses ?
2. On repère par x_n la position de l'atome n sur l'axe x. En l'absence de perturbation, les atomes sont situés au niveau des nœuds du réseau, de sorte que $x_n^0 = na$.



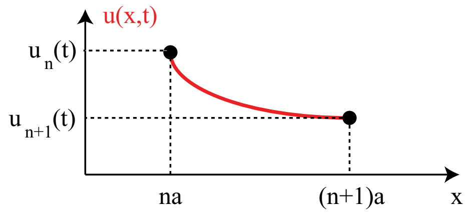
   (a) Donner l'expression de $x_n(t)$ en fonction de $u_n(t)$, l'écart algébrique à la position d'équilibre.

   (b) Écrire l'équation du mouvement de l'atome n en fonction de $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$.

3. Les ondes sonores dans les solides ont typiquement des longueurs d'onde λ de quelques mètres, donc beaucoup plus grandes que la taille caractéristique du réseau, c'est à dire la maille a. A l'échelle de la longueur d'onde, le milieu n'apparaît donc plus discontinu, et on peut donc remplacer les fonctions $u_n(t)$ par une seule fonction continue de deux variables $u(x,t)$ telle que :

$$\begin{cases} u(na,t) = u_n(t) \\ u((n+1)a,t) = u_{n+1}(t) \end{cases}$$

Approximation des milieux continus



   (a) En utilisant l'approximation des milieux continus, montrer que la variable $u(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert dont on précisera la célérité.

   (b) Sachant que le paramètre de maille est de l'ordre de $a = 10^{-10}m$, la masse d'un atome est de l'ordre de $m = 10^{-26}kg$ et l'énergie de liaison entre atomes est de l'ordre de $E = \dfrac{ka^2}{2} \simeq 1eV$, calculer numériquement la célérité précédente.

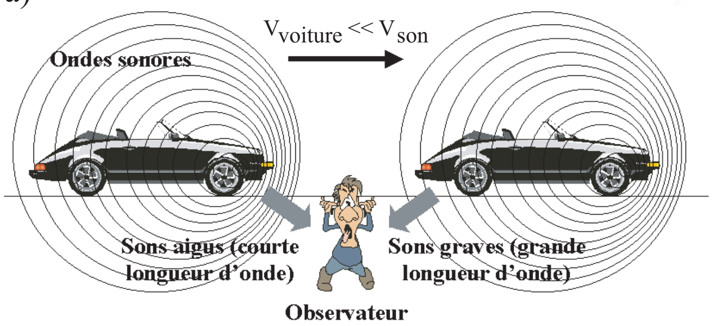
   (c) En déduire que l'approximation des milieux continus est bien vérifiée pour un son audible se propageant dans un solide.

Réponses : 2b. $m\ddot{u}_n = -k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$, 3b. $c = \sqrt{\dfrac{ka^2}{m}} \simeq 5km.s^{-1}$, 3c. $\lambda \simeq 0.3m$.

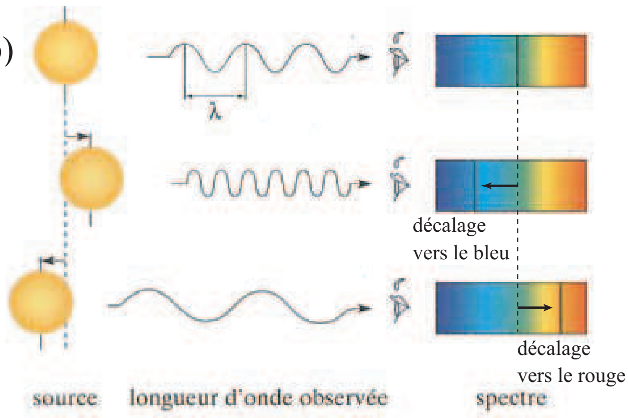
3 Effet Doppler

1. une source émet des impulsions (ou des "bips") tous les $\Delta T = \frac{1}{\nu}$. Ces impulsions se propagent à la vitesse c. Montrer que la fréquence ν' à laquelle sont reçues les impulsions par un détecteur se déplaçant à la vitesse $v \ll c$ vers la source est telle que : $\dfrac{\Delta\nu}{\nu} = \dfrac{\nu' - \nu}{\nu} \simeq \dfrac{v}{c}$
2. Interpréter les deux observations illustrées ci-dessous : a) le son émis par une voiture nous apparaît plus aigu lorsqu'elle se rapproche, et b) les spectres lumineux émis par d'autres galaxies sont "décalés vers le rouge" à cause de l'expansion de l'univers.

a)

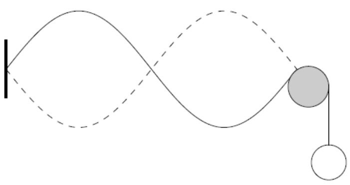


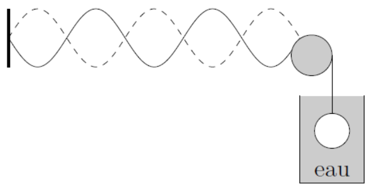
b)



4 Résolution de problème - Détermination du rayon d'une boule

Une corde tendue par une masse $m = 200g$ par l'intermédiaire d'une poulie est excitée à l'aide d'une lame vibrante.





A l'aide des deux expériences ci-dessus, trouver le rayon de la boule, sachant qu'il s'agit de la même corde, en régime permanent établi, et que la pulsation excitatrice est inchangée. On notera que la boule reste immobile.

Réponse : $R = \left(\frac{63m}{100\pi\rho_e}\right)^{1/3} = 3.4\ cm$.