

**DS n°4 CCINP - e3a. Partie physique.**

Samedi 16 décembre 2023 – Durée 3 heures

## 1 Moteur synchrone

Formulaire et donnée générale :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

### Partie I. – Structure du champ magnétique produit par des bobines

On considère un solénoïde d'axe  $(Oz)$ , composé de spires jointives circulaires de rayon  $R$ , identiques et parcourues par un courant d'intensité  $I$  constante. On suppose que les spires sont jointives et on note  $n$  le nombre de spires par mètre.

1. On se place dans le modèle du solénoïde de longueur infinie. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé en tout point  $M$  intérieur au solénoïde. On supposera que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde. Comment qualifier le champ magnétique dans le solénoïde ?
2. On considère maintenant une région de l'espace sans courants, dans laquelle le champ magnétique en tout point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{e}_z$$

- a) Dessiner l'allure des lignes de champ.
- b) Montrer à l'aide des équations locales de la magnétostatique que  $\vec{B}$  est uniforme dans cette région de l'espace.

On considère maintenant une bobine composée de  $N$  spires jointives circulaires identiques de rayon  $R$ , d'axe  $(Oz)$  et de longueur finie  $\ell$ . Toutes les spires sont parcourues par le même courant d'intensité constante  $I$  ; l'origine  $O$  est au centre de la bobine.

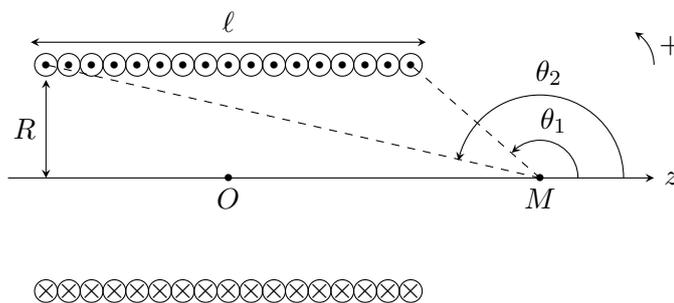


Figure 1

L'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par la bobine en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$  est donnée par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\ell} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{e}_z$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles orientés indiqués sur la figure 1, le sens d'orientation  $+$  étant le sens trigonométrique (cf. figure 1).

- Justifier par les symétries que  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$ .
- Indiquer comment on peut retrouver l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde de longueur infinie obtenue à la question 1.
- Le point  $M$  étant d'abscisse  $z$ , déterminer l'expression de  $\vec{B}(M)$  en fonction de  $z$ ,  $R$ ,  $\ell$ ,  $N$ ,  $I$  et  $\mu_0$ .
- En déduire  $\vec{B}(O)$ . Application numérique : on prend  $\ell = 7$  cm,  $R = 4$  cm et  $N = 1000$  (bobine usuelle de laboratoire). Calculer la valeur de  $I$  permettant d'avoir  $\|\vec{B}(O)\| = 100$  mT. Commenter. Indiquer quel(s) problème(s) sont susceptibles de se poser et les solutions techniques qu'on peut y apporter.

Pour la valeur de l'intensité  $I$  obtenue, calculer la valeur de  $\|\vec{B}\|$  en un point  $M$  situé à  $z = 10$  cm du centre  $O$ .

On étudie maintenant le champ magnétique créé en un point  $M$  situé en dehors de l'axe  $(Oz)$ . On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

Pour tout champ vectoriel  $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$ , on donne :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

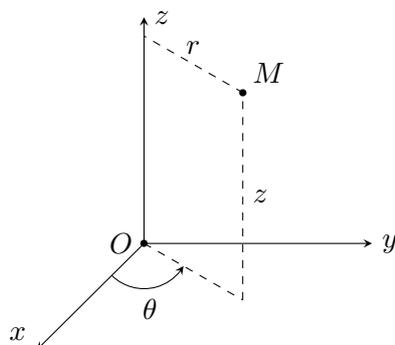


Figure 2 Coordonnées cylindriques

Le champ magnétique en  $M$  s'écrit à priori :

$$\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z$$

- Montrer que  $B_\theta = 0$  et que  $B_r = B_r(r, z)$  et  $B_z = B_z(r, z)$ .
  - Établir que la composante  $B_z(r, z)$  est une fonction paire de  $z$ .
  - Existe-t-il des lignes de champ magnétique contenues dans le plan  $xOy$  ?
  - On admet que pour un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  très proche du point  $O$ , les composantes  $B_z(M)$  et  $B_r(M)$  ont pour expressions approchées :

$$B_z(z, r) \approx B(O) \left[ 1 - \frac{z^2}{D^2} \right] \quad \text{et} \quad B_r(z, r) \approx B(O) \alpha r z$$

où  $D$  est une longueur constante que l'on ne cherchera pas à déterminer et où  $B(O)$  désigne la norme du champ magnétique en  $O$ . Déterminer à partir d'une équation de Maxwell la valeur de la constante  $\alpha$  en fonction de  $D$

### Partie II. – Étude d'un champ magnétique tournant

On ajoute une seconde bobine identique à celle étudiée précédemment, placée perpendiculairement à la première, de façon à obtenir la configuration représentée sur la figure 3. Le point  $A$  est placé à  $d = 10$  cm du centre de chaque bobine.

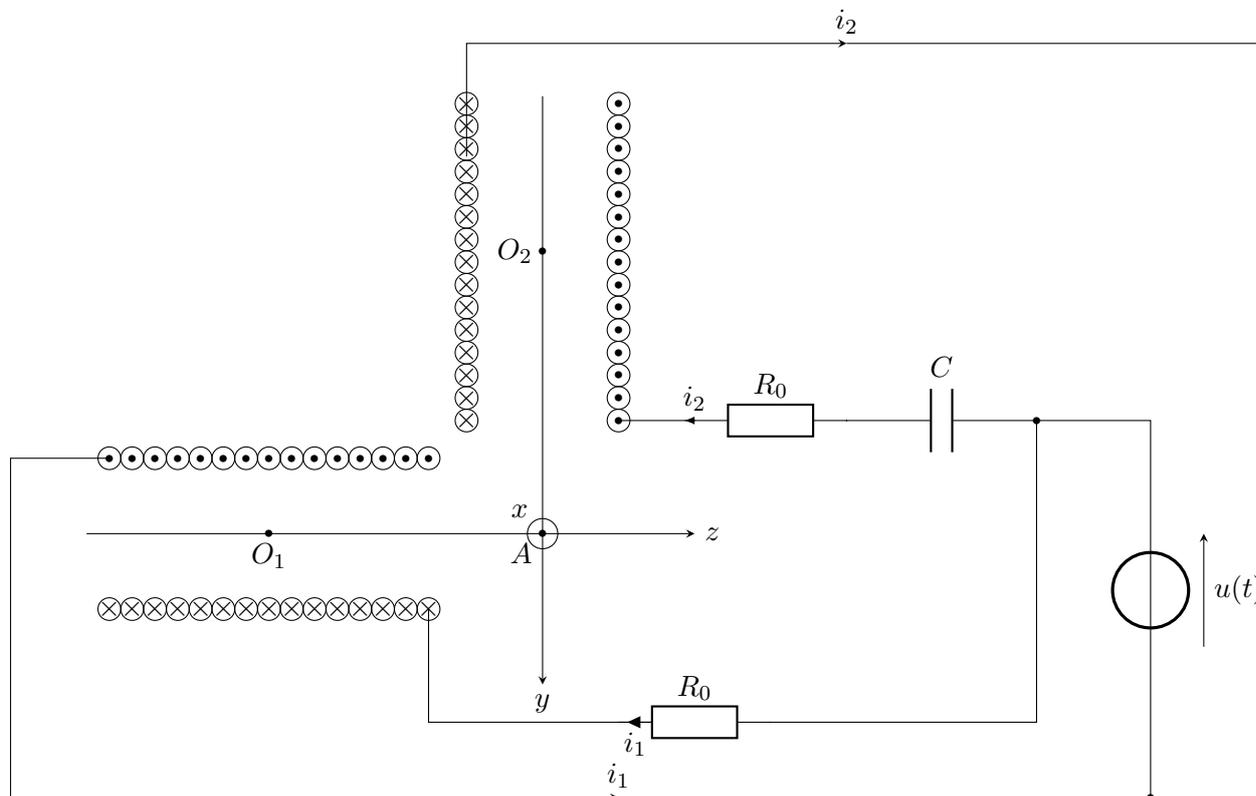


Figure 3

On alimente l'ensemble par une source idéale de tension de force électromotrice sinusoïdale  $u(t) = U \cos(\omega_0 t)$ . Chaque bobine possède une inductance  $L_b$  et une résistance  $R_b$ . La bobine verticale est parcourue par un courant d'intensité  $i_2(t)$  et la bobine horizontale par un courant d'intensité  $i_1(t)$ . On se place dans l'A.R.Q.S., ce qui fait que les résultats de la partie I. restent valables, même si les intensités dépendent du temps.

4. Dessiner le schéma électrocinétique correspondant à ce montage. On y fera figurer les inductances, résistances et la capacité  $C$ .
5. Déterminer :
  - a) la valeur de  $R_0$  pour que le courant  $i_1(t)$  soit en retard de phase de  $\pi/4$  sur la tension  $u(t)$ ;
  - b) la valeur de  $C$  pour que le courant  $i_2(t)$  soit en avance de phase de  $\pi/4$  sur la tension  $u(t)$ .
  - c) Application numérique avec  $L_b = 200$  mH,  $R_b = 0,5 \Omega$  et  $f_0 = \omega_0/2\pi = 100$  Hz. Calculer  $R_0$  et  $C$ .
  - d) Montrer que les intensités parcourant les deux bobines ont la même amplitude lorsque les conditions précédentes sont remplies.

6. En déduire que le champ magnétique total  $\vec{B}(A, t)$  créé au point  $A$  par l'ensemble des deux bobines s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(A, t) = B_0 \left[ \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z + \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y \right]$$

où  $B_0$  est une constante donc l'expression n'est pas exigée.

7. Montrer que la norme de  $\vec{B}(A, t)$  est constante. Expliciter l'angle que fait le vecteur  $\vec{B}(A, t)$  avec  $\vec{e}_y$  et conclure sur la caractéristique du champ magnétique ainsi produit en  $A$ .

### Partie III. – Principe du moteur synchrone

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique  $\vec{m}$  de norme constante  $m$ , la direction du vecteur  $\vec{m}$  étant indiquée sur la Figure 4. Sur cette figure, le vecteur  $\vec{m}$  a été volontairement placé à côté de la boussole pour plus de lisibilité. En réalité on le placera au centre de la boussole.

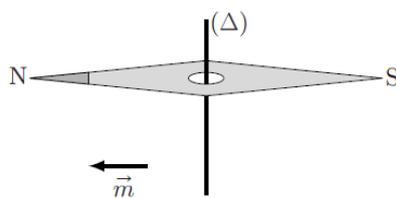


Figure 4

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe  $(\Delta)$  formant une liaison pivot à faible frottement.

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire  $\vec{m}$  soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  sont décrites par l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  et par le couple des actions électromagnétiques  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .

On place cette boussole au point  $A$  du montage décrit sur la Figure 3, l'axe  $(\Delta)$  coïncidant avec l'axe  $(Ax)$ . Le montage de la figure 3 est réglé de telle sorte que l'expression du champ magnétique en  $A$  est celui donné à la question 6.

On donne alors à l'aiguille un mouvement de rotation autour de  $(\Delta)$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ , de sorte que l'angle  $\beta(t) = (\vec{e}_y, \vec{m})$  s'écrive  $\beta(t) = \omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha$  à l'instant  $t$ , avec  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$ .

8. a) Calculer la valeur du couple  $\vec{\Gamma}(t)$  exercé par le champ magnétique sur la boussole.  
 b) À quelle condition sur  $\omega$  sa valeur moyenne au cours du temps  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  est-elle non nulle? Lorsque cette condition est réalisée, donner l'expression de  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  en fonction de  $\alpha$ ,  $B_0$  et  $m$ .

On suppose que la condition sur  $\omega$  est réalisée dans la suite du problème. Comme le champ magnétique tourne à une fréquence élevée, on admettra que seule la valeur moyenne  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  du couple intervient pour étudier la rotation de la boussole.

- c) En déduire pour quelles valeurs de  $\alpha$  ce dispositif fonctionne en moteur, c'est à dire lorsque l'action du champ magnétique est d'entraîner une rotation de l'aiguille dans le même sens.
9. En pratique, la constance de la vitesse angulaire  $\omega$  de l'aiguille est assurée par les frottements sur son axe de rotation ( $Ax$ ). Ces frottements solides créent un couple résistant  $\vec{\Gamma}_r$  constant, dont on supposera la norme égale à  $\Gamma_r = \frac{mB_0}{2}$ , qui contrebalance le couple des actions électromagnétiques.
- a) Représenter  $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x$  en fonction de  $\alpha$ , pour  $\alpha$  variant dans la zone où le dispositif fonctionne en moteur.
- Faire figurer les deux points de fonctionnement possibles sur ce schéma, qui assurent que la vitesse angulaire  $\omega$  de la boussole reste constante. en régime permanent. Préciser les valeurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  correspondantes.
- b) Un expérimentateur curieux freine la rotation de l'aiguille à l'aide d'un stylo pendant une fraction de seconde, puis laisse le système évoluer à nouveau sous l'effet du couple électromagnétique moyen et des frottements. Montrer que seule une des deux valeurs de  $\alpha$  précédentes de reprendre sa rotation à la vitesse angulaire  $\omega_0$  à la suite de cette perturbation. *On dit que le fonctionnement moteur est stable dans ce cas.*

## 2 Étude de la force de van der Waals

Lorsque deux atomes présentant un moment dipolaire électrique sont à distance suffisante, ils interagissent entre eux sous forme d'interaction dipôle - dipôle. Cette partie cherche à expliquer le principe de cette interaction.

On rappelle les expressions de la force et de l'énergie potentielle d'un dipôle de moment  $\vec{p}$  placé dans un champ électrostatique extérieur :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

1. Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique et de son moment dipolaire  $\vec{p}$  (il est conseillé de s'appuyer sur un dessin).
2. Donner un exemple de dipôle électrostatique rencontré dans la nature ainsi que l'ordre de grandeur du moment dipolaire de l'exemple choisi.
3. Le potentiel électrique d'un dipôle électrostatique placé à l'origine  $O$  évalué en un point  $M$  situé à grande distance de  $O$  s'écrit :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3}$$

- a) À quelle condition peut-on considérer que le point  $M$  se trouve à grande distance de  $O$  ?
- b) Déterminer dans le système de coordonnées sphériques (figure 1) le champ électrique créé par le dipôle en un point  $M$  en fonction des variables  $r = \|\vec{OM}\|$  et  $\theta$ .

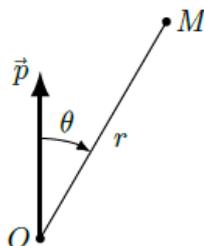


Figure 1

### Interactions entre atomes de rubidium

Les atomes de rubidium ( $Z = 37$ ) servant à l'étude des interactions de van der Waals, ne possèdent pas de moment dipolaire propre. Néanmoins, ils peuvent posséder des moments dipolaires induits et la force qui existe entre deux atomes, résulte de l'interaction entre ces deux moments dipolaires induits.

4. Proposer une explication qualitative de ce phénomène.

Pour modéliser le phénomène, on considère deux dipôles alignés sur un axe ( $Ox$ ) et espacés d'une distance  $x = O_1O_2$  (figure 2).



Figure 2

5. À partir de l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur, montrer que la force exercée par le premier dipôle sur le second dipôle peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F}_{1/2} = p_2 \frac{dE_1}{dx} \vec{e}_x$$

où  $E_1$  est la composante selon  $\vec{e}_x$  du champ électrique créé à l'abscisse  $x$  (c'est à dire au niveau de  $p_2$ ) par le dipôle  $p_1$ .

6. On suppose que  $\vec{p}_2$  est un dipôle induit qui peut s'écrire sous la forme  $\vec{p}_2 = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_1$  où  $\alpha$  est une constante appelée polarisabilité. En déduire que cette force peut se mettre sous la forme :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{K}{x^3} \vec{e}_x$$

où  $K$  est une constante dont on précisera le signe.

7. Cette force est-elle attractive ou répulsive? Comment pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul?

**FIN DU DEVOIR**