

## Corrigé du DS n°4 CCINP - e3a MP1

## 1 Moteur synchrone

### Partie I. – Structure du champ magnétique produit par des bobines

1. Voir le cours. On trouve :

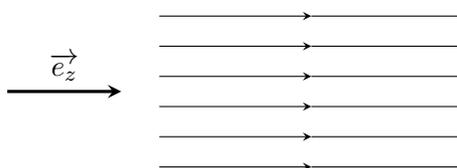
$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Ce champ magnétique est **uniforme** à l'intérieur du solénoïde.

- 2.

$$\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{e}_z$$

- a) Ces sont des droites parallèles à  $\vec{e}_z$ . On a donc :



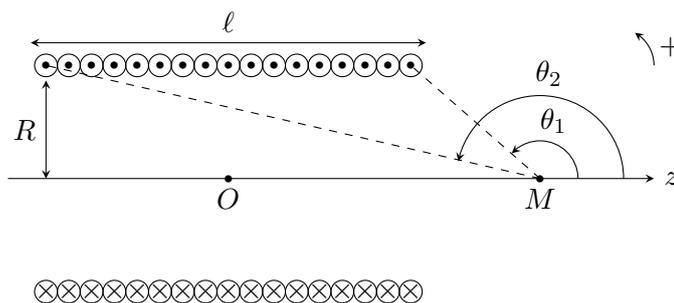
- b) On a :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \implies B \text{ indépt. de } z$$

De plus, en dehors des courants et en régime stationnaire, l'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \implies \frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial B}{\partial x} \vec{e}_y = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

$B$  ne dépend donc pas non plus ni de  $x$ , ni de  $y$ . Il s'ensuit que  $B$  ne dépend d'aucune coordonnées : il s'agit bien d'un champ uniforme.



- a) Tout plan contenant  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants et donc un plan de symétrie de  $\vec{B}$  contenant  $M \in (Oz)$ . On en déduit que  $\vec{B}(M)$  doit appartenir à tous ces plans, donc à leur intersection qui est l'axe  $(Oz)$ . On a donc  $\vec{B}(M) // \vec{e}_z$
- b) On fait  $\theta_1 \rightarrow 0$  et  $\theta_2 \rightarrow \pi$  tout en maintenant constant  $n = N/l$ . On retrouve bien  $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$ .

c) On remarque que :

$$\cos(\pi - \theta_1) = \frac{z - \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z - \ell/2)^2}} = -\cos \theta_1 \quad \text{et} \quad \cos(\pi - \theta_2) = \frac{z + \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z + \ell/2)^2}} = -\cos \theta_2$$

On en déduit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\ell} \left[ \frac{z + \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z + \ell/2)^2}} - \frac{z - \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z - \ell/2)^2}} \right] \vec{e}_z$$

d) En  $z = 0$  on obtient :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{R^2 + (\ell/2)^2}}$$

Application numérique :  $I \approx 8,5$  A. C'est une valeur élevée du courant. La température du fil risque d'augmenter fortement par effet Joule. Pour baisser la valeur de  $I$  tout en maintenant  $B$  constant il faut augmenter  $N$  mais il se pose un problème d'encombrement (on peut toutefois bobiner le fil sur plusieurs couches). On peut aussi vouloir baisser la résistivité du fil en prenant un matériau plus conducteur, voir supraconducteur.

$\|\vec{B}(z = 10 \text{ cm})\| = 8,1$  mT. L'intensité du champ magnétique diminue donc très fortement et rapidement dès qu'on sort de la bobine.

3. a) Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan d'antisymétrie des courants donc un plan de symétrie contenant  $M$ . On a donc  $B_\theta = 0$ .

D'autre part, il y a invariance des courants par toute rotation autour de  $Oz$ . On a donc  $B_r = B_r(r, z)$  et  $B_z = B_z(r, z)$  indépendants de  $\theta$ .

- b) Le plan  $(Oxy)$  est un plan de symétrie des courants, donc un plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$ . Si on considère deux points  $M(r, \theta, z)$  et  $(M, \theta, -z)$  symétriques par rapport à ce plan, alors :

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{Oxy} \vec{B}(M)$$

d'où :

$$B_r(r, -z) \vec{e}_r + B_z(r, -z) \vec{e}_z = -\{B_r(r, z) \vec{e}_r - B_z(r, z) \vec{e}_z\}$$

et donc  $B_z(r, -z) = B_z(r, z)$ .

- c) Non car  $(Oxy)$  est un plan de symétrie des courants et donc un plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$ . En tout point  $M$  de ce plan  $\vec{B}(M) \perp (Oxy)$ . Aucune ligne de  $\vec{B}$  ne peut donc appartenir au plan  $(Oxy)$ .
- d)  $\vec{B}$  est à flux conservatif donc  $\text{div} \vec{B} = 0$ . En coordonnées cylindriques cela donne :

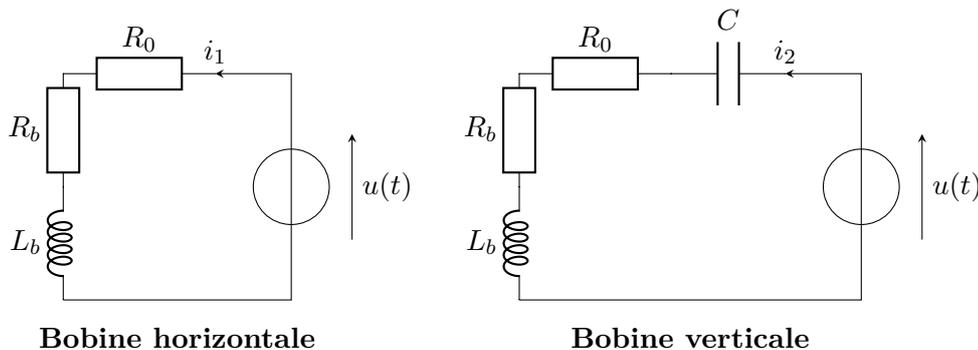
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \iff 2B(O) \alpha z - B(O) \frac{2z}{D^2} = 0$$

d'où :

$$\alpha = \frac{1}{D^2}$$

## Partie II. – Étude d'un champ magnétique tournant

4. On peut dessiner deux schémas équivalents : une pour le circuit de la bobine horizontale et l'autre pour le circuit de la bobine verticale :



5. Déterminer :

- a) On passe dans le domaine complexe :

$$\underline{u}(t) = (R_0 + R_b + jL_b\omega_0) \underline{i}_1(t) \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{i}_1(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{1}{R_0 + R_b + jL_b\omega_0}$$

On veut  $\arg\left(\frac{\underline{i}_1(t)}{\underline{u}(t)}\right) = -\pi/4$  (retard de phase), ce qui donne :

$$-\arctan\left(\frac{L_b\omega_0}{R_0 + R_b}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{d'où} \quad L_b\omega_0 = R_0 + R_b$$

et donc :

$$\boxed{R_0 = L_b\omega_0 - R_b}$$

- b) De la même façon :

$$\underline{u}(t) = \left(R_0 + R_b + jL_b\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}\right) \underline{i}_2(t) \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{i}_2(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{1}{R_0 + R_b + jL_b\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}}$$

On veut  $\arg\left(\frac{\underline{i}_2(t)}{\underline{u}(t)}\right) = +\pi/4$  (avance de phase), ce qui donne :

$$-\arctan\left(\frac{L_b\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R_0 + R_b}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{d'où} \quad L_b\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = -(R_0 + R_b)$$

ce qui donne :

$$\boxed{C = \frac{1}{\omega_0(L_b\omega_0 + R_0 + R_b)} = \frac{1}{2L_b\omega_0^2}}$$

en utilisant la valeur de  $R_0$  trouvée à la question précédente.

- c) Application numérique :  $R_0 = 125 \, \Omega$  et  $C = 6,3 \, \mu\text{F}$ , ce qui sont des valeurs tout à fait convenables et qu'on peut facilement obtenir au laboratoire.

d) Avec les valeurs trouvées aux questions précédentes on obtient :

$$I_{m1} = |\dot{i}_1(t)| = \frac{|\underline{u}(t)|}{|L_b \omega_0 (1 + j)|} = \frac{U}{\sqrt{2} L_b \omega_0}$$

et

$$I_{m2} = |\dot{i}_2(t)| = \frac{|\underline{u}(t)|}{|R_0 + R_b - j(R_0 + R_b)|} = \frac{|\underline{u}(t)|}{|L_b \omega_0 (1 + j)|} = \frac{U}{\sqrt{2} L_b \omega_0}$$

Ainsi les intensités parcourant les deux bobines ont bien la même amplitude lorsque les conditions précédentes sont remplies. Dans la suite on posera  $I_{m1} = I_{m2} = I_m$  et donc :

$$i_1(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

6. Les deux bobines étant identiques et le point  $A$  étant situé à la même distance  $d$  de  $O_1$  ou de  $O_2$ , on en déduit que les champs magnétiques créés par la bobine horizontale et par la bobine verticale s'écrivent respectivement :

$$\vec{B}_1(A, t) = \alpha i_1(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(A, t) = \alpha i_2(t) \vec{e}_y$$

où  $\alpha$  est un facteur géométrique qui dépend de  $d$ ,  $R$ ,  $N$  et  $\mu_0$ . En posant  $B_0 = \alpha I_m$  et en utilisant le théorème de superposition on en déduit que :

$$\boxed{\vec{B}(A, t) = B_0 \left[ \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z + \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y \right]}$$

7. Si on remarque que :

$$\cos\left(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \sin(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on obtient :

$$\|\vec{B}(A, t)\|^2 = \frac{B_0^2}{2} [(\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t))^2 + (\cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t))^2] = B_0^2$$

et, en notant  $\varphi(t)$  l'angle que fait le vecteur  $\vec{B}(A, t)$  avec  $\vec{e}_y$  à l'instant  $t$ , on a :

$$\boxed{\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{4}}$$

Ainsi le vecteur  $\vec{B}(A, t)$  est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique, avec la vitesse angulaire  $\omega_0$ . Sa norme reste constante au cours de la rotation.

### Partie III. – Principe du moteur synchrone

8. a) À l'instant  $t$  on a :

$$\vec{m} = m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_y + m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_z$$

On calcule produit vectoriel avec le champ magnétique tournant dont l'expression est donnée à la question 6. et on utilise le formulaire donné en début d'énoncé pour trouver ;

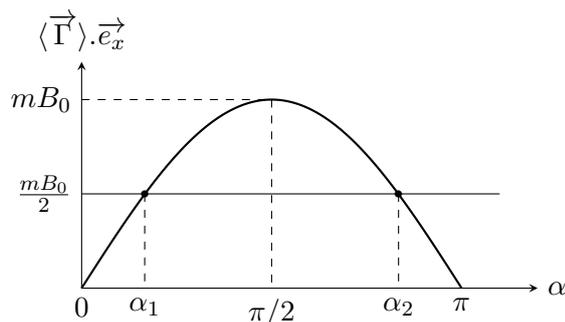
$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{m B_0}{2} \left[ \cos((\omega + \omega_0)t - \alpha) + \cos((\omega - \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha) \right. \\ \left. - \sin((\omega + \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha) - \sin((\omega - \omega_0)t - \alpha) \right] \vec{e}_x$$

- b) Si  $\omega \neq \omega_0$  les valeurs moyennes de tous les cos et sin sont nulle. La seule possibilité pour qu'elles ne soient pas nulles est  $\omega = \omega_0$ . Les valeurs moyennes des termes en  $\cos((\omega + \omega_0)t + \dots)$  et  $\sin((\omega + \omega_0)t + \dots)$  restant nulles, il ne reste alors que :

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Gamma} \rangle = mB_0 \sin \alpha \vec{e}_x$$

- c) On veut que  $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x > 0$  et il s'ensuit que  $\sin \alpha > 0$ , ce qui impose  $\alpha \in ]0, \pi[$

9. a) Le schéma est donné ci-dessous :



Si on applique le théorème du moment cinétique à la boussole, sachant que  $\omega = \text{Cste}$ , on obtient (en désignant par  $J$  le moment d'inertie de la boussole par rapport à l'axe de rotation  $Ox$ ) :

$$J \dot{\omega} = 0 = \langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x - \frac{mB_0}{2} \quad \text{d'où} \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

ce qui donne les deux solutions  $\alpha_1 = \pi/6$  et  $\alpha_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ .

- b) Provisoirement on a donc  $\omega < \omega_0$  puisque la boussole est ralentie.

## 2 Étude de la force de van der Waals

D'après bout de Centrale Supélec PC 2020

1. Voir le cours
2. On peut citer les molécules polaires comme HCl ou H<sub>2</sub>O dont les atomes constitutifs ont des électronégativités différentes. L'ordre de grandeur des moments dipolaires et de quelques Debye, c'est à dire de l'ordre de  $1/3 \times 10^{-30}$  C.m.
3. a) Il faut que  $\|\vec{OM}\| \gg$  taille du dipôle  
b) En supposant que  $\vec{p} = p \vec{e}_z$ , on remarque que :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

ce qui donne :

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

### Interactions entre atomes de rubidium

4. Lorsque deux molécules sont proches, les charges opposées s'attirent et les charges de même signe se repoussent. Cela modifie les distributions de charges des deux molécules et les barycentres des charges négatives et positives ne sont plus confondus. Il y a donc deux dipôles induits créés.
5. D'après la question 3. le champ électrostatique créé par le dipôle  $\vec{p}_1$  au point  $O_2$  où se trouve le dipôle  $\vec{p}_2$  s'écrit (il suffit de faire  $\theta = 0$  et  $\vec{e}_r = \vec{e}_x$  dans la formule de la question 3.) :

$$\vec{E}_1(O_2) = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^3} = E_1(x) \vec{e}_x$$

On a donc :

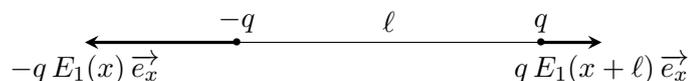
$$\vec{F}_{1/2} = (p_2 \vec{e}_x \cdot \vec{\nabla}) (E_1(x) \vec{e}_x) = p_2 \frac{dE_1}{dx} \vec{e}_x$$

6. Il vient :

$$\vec{p}_2 = \alpha\epsilon_0 \frac{p_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^3} \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_{1/2} = -\frac{6\alpha p_2^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^7}$$

$$\text{d'où } K = -\frac{3\alpha p_2^2}{8\pi^2\epsilon_0} < 0.$$

7. Il s'agit bien sûr d'une force attractive. On pouvait prévoir ce résultat sans calcul en modélisant le dipôle  $p_2$  par un doublet des charges et sachant que  $E_1(x)$  décroît avec  $x$ .



On voit bien que la somme de ces deux forces est dirigée dans le sens  $-\vec{e}_x$