TD n°12 - Ondes électromagnétiques dans le vide

1 Onde électromagnétique plane progressive - Un premier exemple

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ et magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$.
2. On suppose que le champ électrique est de la forme (on supposera que $k > 0$) :

$$\overrightarrow{E} = E_0 cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}x$$

   (a) À quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation rappelée à la première question ?

   (b) Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?

   (c) Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

   (d) Quelle est la structure de cette onde (c'est à dire quelles propriétés liant les grandeurs $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$) ?

   (e) Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ associé à $\overrightarrow{E}$ ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde.
3. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4mm^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $\mathcal{P} = 10W$. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

2 Onde électromagnétique plane progressive - Un second exemple

On étudie maintenant une seconde onde électromagnétique dont le champ électrique complexe est :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{E}_x \overrightarrow{u}_x + \underline{E}_y \overrightarrow{u}_y \qquad \text{avec} \qquad \underline{E}_x = E_0 e^{i\left[\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right]}$$

L'onde se propage dans le vide. Sa fréquence est $\nu = 5.10^{14}\ Hz$.

1. Calculer la longueur d'onde λ correspondante. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
2. Exprimer E_y en fonction de E_x.
3. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
4. Calculer le champ magnétique complexe $\underline{\overrightarrow{B}}$ de cette onde.
5. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
6. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde. Commenter.

3 Bilan énergétique d'une onde électromagnétique dans le vide

On considère une onde électromagnétique dans le vide dont le champ électrique est donné par :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_x$$

1. Calculer le champ magnétique associé, le vecteur de Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique ainsi que leurs valeurs moyennes.
2. Montrer que l'équation locale de Poynting est bien vérifiée à la fois en valeur moyenne temporelle et en valeur instantanée.
3. Exprimer de deux manières différentes la quantité d'énergie électromagnétique δU_{em} traversant une surface élémentaire dS_M centrée sur un point M entre t et $t + dt$.

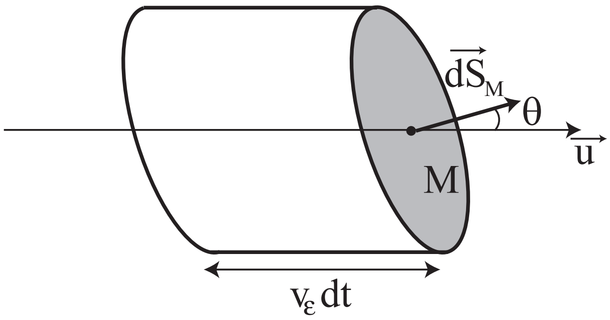


FIGURE 1 – *Vitesse de déplacement de l'énergie électromagnétique dans le vide.*

En déduire que l'énergie d'une onde électromagnétique dans le vide se propage à une vitesse $v_{\mathcal{E}}$ qui s'identifie avec la vitesse de la lumière c.

4 Détermination des caractéristiques d'ondes électromagnétiques

On considère les ondes électromagnétiques données ci-dessous. Préciser les caractéristiques (direction de propagation, polarisation, transversalité, planéité) de chacune d'entre elles.

1. $\overrightarrow{E}_1 = E_0 sin(2y + 3z) cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u}_z$
2. $\overrightarrow{E}_2 = E_0 sin(2x) cos(\omega t + \dfrac{kx + ky}{\sqrt{2}})\overrightarrow{u}_z$
3. $\overrightarrow{E}_3 = E_0 cos(\omega t + kz)\overrightarrow{u}_z$
4. $\overrightarrow{E}_4 = E_0 cos(\omega t - \dfrac{kx + ky}{\sqrt{2}})\overrightarrow{u}_x - E_0 cos(\omega t - \dfrac{kx + ky}{\sqrt{2}})\overrightarrow{u}_y$
5. $\overrightarrow{E}_5 = E_0 cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_x - E_0 sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_y$
6. $\overrightarrow{E}_6 = E_0 cos(kx) cos(\omega t)\overrightarrow{u}_z$

Pour lesquelles pourra-t-on utiliser la relation de structure pour calculer le champ magnétique ?

5 Onde électromagnétique dans le vide

On considère une onde électromagnétique caractérisée par son champ électrique :

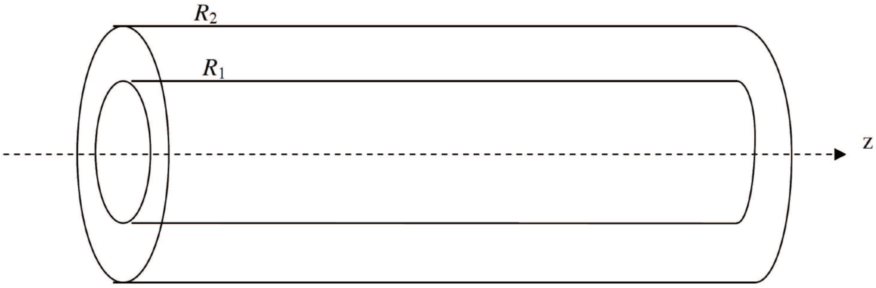
$$\overrightarrow{E} = E_0 \sin(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{u}_z$$

se propageant dans le vide.

1. Caractériser l'onde électromagnétique (direction de propagation, planéité, polarisation, transversalité).
2. Préciser quelles sont les relations liant nécessairement les paramètres α, β, ω et c.
3. Décomposer l'onde précédente en deux OPPH dont on précisera les caractéristiques.
4. Calculer le champ magnétique associé à cette onde.
   Donnée : $2\sin(A)\cos(B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

6 Ondes électromagnétiques dans un câble coaxial

On considère le câble coaxial de la figure ci-dessous, de longueur $\ell \gg R_2$ (on prendra $R_1 = 0.25mm$, $R_2 = 1.25\ mm$ et $\ell = 100\ m$ pour les applications numériques).



Un onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. Son champ électrique est donné par :

$$\overrightarrow{E}(r,z,t) = \frac{\alpha}{r} cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_r$$

où α est une constante positive. On admettra que le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur central, c'est à dire pour $r < R_1$.

1. L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
2. On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer le champ complexe $\underline{\overrightarrow{E}}$ associé à $\overrightarrow{E}$ en fonction de E_0, r, z, k, ω, t et R_1.
3. Quelle est l'équation de propagation vérifiée par le champ $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur du câble ? En utilisant le formulaire ci-dessous, en déduire la relation de dispersion liant k et ω. Le milieu est-il dispersif ?
4. Déterminer l'expression du champ magnétique complexe associé $\underline{\overrightarrow{B}}$, à une composante indépendante du temps près. Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.
5. Déterminer l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à l'onde lors de sa propagation.
6. Déterminer la puissance moyenne transportée par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0. En déduire l'amplitude E_0 du champ sachant que la puissance moyenne transportée est de $10W$.

Formulaire en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\Delta\vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\vec{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta + 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\vec{u}_\theta + \Delta A_z\,\vec{u}_z$$