

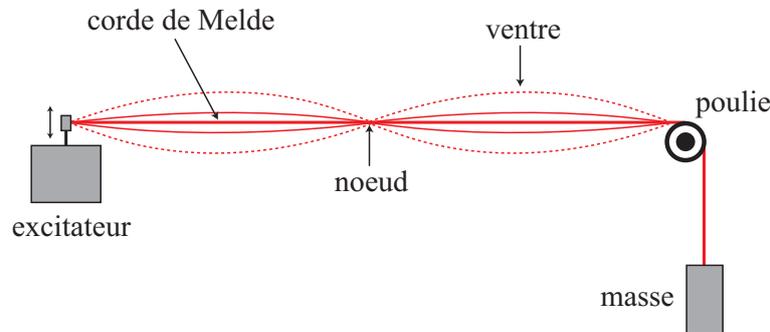
DM n°12 : Ondes et déplacements d'équilibres
À rendre pour le mardi 16 janvier

1 Déplacements d'équilibre pour la réaction de Deacon (facultatif)

On se propose ici d'étudier numériquement l'influence de la température, de la pression, et des quantités de matière sur l'avancement de la réaction de Deacon. On se reportera au Jupyter Notebook dont la référence est **85ef-1181209** dans Capytale.

2 Oscillations forcées sur une corde

On cherche à caractériser les oscillations forcées d'une corde en utilisant le dispositif historique de Melde présenté sur la figure ci-dessous. Un vibreur oscillant à la pulsation ω avec une amplitude a force les oscillations de la corde à une pulsation identique. La corde de longueur L et de masse linéique μ est tendue par un système de poulie parfaite en suspendant une masse M au bout de la corde.



On pourra négliger l'influence de la pesanteur et de toute forme de dissipation, et on considérera que l'amplitude des oscillations de la corde reste très faible devant la longueur de la corde au cours des oscillations.

On repérera le déplacement de la corde à l'abscisse x par la fonction de deux variables suivante : $y(x, t)$. La position du vibreur sera prise comme origine des abscisses.

1. On admettra que la fonction $y(x, t)$ vérifie une équation de D'Alembert avec les hypothèses précédentes. Écrire cette équation. Déterminer l'expression de la célérité des ondes par analyse dimensionnelle, sachant que c ne dépend que de la masse linéique μ et de la tension T de la corde.
2. Quelles sont les conditions limites imposées à cette fonction $y(x, t)$? *Attention, la corde n'est pas en oscillation libre!*
3. Quel type d'onde va exister sur la corde, et donc sous quelle forme faut-il rechercher les solutions de l'équation vérifiée par $y(x, t)$?
4. Montrer que les solutions s'écrivent sous la forme :

$$y(x, t) = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}$$

5. Montrer qu'on observe un phénomène de résonance pour certaines fréquences de vibration de l'excitateur que l'on précisera.
6. Quels phénomènes aurait-il fallu prendre en compte pour que le modèle soit plus réaliste?
7. Montrer que ces ondes excitées sur la corde correspondent aux modes propres de la même corde que l'on aurait fixée à ses deux extrémités. Commenter la dépendance de la fréquence des modes propres avec les différents paramètres du système.

3 Étude d'une onde électromagnétique

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide. Dans une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le champ électrique prend la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = \frac{E_0\sqrt{3}}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right] \\ E_y = -\frac{E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que ce champ électrique vérifie l'équation de propagation de d'Alembert dans le vide à une condition sur v que l'on précisera. On pourra utiliser la notation complexe pour simplifier les calculs.
2. Quelle est la polarisation de cette onde ?
3. Quel est le vecteur d'onde de cette onde ? Dans quelle direction cette onde se propage-t-elle ?
4. Déterminer l'expression du champ magnétique associé.
5. L'onde étudiée est-elle une OPPH ?

4 Millenium bridge (facultatif)

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.



Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} .

A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $z \in \mathbb{C}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

4.1 Système élastique continu

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus mais d'un point de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discrétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique ρ constante, qui a la forme d'un cylindre de section S et d'axe (O, \hat{u}_x) horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme F de la force de traction permettant à un solide de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $F = ES \frac{\Delta L}{L}$ où E est une constante appelée module d'Young du matériau.

□ 1 — Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

□ 2 — On note $X(x, t)$ le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse x . Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos dx et en déduire la force de traction $\vec{F}(x, t) = F(x, t)\hat{u}_x$ exercée par la partie « droite » (du côté des x croissants) sur la partie « gauche » (du côté des x décroissants) en fonction de E , S et $\frac{\partial X}{\partial x}$. Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur dx et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $X(x, t)$.

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle on introduit un axe vertical dirigé selon le vecteur unitaire \hat{u}_y et on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant t par une ligne d'équation $y(x, t)$ de masse linéique μ uniforme.

En un point $M(x, y)$ de la passerelle, on définit le vecteur unitaire tangent \hat{u}_τ à la passerelle tel que $\hat{u}_\tau(x, t) = \cos[\alpha(x, t)]\hat{u}_x + \sin[\alpha(x, t)]\hat{u}_y$. Les déplacements sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant $\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \ll 1$. Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé que selon la verticale. En chaque point $M(x, y)$ de la passerelle règne à chaque instant t une tension $\vec{T}(x, t)$ portée par \hat{u}_τ . Un tronçon de corde est représenté sur la figure 5.

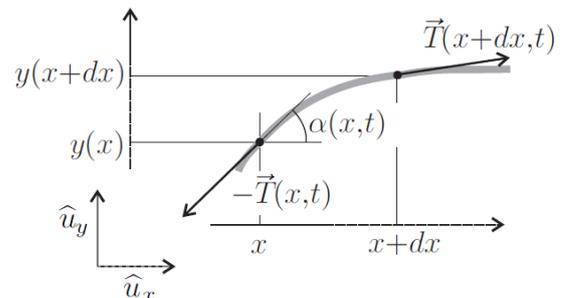


FIGURE 5 – Tronçon de corde élastique

□ 3 — En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension de la corde est indépendant de x . On le notera T_0 .

□ 4 — Montrer alors que l'on peut écrire $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ où l'on exprimera c_ℓ en fonction de T_0 et μ .

4.2 Modèle de la poutre élançée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon (O, \hat{u}_x) et de hauteur h selon (O, \hat{u}_y) . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x)$ très petit devant h ou b , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section S , de masse volumique ρ , de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe (O, \hat{u}_z) est $I = \frac{1}{12}bh^3$. L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

□ **5** — On cherche des solutions sous la forme $y(x, t) = f(x)g(t)$. De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

□ **6** — Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. En déduire que $g(t)$ est une fonction périodique de pulsation ω constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution $y(x, t)$ correspondant à la situation étudiée ?

□ **7** — Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

où A, B, C et D sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de β en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0,t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=L,t} = 0$.

□ **8** — Déterminer les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode.

□ **9** — Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondant à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur $h = 1,07$ m (42 pouces) et de largeur $b = 4$ m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de $L_1 = 70$ m, $L_2 = 144$ m et $L_3 = 108$ m. On donne la masse volumique de l'aluminium $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et son module d'Young $E = 69 \times 10^9$ SI.

□ **10** — Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur b . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

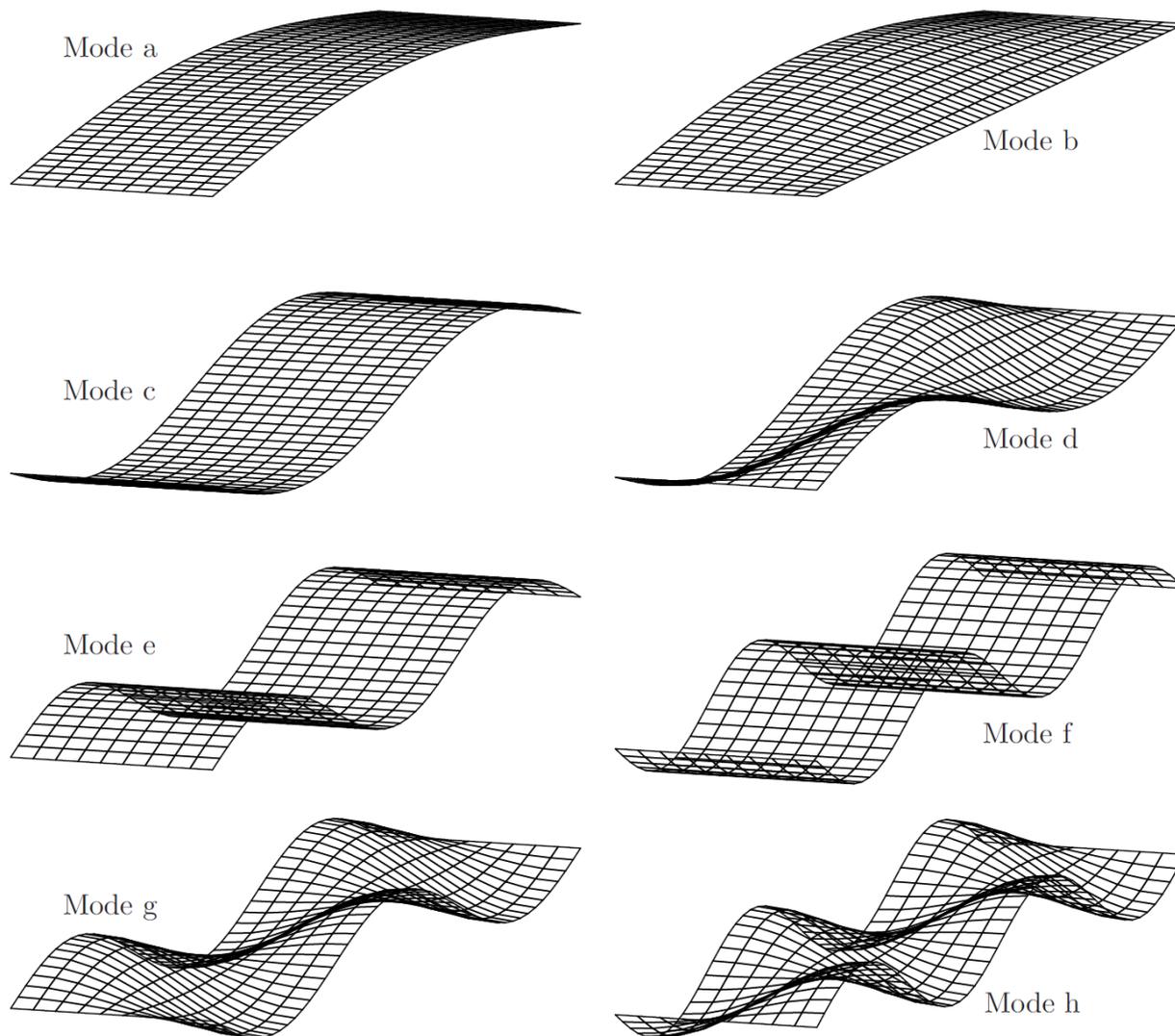


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités