

Correction - DM n°12 : Ondes et déplacements d'équilibres

1 Déplacements d'équilibre pour la réaction de Deacon (facultatif)

Pour la correction, on se reportera au Jupyter Notebook dont le référence est **02a2-1198997** dans Capytale.

2 Oscillations forcées sur une corde

1. La fonction $y(x, t)$ vérifie l'équation de D'Alembert suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve la célérité $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$. On notera que la poulie étant parfaite, la norme de la tension se conserve de chaque côté de celle-ci, l'application du principe fondamental de la dynamique à la masse à l'équilibre montre directement que la tension vaut :

$$T_0 = Mg$$

2. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} y(0, t) = a \cos \omega t \\ y(L, t) = 0 \end{cases}$$

3. Les ondes sont stationnaires d'après l'allure de la corde lors de l'expérience représentée sur la figure dans l'énoncé.

Recherchons donc la solution sous la forme suivante :

$$y(x, t) = A \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \phi)$$

4. Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} a = A \cos \psi \\ \phi = 0 \\ \cos(kL - \psi) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad kL - \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}$$

La solution s'écrit donc :

$$y(x, t) = \frac{a}{\cos \psi} \cos(\omega t) \cos(kx - \psi) = \frac{a}{\cos(kL - \pi/2 - n\pi)} \cos(\omega t) \cos(kx - kL + \pi/2 + n\pi)$$

$$y(x, t) = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x)) (-1)^n}{\sin(kL) \times (-1)^n} = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}$$

5. L'amplitude des vibrations est maximale en un ventre où $\sin(k(L-x)) = \pm 1$ et vaut $\frac{a}{\sin(kL)}$. Il y a donc résonance lorsque $kL = n\pi$, c'est à dire si $\omega = \frac{n\pi c}{L}$ car l'amplitude tend vers l'infini.

6. L'amplitude à la résonance est théoriquement infinie avec le modèle utilisé ici car les frottements et les non-linéarités n'ont pas été considérées.
7. Les vibrations de la corde ne prennent des valeurs importantes que lorsque la pulsation du vibreur correspond à l'excitation de l'un des modes propres, c'est à dire (voir cours) :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathcal{Z}^*$$

$$\nu_n = \frac{nc}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Plus la corde est tendue, plus elle est courte et plus la corde est fine (masse linéique faible), et plus la fréquence augmente. Ceci est bien cohérent avec ce que l'on peut constater sur un instrument à corde.

Remarque : Le fait que la fréquence de résonance soit identique est celle observée pour les oscillations libres n'est pas évidente car ce n'est par exemple par le cas pour une résonance aux bornes de la résistance d'un circuit RLC alimenté par une tension sinusoïdale, qui a lieu pour $f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, alors les oscillations libres d'un circuit RLC se font par l'intermédiaire de pseudo-oscillations à une fréquence légèrement différente $f = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

3 Étude d'une onde électromagnétique

1. Le champ électrique est de la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right] \\ -\frac{E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right] \\ 0 \end{cases}$$

Méthode 1 (avec notation réelle) : L'équation de propagation dans le vide est l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

où c est la célérité de l'onde dans le vide et Δ est l'opérateur laplacien vectoriel défini en coordonnées cartésiennes par

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

et de même pour E_y et E_z .

Ici, l'équation de propagation se décompose sur les 3 vecteurs de base \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z :

$$\begin{cases} \Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier chacune de ces équations.

L'équation suivant \vec{u}_z est OK car $E_z = 0$.

Vérifions l'équation suivant \vec{u}_x .

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

avec

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{3} E_0}{2} \frac{\omega^2}{(2v)^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right]$$

et

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{3} E_0}{2} \frac{(\sqrt{3}\omega)^2}{(2v)^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right]$$

D'autre part, E_x ne dépend pas de z donc

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

On en déduit

$$\Delta E_x = -\frac{\omega^2}{v^2} \frac{\sqrt{3} E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right]$$

D'autre part

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 \frac{\sqrt{3} E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right]$$

L'équation de propagation suivant \vec{u}_x

$$\Delta E_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

est vérifiée si $v^2 = c^2$ soit $\boxed{v = c}$

On vérifie de même l'équation de propagation suivant \vec{u}_y .

Méthode 2 (avec la notation complexe - calculs plus simples) :

On peut écrire le champ électrique sous forme complexe : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\vec{E}_0 = E_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_x - \frac{1}{2} \vec{u}_y \right)$

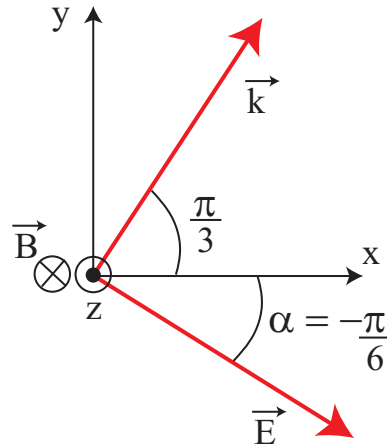
et $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme il s'agit d'une onde dans le vide, le champ \vec{E} vérifie nécessairement l'équa-

tion de D'Alembert : $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} = -\left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E}$ soit $\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$, et donc $\boxed{v = c}$.

2. Les composantes E_x et E_y ne sont déphasées que de π : la polarisation est rectiligne. On vérifie qu'on peut écrire le champ de telle façon que sa direction est fixe au cours du temps :

$$\vec{E} = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2c} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_x - \frac{1}{2} \vec{u}_y \right]$$

On en déduit que la direction du champ fait un angle α défini par $\alpha = (Ox, \vec{E}) = -\frac{\pi}{6}$.



3. Le vecteur d'onde est tel que :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{\omega}{2c} (x + \sqrt{3}y)$$

On en déduit

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que : $\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$ dans le vide. La propagation se fait suivant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe (Ox) (cf schéma). On vérifie également que le champ \vec{E} est bien transverse.

4. Pour calculer \vec{b} utilisons l'équation de Maxwell-Faraday (on peut également utiliser la relation de structure car l'onde est ici une OPPH, ce qui est plus rapide) :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Or

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{E_0 \sqrt{3}}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2c} \right) \right] \\ -\frac{E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2c} \right) \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, on trouve

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{E_0}{2} (1 + \sqrt{3}^2) \frac{\omega}{2c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2c} \right) \right] \vec{u}_z$$

En intégrant par rapport à t , on obtient

$$-\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2c} \right) \right] \vec{u}_z + \text{cste}$$

Les phénomènes de propagation étant liés à des champs variables, aucun champ statique n'est à prendre en compte de sorte que

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + \sqrt{3}y}{2v} \right) \right] \vec{u}_z$$

On vérifie bien que dans le vide $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$.

5. L'onde est bien plane, progressive et harmonique. Par ailleurs, on vérifie bien que l'onde est transverse et que $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre direct (cf schéma).

4 Millenium bridge (d'après Mines-MP-2016)

4.1 Système élastique continu

1. $[E] = \frac{[F][L]}{[S][\Delta L]} = \frac{[F]}{[S]}$, donc le module d'Young est homogène à une pression, et a comme unité le pascal, de symbole Pa.

2. L'allongement vaut $X(x + dx, t) - X(x, t) = \frac{\partial X}{\partial x} dx$, soit une variation relative $\frac{\partial X}{\partial x}$. La force, d'après

la loi de Hooke, vaut donc $ES \frac{\partial X}{\partial x}$; l'orientation étant imposée par l'axe des x , cette force est une force de traction du côté $x + dx$.

Le solide est soumis à deux forces l'une en x (gauche/droite) et l'autre en $x + dx$ (droite/gauche), la résultante vaut $ES \frac{\partial X}{\partial x}(x + dx) - ES \frac{\partial X}{\partial x}(x) = ES \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx$. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient $\rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx$, soit $\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$, i.e. une équation de d'Alembert

de célérité $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

3. On applique le théorème du centre d'inertie au petit élément de longueur dl et de masse élémentaire $dm = \mu dl = \mu \sqrt{dx^2 + dy^2} \approx \mu dx$:

$$\mu dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \mu ds \vec{g} + \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) = \mu dl \vec{g} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx$$

et, en remarquant **que l'on néglige le poids** dans la suite de l'analyse, on obtient donc :

$$\mu dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx.$$

On voit que la projection sur l'axe horizontal donne $T_x(x, t) = T_x(x + dx, t) \approx T_0$ ou bien, comme dans l'équation précédente $\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$.

La projection suivant y donne $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g + \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} \approx \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x}$.

On a supposé que le déplacement latéral $y(x, t)$ était faible, donc l'angle α que fait la tangente à la corde avec l'horizontale est faible lui aussi : $\tan \alpha = \frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{T_y}{T_0} \approx \alpha \ll 1$.

On a donc $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

4. On reconnaît dans l'équation de d'Alembert de la question précédente la célérité de l'onde : $c_\ell = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

4.2 Modèle de la poutre élancée

5. Il s'agit d'ondes stationnaires. Les solutions de ce type correspondent à des systèmes finis avec des conditions aux limites de type grandeur constante (nulle le plus souvent).

6. $\rho S \ddot{g} + I E g^{(4)} = 0$ soit, sans précaution mathématique, $\frac{\rho S \ddot{g}}{I E g} = -\frac{f^{(4)}}{f} = C^{te}$ puisque les deux variables x et t sont indépendantes. Si la constante est négative, l'équation en g est celle d'un oscillateur harmonique. Le fait que la constante soit négative apparaît dans la question suivante !

L'équation en f est d'ordre 4, il y a donc quatre constantes d'intégration à déterminer. L'équation en g est d'ordre 2, il y a donc deux autres constantes d'intégration à déterminer. y s'obtenant comme un produit, on peut regrouper deux constantes multiplicatives, il y a donc cinq constantes à déterminer, tout ceci pour UN mode.

7. L'équation caractéristique s'écrit $r^4 = -C^{te}$. Si la constante est négative, on peut poser $r^4 = \gamma^2$ et supposer sans perte de généralités que $\gamma > 0$. On a donc $r^2 = \pm\gamma$ et $r = \pm\sqrt{\gamma}$ et $r = \pm i\sqrt{\gamma}$. En posant $\sqrt{\gamma} = \beta$, on a bien quatre solutions exponentielles $\exp(\beta x)$, $\exp(-\beta x)$, $\exp(i\beta x)$ et $\exp(-i\beta x)$ qui, combinées conduisent bien à la somme proposée. En reportant dans l'équation obtenue en 15, on a

$$\beta = \left(\frac{\rho S}{I E}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}.$$

Si la constante est positive, on peut poser $r^4 = -\gamma^2$, soit $r = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta$ et $r = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}\beta$; tous les termes possèdent des parties exponentielles ce qui, avec des valeurs aux limites nulles, conduit à la seule solution $f=0$. La constante est bien négative.

8. Les quatre équations aux limites donnent :

$$y(x=0) = 0, A + C = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x=0) = 0, \beta^2(A - C) = 0; \quad \text{soit } A = C = 0.$$

$$y(x=L) = 0, B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x=L) = 0, \beta^2(B \sin(\beta L) - D \sinh(\beta L)) = 0, \text{ système de Cramer qui donne une solution non nulle si le déterminant est nul : } 2 \sin(\beta L) \sinh(\beta L) = 0 \text{ soit}$$

$$\beta_n L = n\pi. \text{ Et donc } \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{I E}{\rho S}}$$

9. On doit avoir aux extrémités une ligne horizontale ce qui est toujours le cas, et donc un noeud aux extrémités. La dérivée seconde nulle aux extrémités est également vérifiée dans tous les cas. On détermine n en comptant les ventres. Les cas qui ne correspondent pas à l'étude sont ceux de la déformation à deux dimensions de la plaque $y = f(x, z)$.

figure	a	b	c	d	e	f	g	h
n	1		2		3	4		
étude	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Non

10. Les fréquences des modes sont en Hz, les longueurs de travée en m.

longueur	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
70	0,50	2,0	4,5	8
144	0,12	0,47	1,06	1,9
108	0,21	0,84	1,9	3,4

Il y a donc résonance possible (fréquence proche de 2 Hz) pour le mode 2,3 ou 4 selon la travée.

Dans le cadre d'une vibration latérale, on intervertit le rôle de b et h .

longueur	$n = 1$	$n = 2$
70	1,9	7,5
144	0,44	1,76
108	0,79	3,1

La vibration latérale suppose une excitation latérale, alternance droite gauche de la marche, donc à 1 Hz. Ce qui correspond à peu près à la fréquence due au premier mode de la travée de 108 m pour la vibration latérale, c'est ce mode qui a posé problème.