

# Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels - Application à la propagation d'ondes dans les plasmas

## Table des matières

<b>I Généralités sur la propagation d'ondes dans un milieu matériel - Exemple de la fibre optique</b>	<b>1</b>
I.1 Cas d'un milieu non absorbant et non dispersif . . . . .	2
I.2 Absorption . . . . .	2
I.3 Dispersion et conséquences sur la transmission d'information . . . . .	2
<b>II 1<sup>er</sup> exemple : propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial avec pertes</b>	<b>5</b>
II.1 Présentation et modélisation . . . . .	5
II.2 Equation de propagation . . . . .	6
II.3 Relation de dispersion . . . . .	6
II.4 Interprétation physique de la solution dans le cas général . . . . .	7
II.5 Retour sur l'exemple de la ligne avec pertes . . . . .	9
II.6 Indice complexe d'un milieu . . . . .	11
<b>III 2<sup>ème</sup> exemple : propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma</b>	<b>12</b>
III.1 Définition d'un plasma . . . . .	12
III.2 Cadre de l'étude . . . . .	14
III.3 Conductivité complexe d'un plasma . . . . .	14
III.4 Equations de Maxwell dans le plasma . . . . .	15
III.5 Caractéristiques du champ électromagnétique dans le plasma . . . . .	15
III.6 Relation de dispersion . . . . .	16
III.7 Pulsation de coupure et vitesse de phase . . . . .	17
III.8 Notion de vitesse de groupe . . . . .	18
III.9 Application à la transmission des ondes radio . . . . .	21

## Introduction

Nous avons vu dans les deux chapitres précédents qu'un grand nombre de phénomènes de propagation étaient régis par une équation de D'Alembert.

Nous avons qualifié ce type de propagation de **non dispersive** dans un milieu transparent (pas d'absorption), c'est à dire que la **relation de dispersion**, reliant la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ , était linéaire et vérifiait :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

**Relation de dispersion pour un phénomène non dispersif et non absorbant**

Nous avons montré que les solutions se propageaient alors **sans déformation**.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux matériels, en tenant compte des phénomènes d'absorption et de dispersion. Après quelques généralités, nous traiterons en détail deux exemples : la propagation d'ondes électromagnétiques dans un câble coaxial, puis dans un plasma.

## I Généralités sur la propagation d'ondes dans un milieu matériel - Exemple de la fibre optique

Afin de comprendre les phénomènes mis en jeu lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel, intéressons nous à un exemple concret qui représente encore aujourd'hui un enjeu technologique et économique important : la transmission d'information dans une fibre optique sous forme d'impulsions lumineuses.

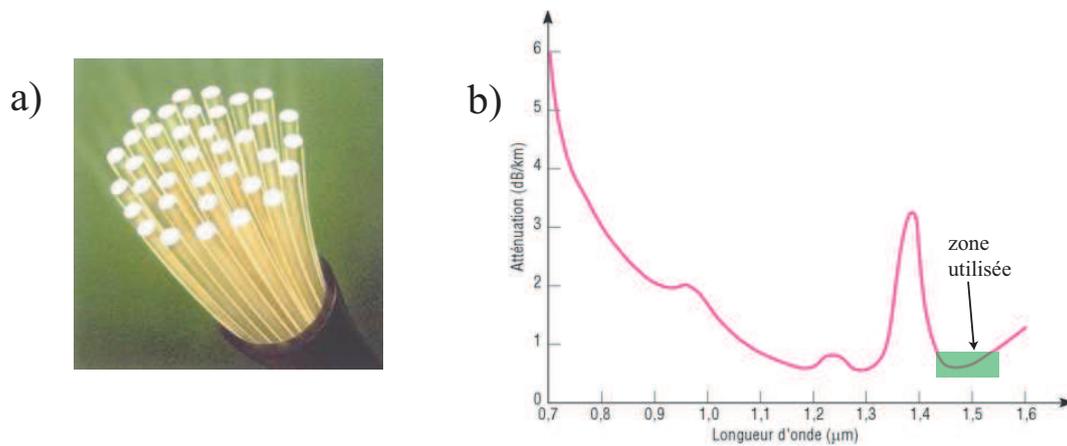


FIGURE 1 – a) *Fibres optiques.* b) *Spectre d'absorption de la silice.*

### I.1 Cas d'un milieu non absorbant et non dispersif

A titre de référence, examinons la propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu **non absorbant** - c'est à dire parfaitement transparent - et **non dispersif**. C'est le cas du vide par exemple, ou de l'air avec une très bonne approximation. Comme le montre la figure 2a) ci-dessous, l'impulsion se propage sans aucune déformation.

Transition : Pour rendre compte de la propagation dans une fibre optique, il faut introduire deux effets fondamentaux : l'**absorption** (ou l'amplification) et la **dispersion** du milieu.

### I.2 Absorption

Afin de reproduire la propagation d'une impulsion dans une fibre optique, il faut tout d'abord tenir compte de l'**absorption** de la silice qui, même si celle-ci est très faible à  $1550\text{nm}$ , atténue<sup>1</sup> globalement la forme de l'impulsion, comme le montre la figure 2b).

L'origine de l'absorption est tout simplement un transfert d'énergie de l'onde électromagnétique vers les ions et les électrons du milieu matériel sous forme d'agitation thermique par l'intermédiaire de la puissance des forces de Lorentz.

### I.3 Dispersion et conséquences sur la transmission d'information

Le second phénomène à prendre en compte est la **dispersion** de la fibre optique, qui a pour conséquence un "élargissement" et un "écrasement" des impulsions lors de leur propagation dans la fibre. On notera que l'écrasement est ici à distinguer d'un amortissement ou d'une absorption car il y a conservation de l'énergie globale. En effet, l'aplatissement de l'impulsion est compensé par son élargissement, de sorte qu'on parle ici de *déformation* de l'onde comme le montre la figure 2c).

Ce dernier phénomène joue un rôle important dans les fibres et doit être soigneusement pris en compte lors de leur utilisation car il pose le problème du brouillage de l'information. En effet, deux impulsions initialement séparées s'étalant lors de leur propagation peuvent aller jusqu'à se confondre (figure 2d)).

1. Les fibres en silice connaissent un minimum d'atténuation vers  $1550\text{nm}$ . Cette longueur d'onde du proche infrarouge est donc privilégiée pour les communications optiques. De nos jours, la maîtrise des procédés de fabrication permet d'atteindre couramment une atténuation en puissance aussi faible que  $0,2\text{dB/km}$  à  $1550\text{nm}$  : après  $100\text{km}$  de propagation, il restera donc encore  $1\%$  de la puissance initialement injectée dans la fibre, ce qui peut être suffisant pour une détection.

Si l'on désire transmettre l'information sur des milliers de kilomètres dans des liaisons trans-océaniques, on a recours à une réamplification périodique du signal, le plus généralement par l'intermédiaire d'amplificateurs optiques (fibre dopée à l'Erbium par exemple).

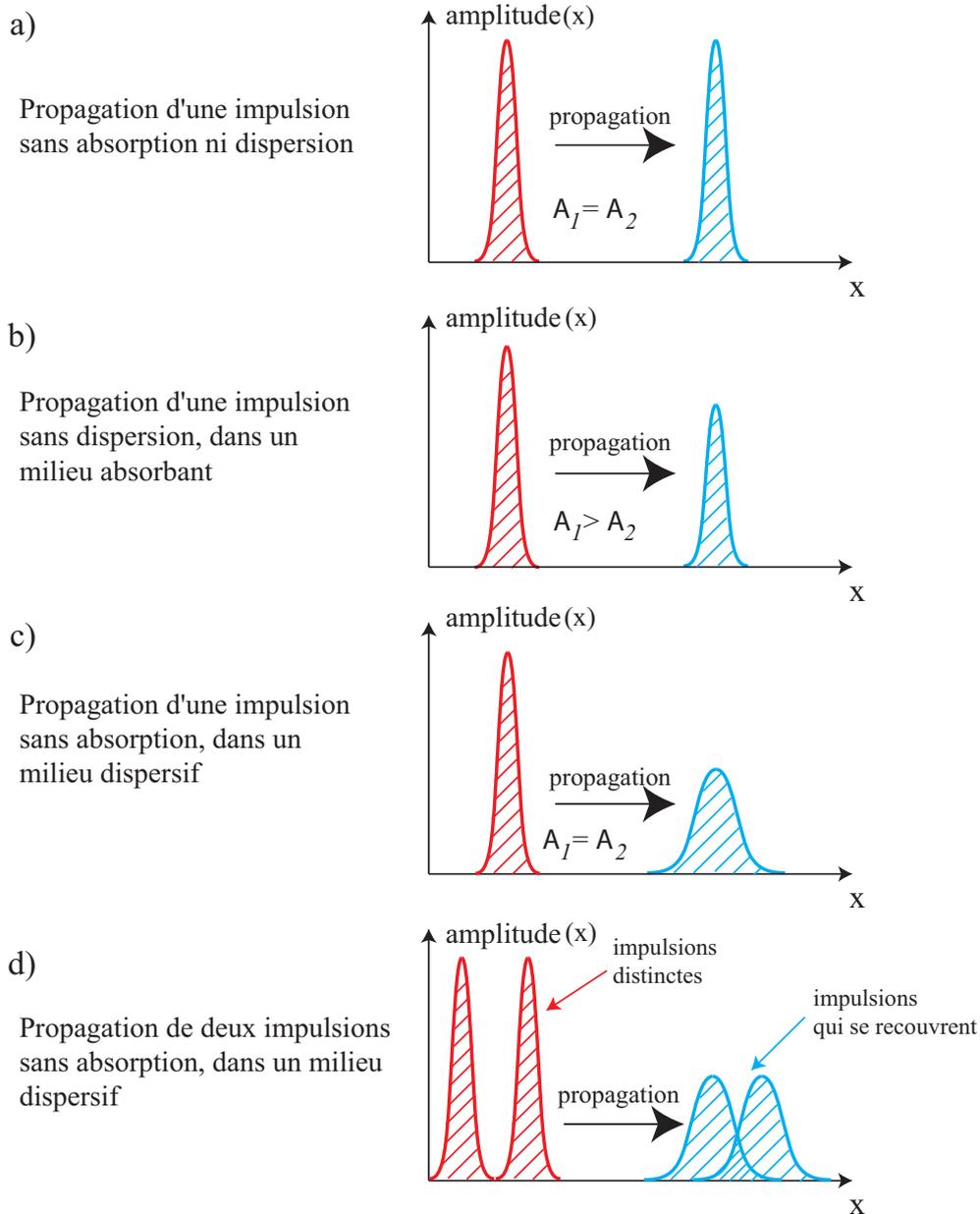


FIGURE 2 – Effet de l'absorption et de la dispersion sur la forme d'impulsions se propageant dans une fibre optique (voir animations 1 à 4). La représentation choisie est ici spatiale mais serait similaire avec la variable temporelle. On notera qu'on a fait figurer une comparaison des aires sous les impulsions dans les trois premiers cas.

Afin de comprendre l'origine de l'"étalement" de l'impulsion dans un milieu dispersif, rappelons tout d'abord que le terme de dispersion a déjà été rencontré en première année, notamment dans l'étude du prisme ou du réseau, et défini par :

**milieu dispersif**  $\Leftrightarrow$  **l'indice optique  $n$  dépend de  $\lambda$**

Or l'indice optique avait été défini par  $n = \frac{c}{v}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $v$  est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu. Dans le cas d'une OPPH, cette vitesse correspond à la vitesse de phase  $v_\varphi$ , de sorte que :

$$n = \frac{c}{v_\varphi}$$

On en déduit donc que, dans un milieu dispersif, la vitesse de phase doit nécessairement dépendre de la longueur d'onde  $\lambda$ , et donc de la fréquence  $f$  et de la pulsation  $\omega$ .

Finalement on retiendra la définition suivante :

**Définition**

<b>milieu dispersif</b>	$\Leftrightarrow$	<b><math>n</math> dépend de <math>\lambda</math></b>	$\Leftrightarrow$	<b><math>v_\varphi</math> dépend de <math>\omega</math></b>
-------------------------	-------------------	--	-------------------	---

Revenons à la déformation d'une impulsion dans un milieu dispersif. Le spectre de l'impulsion est représenté ci-dessous. Il pourrait s'obtenir en appliquant la transformée de Fourier de l'enveloppe temporelle - il a la même allure dans le cas d'une gaussienne comme celle représentée. On admettra que le fait que les deux courbes soient transformées de Fourier l'une l'autre implique que leurs largeurs sont reliées par la relation <sup>2</sup> :

$\Delta t \times \Delta \omega \simeq 1$       **Propriété fondamentale de la TF**

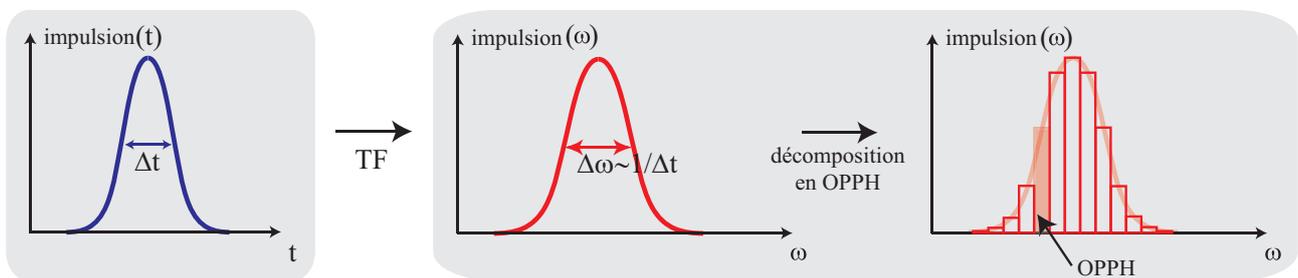


FIGURE 3 – Spectre d'une impulsion, et représentation comme une somme d'OPPH de pulsations légèrement différentes. La position  $x$  a été fixée ici, par exemple à l'entrée de la fibre optique.

En vertu du théorème de Fourier, chaque composante du spectre se comporte comme une OPPH.

Le milieu étant dispersif, chaque composante de pulsation  $\omega$  a donc une vitesse de propagation  $v_\varphi$  différente, de sorte qu'il y a étalement ou contraction du spectre lors de la propagation. Comme l'illustre la figure ci-dessous, si le spectre de l'impulsion se resserre, d'après la relation de la transformée de Fourier inverse, identique à la précédente, cela correspond à un **étalement temporel de l'impulsion**.

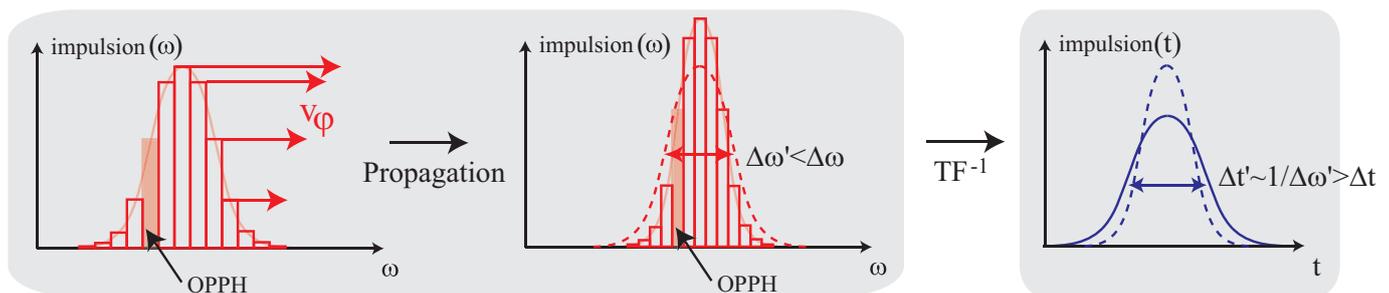


FIGURE 4 – Dans la plupart des milieux, l'impulsion a tendance à se ressermer dans le domaine spectral au cours de la propagation. A l'inverse, l'impulsion s'étaie donc dans le domaine temporel lors de la propagation dans un milieu dispersif. Chaque barre symbolise une OPPH d'énergie constante, et est donc également symbolisé par une surface constante.

Transition : Nous allons maintenant introduire toutes les notions fondamentales de l'absorption et la dispersion sur l'exemple de la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial.

2. Par exemple dans le cas d'une onde monochromatique, on obtient bien  $\Delta \omega \rightarrow 0$ , donc  $\Delta t \simeq \frac{1}{\Delta \omega} \rightarrow \infty$ .

## II 1<sup>er</sup> exemple : propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial avec pertes

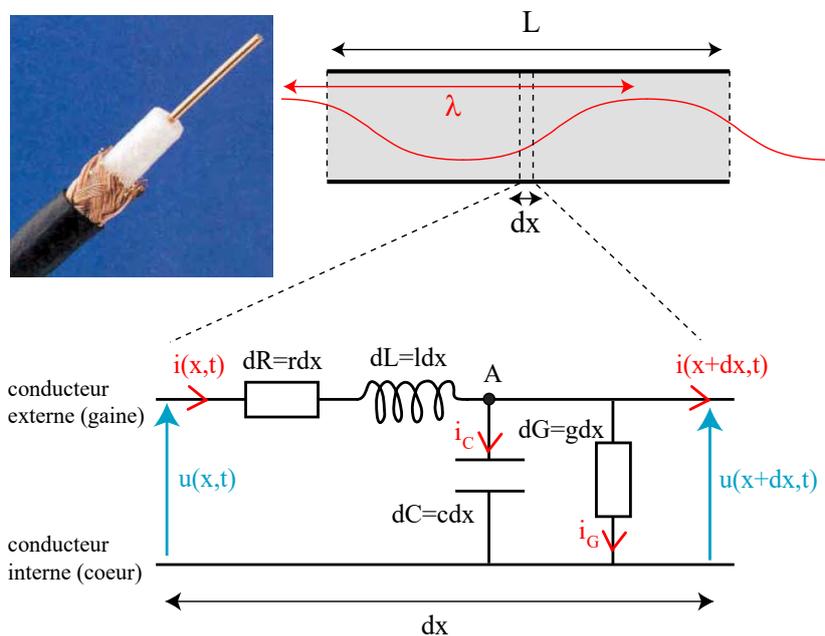
### II.1 Présentation et modélisation

Un câble coaxial est composé de 2 cylindres conducteurs concentriques de rayons respectifs  $a$  et  $b$ , séparés par du vide ou un milieu isolant de comportement similaire (de l'air ou du plastique par exemple).

Afin d'en faire une étude locale, on peut décomposer le câble en petites sections d'épaisseur  $dx$ . On se placera dans le cadre de validité de l'**ARQS** pour chacun de ces petits éléments, de sorte que :

$$dx \ll \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{propagation} = \frac{dx}{c} \ll \frac{\lambda}{c} = T_{caractéristique}$$

Dans ce cadre, courant et tension pourront être considérés comme constants sur la longueur de chaque élément de longueur  $dx$ .



Cependant, courant et tension peuvent varier à l'échelle de la longueur totale  $L$  du câble car  $L \gg dx$ .

On pourra ainsi appliquer l'**approximation des milieux continus**<sup>3</sup> et décrire l'évolution du courant et de la tension à l'échelle du câble par les fonctions de deux variables  $i(x,t)$  et  $u(x,t)$ . On peut alors modéliser chaque longueur  $dx$  de câble par le schéma électrique suivant, appelé *ligne bifilaire*.

On tient compte ici du caractère :

- ▷ *inductif du câble* :  $l$  correspond au coefficient d'auto-induction<sup>4</sup> par unité de longueur de câble.
- ▷ *capacitif du câble* :  $c$  correspond à la capacité<sup>5</sup> par unité de longueur de câble.
- ▷ *résistif des conducteurs* :  $r$  correspond à la résistance des conducteurs par unité de longueur de câble.
- ▷ *résistif de l'isolant entre les deux conducteurs* :  $g$  est la conductance<sup>6</sup> du milieu isolant par unité de longueur.

3. Cf exercice sur les ondes sonores dans les solides (Ex : 2 du TD10)

4. L'origine de l'existence de ce coefficient est la forme cylindrique du conducteur. En présence d'un courant variable circulant dans celui-ci, le champ magnétique variable ainsi généré va créer un flux orthoradial variable à travers le circuit. Cet effet correspond donc bien à une auto-induction.

5. L'effet capacitif du câble provient de la présence d'un isolant entre deux zones conductrices.

6. L'ajout de cette conductance permet de tenir compte du caractère imparfait de l'isolant, et donc de l'existence d'un *courant de fuite* très faible entre les deux conducteurs. Du point de vue des ordres de grandeur, on aura donc  $r_{isolant} = \frac{1}{g} \gg r$ .

## II.2 Equation de propagation

### Remarque

- On vérifie bien que pour une ligne sans pertes ( $r = g = 0$ ), on retrouve une équation de D'Alembert avec une célérité  $C = \frac{1}{\sqrt{lc}}$ , dont on connaît les solutions (superposition d'OPP).
- Cependant, si  $r \neq 0$  ou  $g \neq 0$ , il est facile de vérifier que les OPP ne sont plus solutions particulières de l'équation de propagation. En particulier, on note que l'équation n'est pas invariante sous la transformation  $t \rightarrow -t$  ce qui est caractéristique des phénomènes dissipatifs. L'équation étant cependant **linéaire**, on peut tout de même rechercher des solutions sous la forme d'OPPH. Dans le cas unidimensionnel, on recherchera donc les solutions en posant<sup>a</sup> :

$$\underline{i} = \underline{i}_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

a. On rappelle qu'on peut aussi choisir :  $\underline{i} = \underline{i}_0 e^{j(\omega t - kx)}$  en faisant bien attention dans les calculs. On notera qu'il s'agit ici en réalité d'une pseudo-OPPH car  $k$  sera ensuite potentiellement complexe.

## II.3 Relation de dispersion

## II.4 Interprétation physique de la solution dans le cas général

### a) Expression générale de la solution

D'après la relation de dispersion, dans le cas où  $r \neq 0$  ou  $g \neq 0$ ,  $k$  et  $\omega$  ne peuvent plus simultanément être réels.

Nous allons donc généraliser le cas de la propagation dans un milieu non dispersif pour lequel  $\omega$  et  $k$  sont réels à :

- $\omega$  **réel** : on se limite au **régime permanent**, et on s'interdit ainsi les *régimes transitoires* dans lesquels on observerait un amortissement (terme en  $e^{-\omega t}$ ) ou une amplification exponentielle<sup>7</sup> au cours du temps (terme en  $e^{\omega t}$ ).
- $k$  **est donc a priori complexe** : on le notera donc  $\underline{k}$  par la suite. En résolvant l'équation de dispersion précédente (équation du second degré à coefficients complexes que nous ne chercherons pas à résoudre car on s'intéresse tout d'abord à la méthode générale de résolution d'un tel problème), on obtient deux solutions complexes pour  $\underline{k}$  ; celles-ci sont opposées et correspondent aux deux directions de propagation également opposées ( $+\vec{u}_x$  et  $-\vec{u}_x$ ). Pour plus de clarté, considérons seulement l'une d'entre elles, qui s'écrit :

#### Remarque

L'interprétation des signes de  $k'$  et  $k''$  est relative à la convention choisie pour la phase dans l'exponentielle. Ainsi, avec  $\underline{k} = k' + jk''$

$$\begin{aligned} \exp j(\omega t - \underline{k}x) &\mapsto \exp k''(\omega)x \exp j[\omega t - k'(\omega)x] \\ \exp j(\underline{k}x - \omega t) &\mapsto \exp -k''(\omega)x \exp j[k'(\omega)x - \omega t] \end{aligned}$$

Si  $k' > 0$ , l'onde est progressive dans le sens des  $x$  croissants dans les deux cas. Mais  $k'' > 0$  possède une interprétation différente dans les deux cas. On veillera donc à choisir une convention de signe de la phase et à s'y tenir sous peine d'obtenir des résultats incohérents.

### b) Vitesse de phase - milieu dispersif ou non dispersif

La phase de l'onde s'écrit :

$$\varphi(x, t) = k'(\omega)x - \omega t$$

La direction de propagation de l'onde dépend du signe de  $k'(\omega)$  :

- Si  $k'(\omega) > 0$ , l'onde se propage dans le sens de  $x > 0$ .
- Si  $k'(\omega) < 0$ , l'onde se propage dans le sens de  $x < 0$ .
- Si  $k'(\omega) = 0$ , l'onde ne se propage pas. Elle est stationnaire. Si de plus son amplitude diminue exponentiellement dans l'espace lors de sa propagation, on la qualifie en plus d'**évanescence**. Nous rencontrerons de telles ondes par la suite.

7. En pratique, ces termes d'amplification sont limités par des termes non linéaires.

On définit les **surfaces d'onde** comme les **surfaces équiphasés**, c'est à dire comme l'ensemble des points  $M$  tels que, à  $t$  fixé,  $\varphi(x, t) = cste$ .

On en déduit ici que les surfaces équiphasés sont des **plans** d'équation  $x = \frac{\omega}{k'(\omega)}t + x_0$  où  $x_0$  est une constante.

Ces plans se propagent à la vitesse suivante, appelée **vitesse de phase**, dans le sens des  $x$  croissants si  $k'(\omega) > 0$  ou décroissants si  $k'(\omega) < 0$  :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'(\omega)|}$$

**Propriété**

- *Si la vitesse de phase ne dépend pas de  $\omega$ , comme c'était le cas pour les ondes vérifiant l'équation de D'Alembert, pour lesquelles  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$  : le milieu est non dispersif, et il y a propagation sans déformation d'une impulsion.*
- *Si la vitesse de phase dépend de  $\omega$  : le milieu est dispersif. Si le signal est une superposition d'ondes sinusoïdales, celles-ci ne se propagent pas à la même vitesse. A une certaine abscisse, les ondes sont déphasées les unes par rapport aux autres ; le signal est donc déformé.*

**c) Milieu absorbant ou amplificateur**

L'*amplitude* de l'onde dépend de façon exponentielle de la coordonnée  $x$ , de sorte que, avec la convention choisie précédemment <sup>8</sup>, on obtient :

Convention :  $i(x, t) = i_0 \underbrace{e^{-k''(\omega)x}}_{\text{atténuation ou amplification}} \underbrace{\cos(k'(\omega)x - \omega t)}_{\text{propagation en OPPH}}$

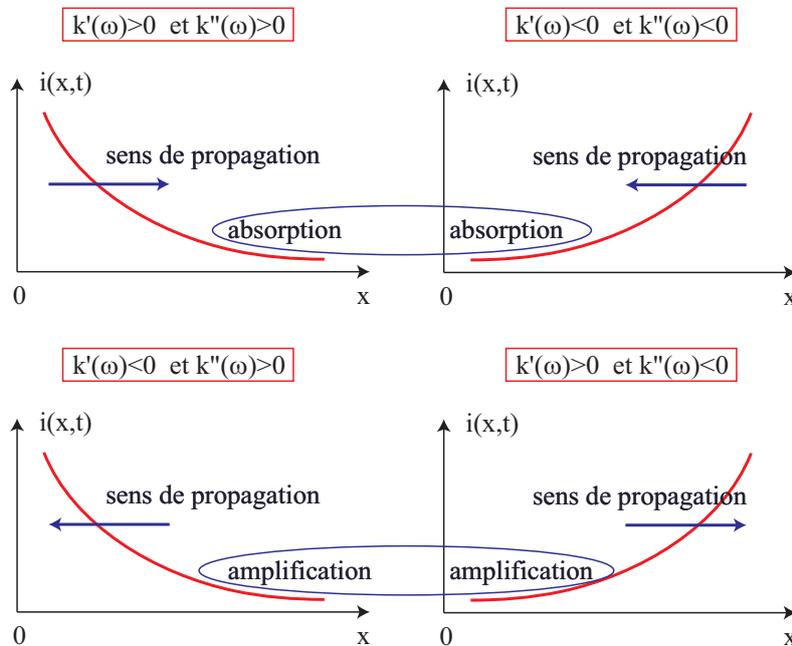


FIGURE 5 – Illustration des propriétés absorbantes ou amplificatrices du milieu en fonction du signe des parties réelles et imaginaires du vecteur d'onde.

8. Attention, tous les résultats sont inversés avec l'autre convention pour la notation complexe. On redémontrera donc les résultats à chaque fois.

Lorsque  $k'(\omega) > 0$  :

- Si  $k''(\omega) > 0$  : le milieu est **absorbant**, et l'onde s'atténue sur une distance caractéristique<sup>9</sup> donnée par :  $\delta = 1/k''(\omega)$ .
- Si  $k''(\omega) < 0$  : le milieu est **amplificateur**. Ce type de milieu est très rare, mais est par exemple utilisé dans les lasers pour amplifier la lumière présente dans la cavité laser et ainsi générer un faisceau intense.
- Si  $k''(\omega) = 0$  : le milieu est **transparent**, c'est à dire qu'il n'est ni absorbant, ni amplificateur.

## II.5 Retour sur l'exemple de la ligne avec pertes

Considérons à nouveau le cas particulier de la ligne avec pertes. On peut mettre la relation de dispersion sous la forme<sup>10</sup> :

$$\underline{k}^2 = \ell c \omega^2 \left[ 1 + j \left( \frac{r}{\ell \omega} + \frac{g}{c \omega} \right) - \frac{rg}{\ell c \omega^2} \right]$$

- Cas 1 :

9. On notera l'analogie avec la profondeur de pénétration ou *épaisseur de peau* dans un conducteur dans l'ARQS.

10. Attention : on retiendra qu'il existe toujours une solution plus simple et moins calculatoire que d'essayer d'identifier les termes après avoir calculé  $\underline{k}^2 = (k' + ik'')^2 = k'^2 - k''^2 - 2ik'k''$ . On peut en général faire un développement limité si la racine n'est pas simple à déterminer directement.

• **Cas 2** : On se place maintenant dans le cas qui correspond davantage à l'expérience, c'est à dire le cas des faibles pertes ou des grandes pulsations, c'est à dire dans le cas où  $r \ll \ell\omega$  et  $g \ll c\omega$ , et donc dans le cas où  $\frac{r}{\ell\omega}$  et  $\frac{g}{c\omega}$  sont des infiniment petits d'ordre 1.

Effectuons maintenant un développement limité de la relation de dispersion à l'ordre 2 pour déterminer les propriétés de la ligne<sup>11</sup> :

$$\underline{k} = \pm\sqrt{\ell c\omega} \left[ 1 + \underbrace{\frac{j}{\omega} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right) - \frac{rg}{\ell c\omega^2}}_X \right]^{1/2} = \pm\sqrt{\ell c\omega} \left[ 1 + \frac{j}{2\omega} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right) - \frac{rg}{2\ell c\omega^2} + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right)^2 \right]$$

La partie réelle et la partie imaginaire de  $\underline{k}$  sont donc données par :

$$k'(\omega) = \pm\sqrt{\ell c\omega} \left[ 1 - \frac{rg}{2\ell c\omega^2} + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad k''(\omega) = \pm\frac{\sqrt{\ell c}}{2} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right)$$

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{1}{\sqrt{\ell c} \left[ 1 - \frac{rg}{2\ell c\omega^2} + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right)^2 \right]} \simeq \frac{1}{\sqrt{\ell c}} \left[ 1 + \frac{rg}{2\ell c\omega^2} - \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{r}{\ell} + \frac{g}{c} \right)^2 \right]$$

Le milieu est donc cette fois **dispersif** puisque la vitesse de phase dépend de  $\omega$ . De plus, le milieu est **absorbant**, puisque comme précédemment,  $k''$  est non nul et de même signe que  $k'$ , avec la même convention, c'est à dire :  $i = i_0 e^{-k''x} \cos(k'x - \omega t)$ .

La figure ci-dessous montre bien l'influence de la propagation d'une impulsion dans un câble coaxial : le milieu est bien à la fois dispersif et absorbant.

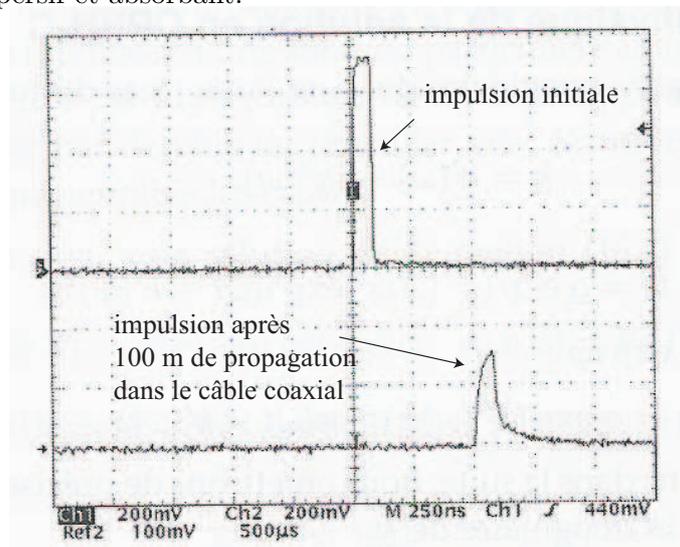


FIGURE 6 – Caractérisation expérimentale de l'effet de l'absorption et de la dispersion d'un câble coaxial sur une impulsion, après 100 m de propagation.

Remarque

|| L'absorption et la dispersion ne sont pas des "fatalités" puisque certains milieux permettent de réamplifier (milieux amplificateurs comme dans les lasers), ou d'empêcher l'étalement de l'impulsion (l'onde qui se propage est alors appelée **soliton**).

Transition : Cherchons maintenant à généraliser la notion d'indice optique, défini pour l'instant par  $n = \frac{c}{v_\varphi}$  puisque nous avons été obligés de généraliser celle de la vitesse de phase.

11. Attention : on ne cherchera surtout pas à résoudre en passant par  $\underline{k}^2 = k'^2 - k''^2 - 2ik'k''$ . Par ailleurs, on rappelle que :  $(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)X^2 + o(X^2)$ , et donc avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  :  $(1 + X)^{1/2} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)$

## II.6 Indice complexe d'un milieu

### a) Définition

#### Définition

On définit l'indice complexe  $\underline{n}$  par référence au vecteur d'onde  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  dans le vide :

$$\boxed{n = \frac{k}{k_0}} \quad \text{soit} \quad \boxed{k = n \frac{\omega}{c}} \quad \text{indice complexe}$$

$\underline{n}$  est complexe, de sorte qu'on sera amené à utiliser les notations suivantes :  $\boxed{\underline{n} = n' + in''}$ , avec <sup>12</sup> :

$$\boxed{n' = \frac{k'}{k_0}} \quad \text{indice de dispersion} \quad \text{soit} \quad \boxed{k' = n' \frac{\omega}{c}}$$

$$\boxed{n'' = \frac{k''}{k_0}} \quad \text{indice d'absorption} \quad \text{soit} \quad \boxed{k'' = n'' \frac{\omega}{c}}$$

### b) Lien avec les propriétés du milieu

La vitesse de phase de l'onde est donc définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{\omega}{n'|k_0|} = \frac{c}{n'} \quad \text{et donc} \quad \boxed{n' = \frac{c}{v_\varphi}}$$

De plus, d'après les résultats du chapitre précédent, le milieu est :

- **dispersif** si  $v_\varphi$  dépend de  $\omega$ , et donc si  $n' = \frac{c}{v_\varphi}$  dépend de  $\omega$ .
- **transparent** ou *non absorbant* si  $k'' = 0$ , et donc si  $n'' = 0$ .

Nous retrouvons ici, pour un milieu transparent, pour lequel  $n' = n$ , la même définition que celle déjà vue en cours d'optique géométrique en première année :

$$n = \frac{c}{v}$$

où  $v$  désigne la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu. La vitesse qui intervient en fait dans la définition de l'indice est donc la vitesse de phase.

Ainsi, l'indice de dispersion  $n'$  doit être identifié à l'indice lumineux  $n$  d'un milieu transparent tel qu'il a été défini en optique.

Cette définition de l'indice optique permet bien de réconcilier les deux définitions de la dispersion, l'une étant reliée au fait que la vitesse de phase dépende de  $\omega$ , et l'autre que l'indice  $n$  du milieu dépende de  $\omega$ .

### c) Phase de l'onde et notion de chemin optique

La phase d'une OPPH dans un milieu s'écrit alors, sachant que  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$  est la longueur d'onde dans le vide :

$$\varphi(x, t) = \omega t - k'x = \omega t - n'k_0x = \omega t - \frac{2\pi n'x}{\lambda_0}$$

On peut réécrire la phase sous la forme :

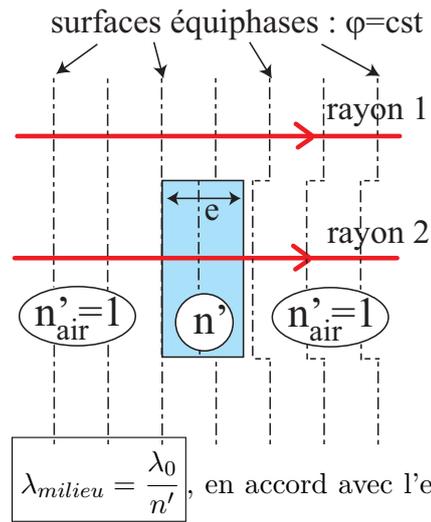
$$\boxed{\varphi(x, t) = \omega t - 2\pi \frac{(x)}{\lambda_0}} \quad \text{avec} \quad \boxed{(x) = n'x} \quad \text{chemin optique}$$

12. On définit parfois la longueur d'onde dans le milieu  $\lambda_{milieu}$  sachant que  $n' = \frac{k'}{k_0} = \frac{2\pi}{\lambda_{milieu}} \frac{\lambda_0}{2\pi} : \lambda_{milieu} = \frac{\lambda_0}{n'}$ .

et où  $x$  est appelé le chemin optique. Cette grandeur est telle qu'une distance  $x$  de propagation dans le milieu d'indice  $n'$  est équivalente vis à vis de la phase à une propagation d'une distance  $x = n'x$  dans le vide.

Par exemple, le déphasage accumulé à la traversée de  $d = 1\text{cm}$  de verre d'indice  $n_{\text{verre}}$  est identique à celui accumulé par la même onde sur une propagation de  $n_{\text{verre}}d = 1.5\text{cm}$  dans le vide.

Dans le schéma ci-contre, on voit que l'onde prend du retard dans le milieu d'indice  $n'$  car la propagation de la phase  $y$  est plus lente :  $v_\varphi = \frac{c}{n'}$ .



On retrouve la *longueur d'onde dans le milieu* définie par :  $\lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda_0}{n'}$ , en accord avec l'expression de la phase :  $\varphi(x, t) = \omega t - \frac{2\pi n' x}{\lambda_0} = \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_{\text{milieu}}}$ . Dans le schéma précédent, on lit bien  $\lambda_{\text{verre}} = \frac{\lambda_0}{1.5}$ .

Remarque

Bien que la longueur d'onde change à l'intérieur de la lame, la fréquence reste identique. La "couleur" de l'onde lumineuse sera donc inchangée dans le milieu. Les objets observés dans de l'eau claire ont effectivement la même couleur que dans l'air!

Transition : Nous allons maintenant utiliser les notions introduites en début de chapitre pour étudier la propagation des ondes dans les plasmas.

### III 2<sup>ème</sup> exemple : propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

#### III.1 Définition d'un plasma

**Définition**

Un plasma est un gaz ionisé, constitué d'ions positifs (cations), et d'électrons, qui reste globalement neutre.

Ce type de gaz est très courant puisqu'il représente 99% de la matière connue : les flammes, les éclairs, les aurores boréales, la haute atmosphère (ionosphère), les poussières d'étoiles (nébuleuses) sont des plasmas naturels.

Les plasmas sont également utilisés dans des applications courantes comme les **tubes fluorescents** appelés improprement "tubes néons" (voir figure ci-dessous), et les **écrans plasmas**, dont le principe de

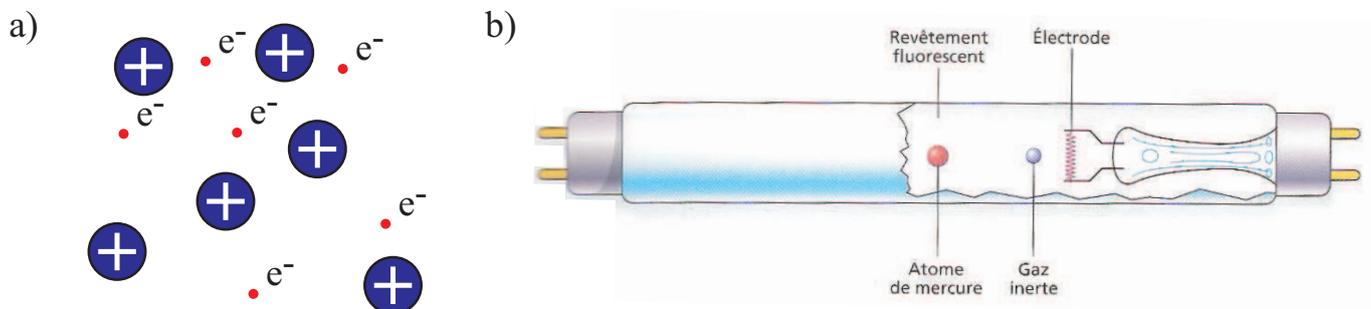


FIGURE 7 – a) Modélisation d'un plasma. b) Tube fluorescent : un gaz inerte (argon) est ionisé sous l'effet de décharges entre des électrodes. Le plasma ainsi créé transfère de l'énergie à des atomes de mercure qui émettent un rayonnement ultraviolet, converti en lumière blanche par un revêtement fluorescent recouvrant la paroi interne du tube fluorescent.

fonctionnement est illustré ci-dessous : de l'argon emprisonné dans de petites cellules est soumis à des décharges électriques de façon à former un plasma. Les ondes émises étant dans l'UV, et donc invisibles à l'œil nu, les cellules sont tapissées de luminophores respectivement rouges, verts et bleus, qui convertissent le rayonnement UV en lumière colorée visible afin de coder toutes les couleurs par addition (RGB).

A titre de comparaison, l'écran LCD fonctionne avec des cellules de cristaux liquides placées entre polariseur et analyseur croisés devant lesquelles sont placés des filtres colorés RGB, éclairées soit par des tubes fluorescents (technologie LCD), soit par des diodes électroluminescentes (technologie LCD-LED).

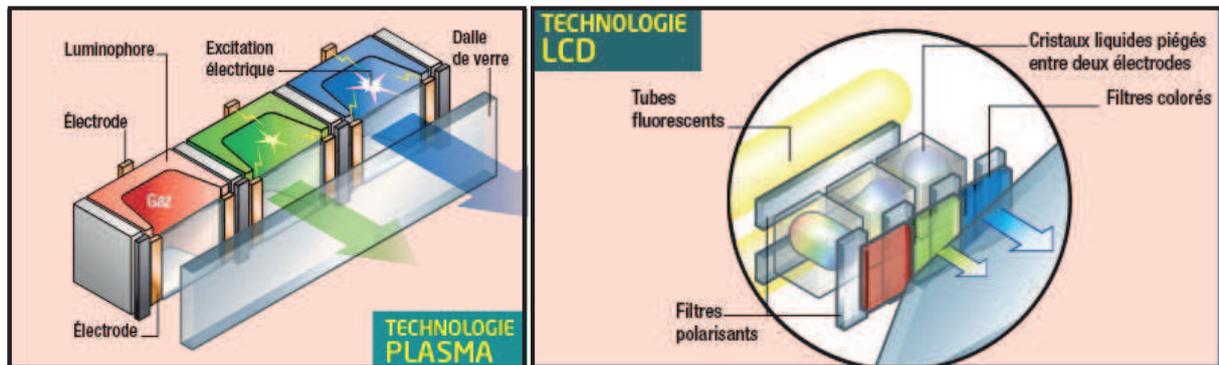


FIGURE 8 – Principe de fonctionnement d'un écran plasma et d'un écran LCD.

Comme le montre la figure ci-dessous, on peut classer les différents types de plasmas en fonction de deux paramètres caractéristiques : leur température électronique<sup>13</sup> et leur densité.

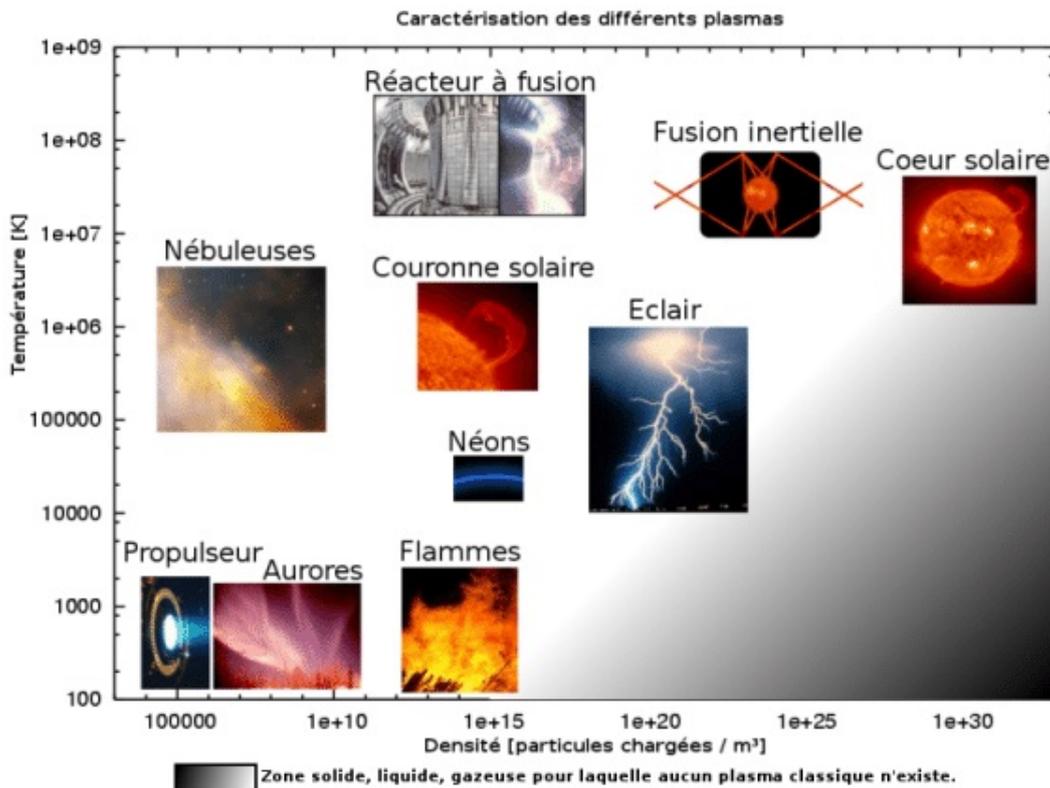


FIGURE 9 – Classification des différents types de plasmas.

13. Cette température est définie thermodynamiquement à partir de l'énergie cinétique des électrons. Elle est telle que :  $k_B T = E_c$ . Ces gaz sont très énergétiques, et les électrons ont une inertie très faible puisque leur masse est environ 2000 fois plus faible que celle des ions. Ceci explique que les températures électroniques soient très élevées, et que la définition habituelle de la température ne soit plus adaptée.

### III.2 Cadre de l'étude

plasma, nous utiliserons un modèle simplifié de plasma dans lequel on le considère :

- **totalelement ionisé** et constitué de *cations* de charge  $+e$  et de masse  $M$ , et d'*électrons*, de charge  $-e$  et de masse  $m$ .
- **homogène** ;
- **peu dense** (ou **dilué**), de sorte que les interaction entre les charges électriques puissent être négligées.
- **neutre**, et il comporte donc  $n_0$  ions positifs et  $n_0$  électrons par unité de volume :

$$\rho = \rho^+ + \rho^- = n_0e - n_0e = 0$$

Nous nous restreindrons, sans perte de généralité comme nous l'avons vu à maintes reprises, à la propagation d'une onde électromagnétique progressive, plane, transverse et monochromatique polarisée rectilignement "*pseudo-(OPPH)*", et nous appellerons  $Ox$  sa direction de propagation.

Sachant que le milieu est neutre, l'équation de Maxwell-Gauss conduit à  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ . Le champ électrique reste donc **transverse**. Le champ électrique de cette onde peut donc se mettre sous la forme générale suivante, en notation complexe<sup>14</sup> :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}(\omega)x)} \vec{u}_y}$$

où le nombre d'onde  $\underline{k}(\omega)$  est *a priori* complexe et dépend de la pulsation  $\omega$  par l'intermédiaire de la relation de dispersion que nous déterminerons par la suite.

### III.3 Conductivité complexe d'un plasma

---

14.  $\vec{E}_0$  est orthogonal à  $\vec{u}_x$  puisque l'onde est transverse et a une direction fixe puisque le champ est polarisé rectilignement. On pourra donc, sans perte de généralité, choisir la direction  $Oy$  suivant ce vecteur, de sorte que  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_y$ . De plus, on a choisi l'origine des temps de manière à ce que  $E_0$  soit réel.

Remarque

La conductivité est imaginaire pure, de sorte  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont déphasés de  $\frac{\pi}{2}$ .

La puissance moyenne  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$  cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges est donc nulle puisque

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \propto \langle \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t - 2kx) \rangle = 0$$

Il n'y a donc pas d'absorption de l'onde électromagnétique dans un plasma, et on s'attend donc à ce qu'un tel milieu soit **transparent** lorsque l'onde se propage.

### III.4 Equations de Maxwell dans le plasma

### III.5 Caractéristiques du champ électromagnétique dans le plasma

### III.6 Relation de dispersion

### III.7 Pulsation de coupure et vitesse de phase

### III.8 Notion de vitesse de groupe

#### a) Etude de la superposition de 2 ondes dans un milieu transparent

Avant de revenir au cas de la propagation d'une onde dans un plasma, examinons tout d'abord la propagation de deux ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de pulsation voisine dans un milieu dispersif ( $v_\varphi$  et  $k$  dépendent donc a priori de  $\omega$ ) et transparent ( $k \in \mathbb{R}$ ).

L'onde résultant de la superposition de 2 OPPH de pulsations voisines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et de même amplitude  $u_0$  est donnée par :

$$u(x, t) = u_0 [\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$$

où  $k_1 = k(\omega_1)$  et  $k_2 = k(\omega_2)$  sont respectivement reliés à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par la relation de dispersion du milieu  $k = f(\omega)$ . La première onde se déplace à la vitesse de phase  $v_{\varphi 1} = \frac{\omega_1}{k_1}$  et la seconde à la vitesse  $v_{\varphi 2} = \frac{\omega_2}{k_2}$ .

On peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$u(x, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Et en posant :  $\delta k = k_1 - k_2$ ,  $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\delta \omega = \omega_1 - \omega_2$  et  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , on obtient :

$$u(x, t) = \underbrace{2u_0 \cos(k_0x - \omega_0t)}_{\text{onde moyenne}} \underbrace{\cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta \omega}{2}t\right)}_{\text{enveloppe}}$$

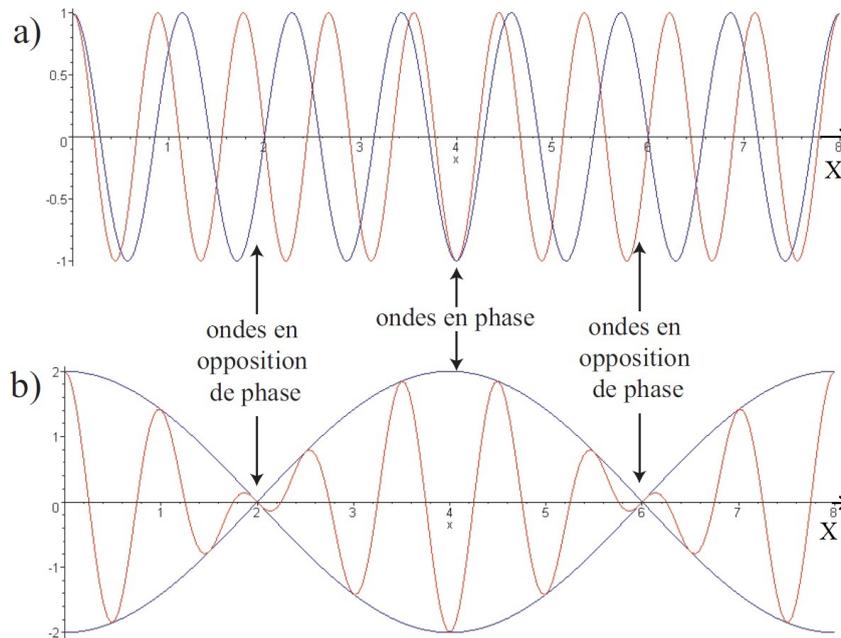


FIGURE 10 – Superposition de deux OPPH de pulsations voisines dans un milieu transparent ("photos", à  $t$  fixé). a) Ondes représentées séparément. b) Représentation de la somme des deux ondes et de l'enveloppe du signal.

La superposition des deux OPPH s'interprète comme le produit de deux ondes :

- ▷ une *onde moyenne* correspondant à une OPPH de pulsation  $\omega_0$  élevée et se déplaçant à la vitesse  $\frac{\omega_0}{k_0}$ .
- ▷ une *onde enveloppe* correspondant à une OPPH de pulsation  $\frac{\delta \omega}{2}$  faible et se déplaçant à la vitesse  $\frac{\delta \omega}{\delta k}$ .

Remarque

- Pour un **milieu non dispersif**,  $k_1 = \frac{\omega_1}{c}$  et  $k_2 = \frac{\omega_2}{c}$ , donc  $\frac{\omega_{moy}}{k_{moy}} = c$  et  $\frac{\delta\omega}{\delta k} = c$  également, et les deux vitesses s'identifient. Il y a déplacement en bloc (voir animation 5).
- En revanche, si le milieu dans lequel se propagent les deux signaux est un **milieu dispersif**, les deux vitesses introduites ici sont en général différentes, de sorte que l'onde globale se déforme au cours de la propagation (voir animation 6).

**b) Généralisation : cas du paquet d'onde**

En généralisant l'étude précédente<sup>15</sup>, on peut voir que deux vitesses sont nécessaires pour caractériser la propagation d'une superposition d'OPPH appelée **paquet d'ondes** (voir animation 7) :

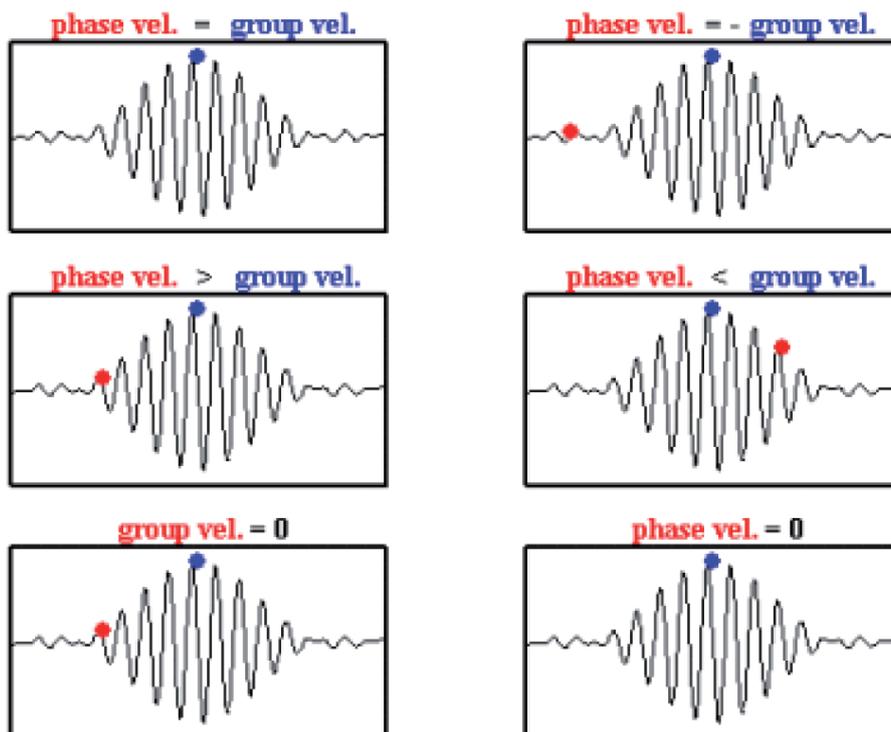


FIGURE 11 – Propagation d'un paquet d'onde (voir animation 7).

**Définition**

- La **vitesse de phase** correspond à la vitesse des OPPH composant un signal :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}$$

- La **vitesse de groupe** correspond à la vitesse de l'enveloppe de onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} < c$$

La vitesse de groupe, qui correspond également à la vitesse d'un paquet d'onde, à la vitesse de propagation de l'énergie et de l'information qu'elle transporte, ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide.

15. Voir également le *Complément sur les paquets d'onde* sur le site de la classe.

**b) Retour au cas du plasma**

Calculons maintenant la vitesse de groupe  $v_g$  dans le cas du plasma par deux méthodes.

Vitesse de phase et vitesse de groupe sont représentées sur la figure ci-dessous. On notera que les deux vitesses vérifient la relation  $v_\varphi v_g = c^2$ .

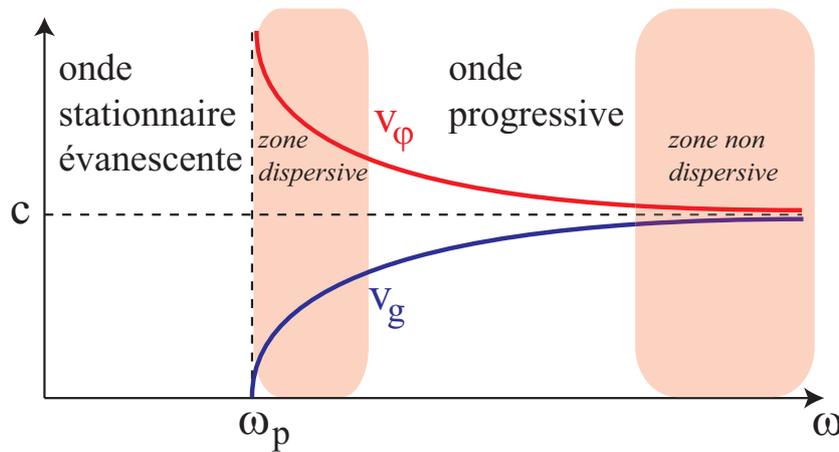


FIGURE 12 – Représentation de la vitesse de phase  $v_\varphi$  et de la vitesse de groupe  $v_g$ . Le plasma agit comme un filtre passe haut puisqu'aucune onde ne peut se propager pour des pulsations inférieures à la pulsation de plasma  $\omega_p$ .

De plus, on remarque que  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_\varphi = c$ , et  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_g = c$ . A haute fréquence, le plasma se comporte donc comme du vide vis à vis de la propagation des ondes. Ceci est cohérent avec le fait que  $\underline{\gamma} \rightarrow 0$ , c'est à dire que le plasma se comporte comme un isolant parfait.

A titre d'application simple, envisageons la propagation de deux "paquets d'onde" de longueurs d'onde moyenne  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ ), émis au même instant par une étoile située à distance  $L$  d'un récepteur situé sur la Terre.

Les deux trains d'onde se propagent à des vitesses de groupe différentes à cause de la dépendance de  $v_g$  avec  $\lambda$ . Ces deux ondes vont donc mettre des temps de parcours différents pour atteindre le récepteur, de sorte qu'elles vont arriver avec un décalage temporel :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{v_g(\lambda_1)} - \frac{L}{v_g(\lambda_2)} = \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2}}} - \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2 \lambda_2^2}{4\pi^2 c^2}}} \simeq \frac{L\omega_p^2}{8\pi^2 c^3}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$$

où on a fait l'hypothèse que le plasma interstellaire caractérisé par  $\omega_p$  était faiblement dispersif. On notera que  $\Delta t > 0$ , ce qui est cohérent avec le fait que  $\lambda_1 > \lambda_2$ , soit  $\omega_1 < \omega_2$ , et donc  $v_g(\lambda_1) < v_g(\lambda_2)$ . Le train d'onde 1 arrive donc après le train d'onde 2.

Transition : Examinons maintenant les conséquences de ces résultats dans un cas concret.

### III.9 Application à la transmission des ondes radio

L'ionosphère est la couche de l'atmosphère située à plus de  $50\text{km}$  d'altitude. Sous l'effet des rayonnements très énergétiques issus principalement du soleil (rayons UV et rayons X dits *rayonnements ionisants*), les atomes de la haute atmosphère sont ionisés, de sorte que l'ionosphère peut être considérée comme un plasma de densité  $n_0 = 10^{10} \text{ electrons.m}^{-3}$ . La pulsation plasma correspondante est  $\omega_p = 6.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ , et la fréquence associée de  $f_p = 900\text{kHz}$ .

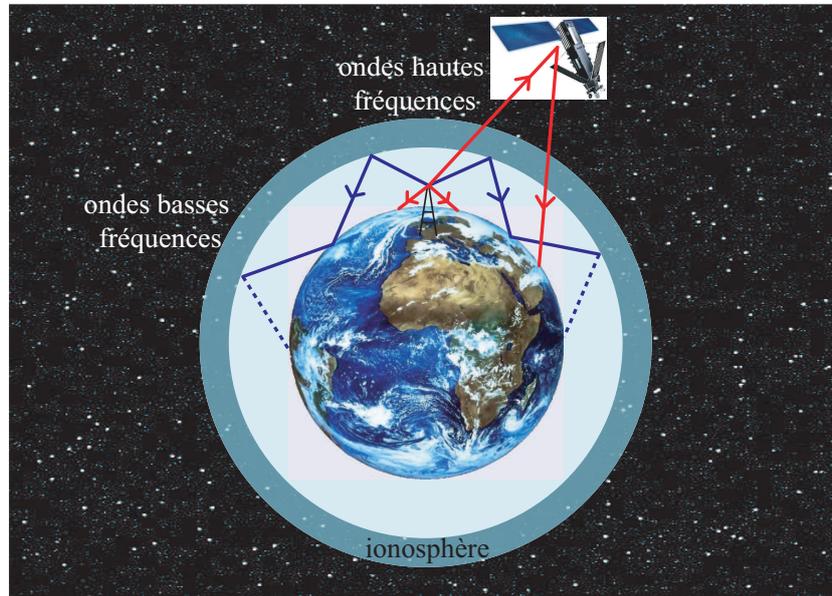


FIGURE 13 – *Transmission des ondes radio. Les basses fréquences sont réfléchies sur l'ionosphère, alors que les hautes fréquences sont transmises.*

D'après ce que nous venons de voir, les ondes électromagnétiques de fréquence inférieure à  $900\text{kHz}$  ne se propagent donc pas dans l'ionosphère. Pour ces ondes, qui comprennent les *grandes ondes* (AM), le sol et l'ionosphère se comportent comme des miroirs et, par réflexions multiples entre les deux, l'onde peut être reçue à plusieurs milliers de kilomètres de l'endroit où elle est émise<sup>16</sup>.

Afin de bien comprendre l'influence de l'ionosphère, envisageons le cas où nos yeux nous permettraient seulement de percevoir les radiations de pulsation  $\omega < \omega_p$ . Nous aurions alors l'impression d'avoir un miroir au dessus de nos têtes...

Les ondes de fréquences supérieures, les ondes radio FM et les ondes de la téléphonie mobile par exemple, dont les fréquences sont respectivement de l'ordre de  $100\text{MHz}$  et de  $1\text{GHz}$ , sont transmises par l'ionosphère (à ces fréquences, l'ionosphère est transparente et peu dispersive), et ont donc une portée plus courte, sauf si elles sont relayées par des satellites<sup>17</sup>.

Les rayonnements du visibles ont une pulsation de l'ordre de  $\omega \simeq 10^{15} \text{ rad.s}^{-1} \gg \omega_p$ . Ceci explique qu'on puisse voir les étoiles pendant la nuit (pendant la journée, les molécules de l'atmosphère diffusent la lumière du soleil, et masquent donc la lumière des étoiles).

## Conclusion

Nous avons examiné l'influence du milieu sur la propagation d'ondes électromagnétiques. Nous étudierons dans le chapitre suivant la propagation des ondes électromagnétiques dans un autre milieu matériel : un conducteur.

16. Ceci explique qu'on puisse recevoir des stations étrangères sur la bande AM.

17. Les ondes des stations FM ne sont reçues qu'à une centaine de kilomètres de leur lieu d'émission, alors que les ondes utilisées pour les téléphones mobiles sont maintenant reçues presque dans le monde entier grâce à l'utilisation de satellites.