

Complément - Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

I Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

Comme nous l'avons déjà évoqué à de nombreuses reprises, un signal réel est une superposition d'OPPH. Avant de nous intéresser au cas général, contentons nous pour l'instant d'étudier la superposition de deux OPPH de pulsations voisines. Ceci nous permettra d'introduire les notions d'enveloppe et d'onde moyenne.

I.1 Propagation de deux OPPH de pulsations voisines

L'onde résultant de la superposition de 2 OPPH de pulsations voisines ω_1 et ω_2 et de même amplitude u_0 est donnée par :

$$u(x, t) = u_0 [\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$$

où k_1 et k_2 sont respectivement reliés à ω_1 et ω_2 par la relation de dispersion du milieu.

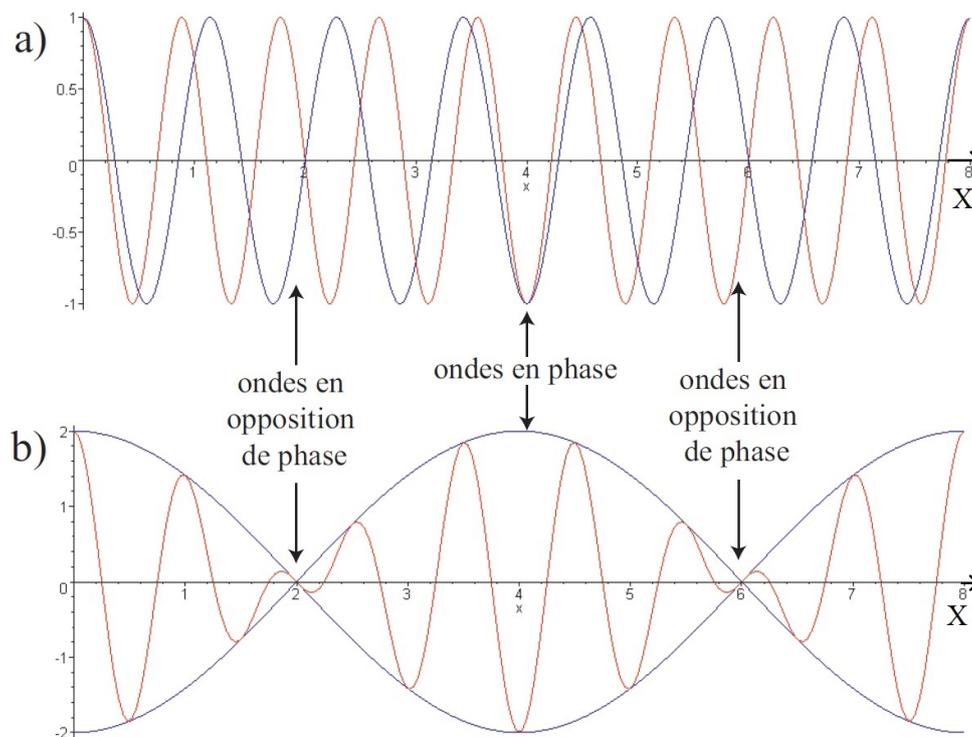


FIGURE 1 – Superposition de deux OPPH de pulsations voisines. a) Ondes représentées séparément. b) Représentation de la somme des deux ondes et de l'enveloppe du signal.

On peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$u(x, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Et en posant : $\delta k = k_1 - k_2$, $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ et $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, on obtient :

$$u(x, t) = 2u_0 \underbrace{\cos(k_0x - \omega_0t)}_{\text{onde moyenne}} \underbrace{\cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t\right)}_{\text{enveloppe}}$$

La superposition des deux OPPH s'interprète comme le produit de deux ondes :

- une *onde moyenne* correspondant à une OPPH de pulsation ω_0 élevée et se déplaçant à la vitesse $\frac{\omega_0}{k_0}$.
- une *onde enveloppe* correspondant à une OPPH de pulsation $\frac{\delta\omega}{2}$ faible et se déplaçant à la vitesse $\frac{\delta\omega}{\delta k}$.

Si le milieu dans lequel se propagent les deux signaux est dispersif, les deux vitesses introduites ici sont en général différentes, de sorte que l'onde globale se déforme au cours de la propagation. Il n'y a donc plus déplacement en bloc comme pour les milieux non dispersifs.

Transition : Nous allons maintenant voir que les résultats obtenus ici se généralisent dans le cas d'un signal réel.

I.2 Comment construire un signal réel ?

En pratique, aucun signal n'est purement monochromatique, car cela imposerait que l'onde ait été créée à l'origine des temps¹. Le spectre d'un signal réel est donc nécessairement étendu, de sorte qu'il possède une largeur caractéristique $\Delta\omega$.

On se limitera dans la suite au cas unidimensionnel pour simplifier, mais la généralisation à trois dimensions ne présente aucune difficulté supplémentaire.

De plus, on se limitera à l'étude de milieux dispersifs, mais non absorbants, de sorte que le nombre d'onde k sera toujours réel, comme la pulsation ω .

a) Construction par superposition discrète d'OPPH

Afin de bien comprendre la notion de paquet d'ondes, cherchons à construire un signal à partir d'une superposition d'OPPH. La figure ci-dessous montre la distribution temporelle d'un signal composé d'un nombre croissant d'OPPH de pulsations légèrement différentes.

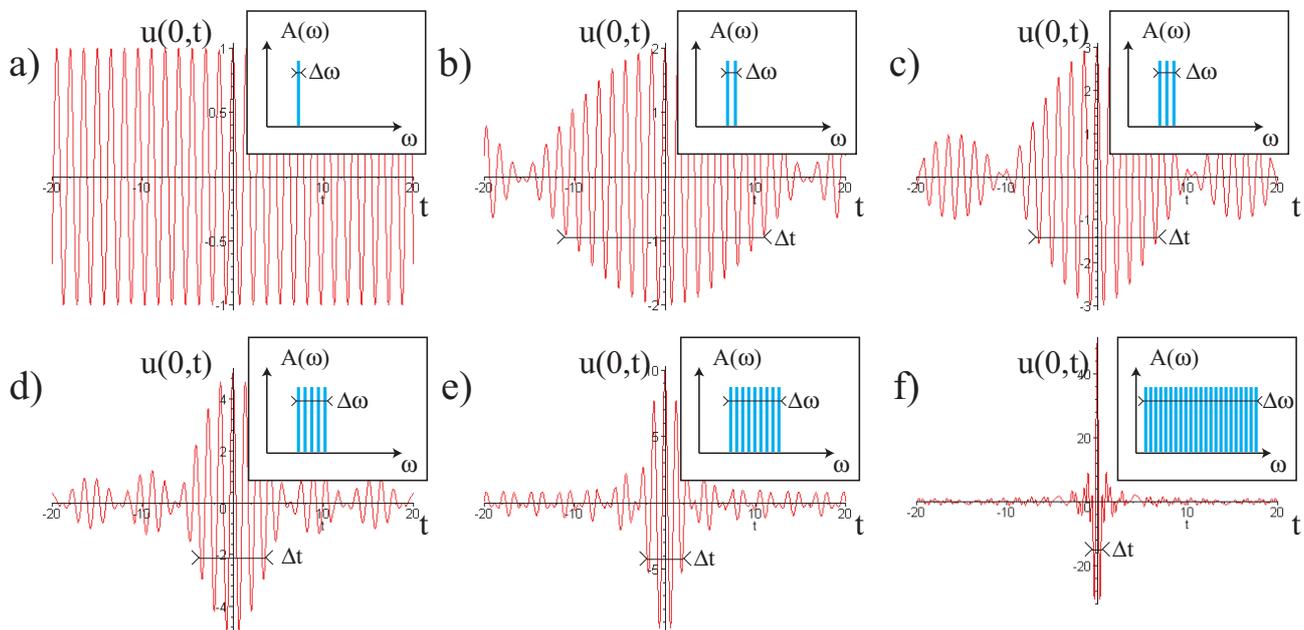


FIGURE 2 – Evolution temporelle d'une superposition d'OPPH de pulsations voisines en $x = 0$ avec une seule (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d), 10 (e), 50 ondes (f). Les encadrés correspondent à leurs spectres respectifs $A(\omega)$.

On voit que plus le nombre d'OPPH de pulsations différentes est important, plus l'onde devient localisée et ressemble à un "paquet d'onde", c'est à dire ici à une impulsion.

1. Même dans le cas d'un faisceau laser, ou d'une raie atomique, grandeurs que l'on qualifie pourtant souvent de monochromatiques, le spectre n'est jamais de largeur nulle.

On peut également remarquer que plus l'écart $\Delta\omega$ entre les pulsations extrêmes du signal est important, plus l'extension temporelle Δt du signal est faible.

Remarque : La formation d'un paquet d'onde par superposition d'ondes permet d'expliquer le phénomène des *vagues scélérates* : en pleine mer, lors d'une tempête, des vagues se propageant dans la même direction et ayant des longueurs d'ondes différentes peuvent ponctuellement se retrouver en phase² et donner naissance à des vagues de plus de 20 m de haut.

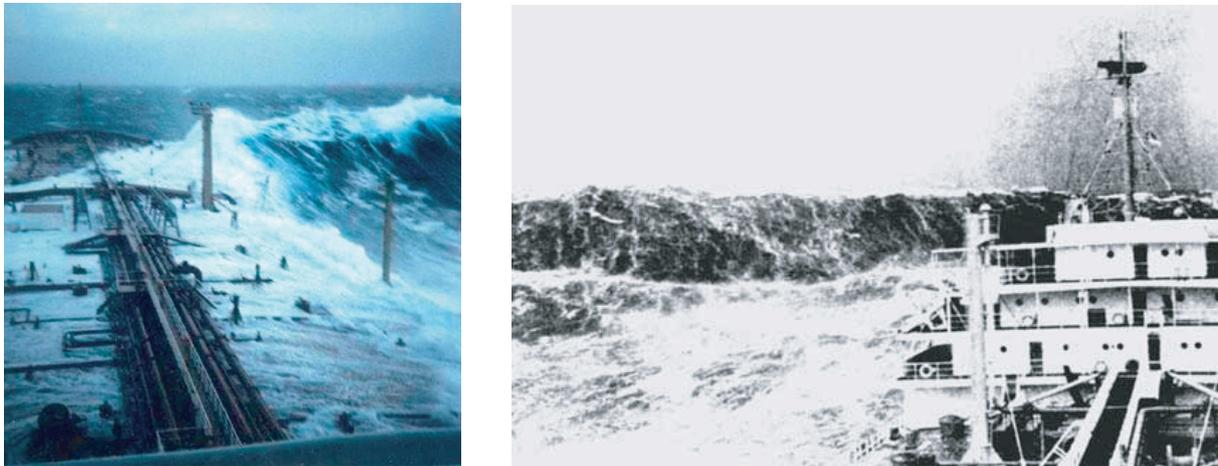


FIGURE 3 – Vagues scélérates lors d'une tempête en pleine mer.

b) Construction par superposition continue d'OPPH - transformée de Fourier

Dans le cas le plus général, en notant $u(x, t)$ l'amplitude d'une onde réelle, on peut écrire, en utilisant l'analyse de Fourier³ :

$$u(x, t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\text{superposition continue}} \underbrace{e^{j(\omega t - k(\omega)x)}}_{\text{onde plane}} \underbrace{\underline{A}(\omega)}_{\text{poids de chaque composante}} d\omega \quad (1)$$

L'onde réelle correspond ainsi à une superposition continue d'OPPH dont les pulsations s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$ dans le cas général. On admettra que le fait de sommer les contributions d'ondes de pulsations négatives permet d'assurer que la fonction $u(x, t)$ reste réelle⁴, malgré les termes complexes $e^{j(\omega t - k(\omega)x)}$ et $\underline{A}(\omega)$.

L'analyse de Fourier, qui sort du cadre du programme, mais que nous avons déjà évoquée à plusieurs reprises, permet de faire le lien entre la représentation temporelle d'une onde et son spectre.

On donne ci-dessous les spectres des 2 ondes réelles les plus couramment rencontrées, qui ont été calculés grâce à l'analyse de Fourier⁵, et que nous rencontrerons à nouveau en optique ondulatoire dans la modélisation de la diffraction par une fente :

2. On parle alors d'*interférences constructives*. On notera que des non linéarités interviennent également afin d'expliquer l'importance du phénomène.

3. La fonction mathématique introduite ici s'appelle la *transformée de Fourier*. : $u = TF(A)$

4. On peut montrer simplement que cela implique que $k(-\omega) = -k(\omega)$ et $\underline{A}(-\omega) = \underline{A}^*(\omega)$.

5. La fonction utilisée ici correspond à une transformée de Fourier inverse qui permet d'écrire le spectre $A(\omega)$ en fonction du signal $u(0, t)$ en $x = 0$:

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} u(0, t) d\omega$$

- *Signal rect*

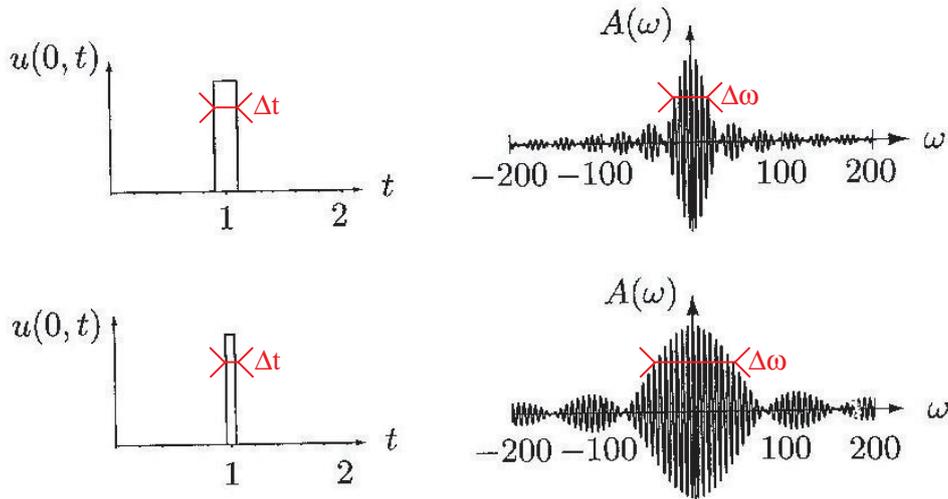


FIGURE 4 – *Signal rectangulaire et son spectre pour deux largeurs différentes de signaux.*

- *Signal gaussien :*

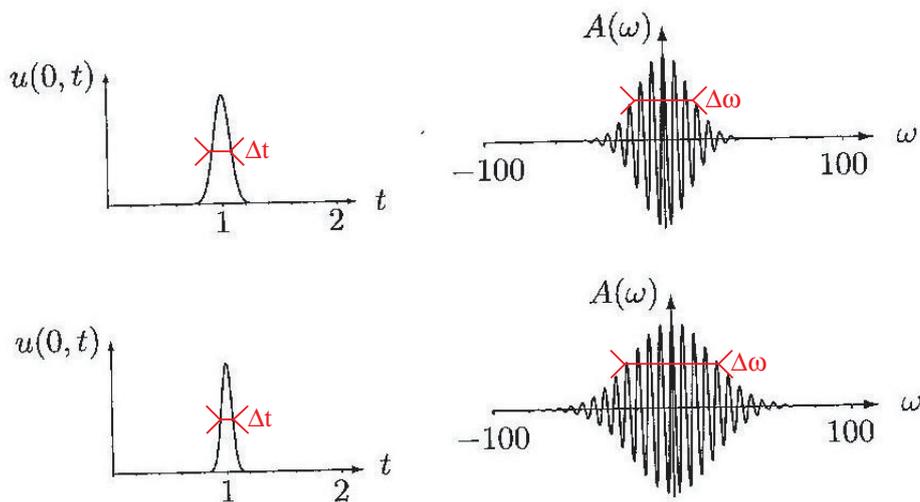


FIGURE 5 – *Signal gaussien et son spectre pour deux largeurs différentes de signaux.*

Comme dans les cas précédents, on vérifie toujours que plus l'impulsion - ou l'onde - est brève, c'est à dire plus Δt est petit, plus son spectre est large, c'est à dire plus $\Delta \omega$ est grand.

Ceci est lié à une propriété fondamentale de la transformée de Fourier. En effet pour deux variables conjuguées comme t et ω , cela entraîne⁶ :

$$\Delta t \Delta \omega \simeq 1$$

D'après la première relation, on retrouve bien qu'une OPPH composée d'une seule fréquence, donc ayant un spectre de largeur nulle, c'est à dire $\Delta \omega \rightarrow 0$, est non physique car cela imposerait $\Delta t = \frac{1}{\Delta \omega} \rightarrow \infty$, c'est à dire une extension temporelle infinie.

6. On notera la similarité avec les inégalités de Heisenberg. De telles inégalités peuvent être démontrées en mécanique quantique entre des variables qui ne commutent pas.

I.3 Propagation d'un paquet d'onde

a) Vitesse de phase et vitesse de groupe

Cherchons maintenant à caractériser la propagation d'un paquet d'onde dont le spectre ne prend des valeurs non négligeables que dans un intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$, avec $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Pour cela, réécrivons la relation (1) entre le signal réel $u(x, t)$ et son spectre $\underline{A}(\omega)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega t - k(\omega)x)} \underline{A}(\omega) d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[(\omega - \omega_0)t - (k(\omega) - k_0)x]} \underline{A}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

où k_0 correspond à $k(\omega_0)$.

En se limitant à un développement limité de la relation de dispersion au premier ordre en $\Delta\omega$, sachant que $\Delta\omega \ll \omega_0$, on obtient :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}$$

Et en réinjectant cette relation dans l'expression de $u(x, t)$, on obtient :

$$u(x, t) = \underbrace{e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}}_{\text{onde moyenne}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_0) \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} x \right]} \underline{A}(\omega) d\omega}_{\text{onde enveloppe}}$$

Comme dans le cas du battement entre 2 OPPH, on peut écrire le paquet d'onde comme le produit de 2 ondes planes :

- *une onde moyenne* se propageant à la vitesse de phase :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}} \quad \text{Vitesse de phase}$$

correspondant à l'onde "intérieure", de pulsation - et donc de fréquence - élevée ω_0 .

- *une onde enveloppe* se propageant à la vitesse de groupe :

$$\boxed{v_g = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}} \quad \text{Vitesse de groupe}$$

correspondant à l'"enveloppe" puisqu'elle oscille à une pulsation $\omega - \omega_0 < \Delta\omega \ll \omega_0$ plus faible que celle de l'onde précédente.

Propriété

On voit ici que v_g apparaît comme la *vitesse de propagation de l'énergie*, ou la *vitesse de propagation de l'information*, car l'énergie et l'information recueillie par les détecteurs sont proportionnelles à $|u(x, t)|^2$, donc seulement à l'enveloppe ^a.

a. Attention, on notera que ceci n'est plus vrai dans un milieu absorbant.

Transition : le paquet d'onde s'est propagé ici sans distorsion, c'est à dire que la forme de l'enveloppe ne s'est pas modifiée car la vitesse de groupe ne dépend pas de ω .

b) Déformation du paquet d'onde lors de sa propagation

Prenons maintenant en compte le développement de la relation de dispersion au second ordre autour de ω_0 :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}$$

On peut réécrire ce développement en faisant intervenir la vitesse de groupe v_g :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left[\frac{1}{v_g} + \frac{(\omega - \omega_0)}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \right]$$

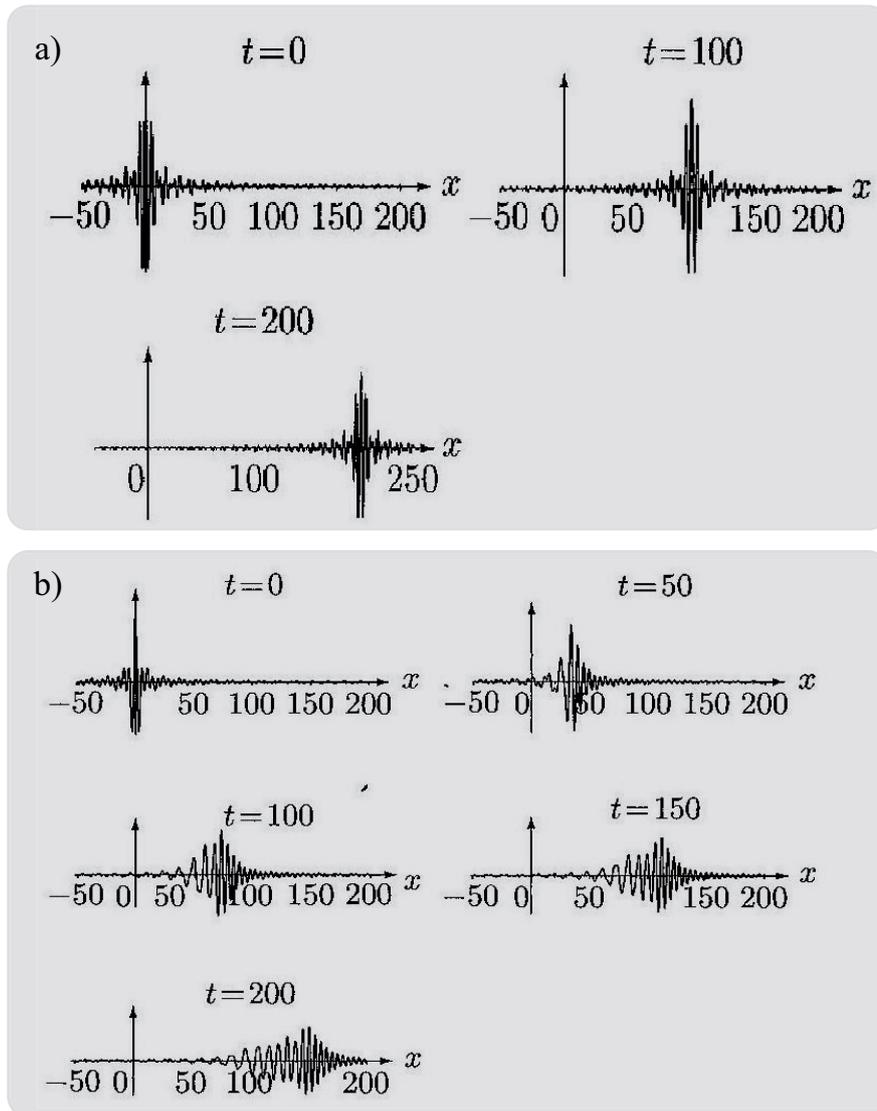


FIGURE 6 – a) Dans un milieu non dispersif, un paquet d'ondes se propage sans se déformer. b) Dans un milieu dispersif, un paquet d'ondes se déforme au cours de sa propagation.

En réinjectant dans l'expression (1), on fait apparaître le même type d'équation que précédemment, mais avec cette fois une enveloppe qui se propage à la vitesse :

$$v(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{v_g} + \frac{(\omega - \omega_0)}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}}$$

Cette vitesse dépend de la pulsation, de sorte que chacune des composantes du paquet d'onde se propage à une vitesse différente et l'enveloppe se déforme au cours de la propagation : il y a *dispersion* dans le cas général

comme le montre la figure ci-dessus (dans le premier cas, le milieu est tel que les termes d'ordre supérieurs à 1 en $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ sont nuls de sorte qu'il n'y a pas dispersion).

Lorsque le milieu est dispersif, comme nous l'avons vu en introduction du chapitre complet, une impulsion s'étale et son amplitude diminue par conservation de l'énergie. De plus, ce phénomène de déformation est d'autant plus important que le spectre de l'impulsion est large, c'est à dire d'autant plus que l'impulsion est brève.

Ainsi, par exemple, la recherche du débit maximal dans une fibre optique ne se limite pas simplement à générer des impulsions les plus courtes possibles puisque celles-ci se recouvriraient très rapidement, mais à trouver un compromis entre brièveté de l'impulsion et étalement.