

## Correction - DM n°13 : Ondes dans les milieux matériels

### 1 Ondes mécaniques sur des pendules couplés

#### A. Détermination de l'équation d'onde

1. Les ondes sont transverses puisque le mouvement de la pendule ( $n$ ) se fait dans le plan ( $O_n yz$ ) perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde  $\vec{u}_x$ .
2. Chaque pendule est soumise à son poids, aux actions exercées par les fils de torsion reliés à ses deux voisins, et au couple de frottement fluides. Le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe  $O_n$  dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen s'écrit en projection sur l'axe  $O_n y$ , sachant que le moment de la force de réaction est nul car cette dernière s'applique sur l'axe  $O_n x$  :

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}_n = -C(\theta_n - \theta_{n+1}) - C(\theta_n - \theta_{n-1}) - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta_n - f\dot{\theta}_n$$

Afin de déterminer les signes des couples de torsion, nous avons utilisé le fait que :

- si  $\theta_n > \theta_{n+1}$  : la barre  $n+1$  a tendance à faire tourner la barre  $n$  dans le sens négatif avec l'orientation choisie sur la figure.
  - si  $\theta_n > \theta_{n-1}$  : de même, la barre  $n-1$  a tendance à faire tourner la barre  $n$  dans le sens négatif avec l'orientation choisie sur la figure.
3. En utilisant l'approximation des milieux continus, on obtient :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -C[\theta(x,t) - \theta(x+d,t)] - C[\theta(x,t) - \theta(x-d,t)] - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

4. En utilisant les développements de Taylor à l'ordre 2 suivants :

$$\theta(x+d,t) = \theta(x,t) + d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \theta(x-d,t) = \theta(x,t) - d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

en réinjectant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Cd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

On obtient donc une équation aux dérivées partielles non linéaire à cause du terme  $\sin\theta$ .

5. Dans l'approximation des petits mouvements,  $\theta$  reste faible de sorte qu'on peut écrire :  $\sin\theta \simeq \theta$ , et l'équation précédente devient linéaire :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Cd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2}\theta - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

L'approximation des petits mouvements correspond donc à une linéarisation.

On notera qu'on retrouve bien une équation de D'Alembert si on néglige l'influence du poids et des frottements, et on obtient une célérité  $c = \sqrt{\frac{3Cd^2}{m\ell^2}}$ .

## B. Propriétés du milieu lors de la propagation d'une onde plane progressive harmonique

1. L'équation précédente étant linéaire, on peut utiliser la notation complexe. En réinjectant l'expression complexe de  $\theta$ , on obtient :

$$\left( \frac{m\ell^2\omega^2}{3} - Cd^2\underline{k}^2 - \frac{mg\ell}{2} - jf\omega \right) \underline{\theta} = 0$$

Nous obtenons ainsi pour  $\theta \neq 0$  la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = \frac{m\ell^2\omega^2}{3Cd^2} - \frac{mg\ell}{2Cd^2} - \frac{jf\omega}{Cd^2}$$

On vérifie ici que si  $\omega$  est réel,  $\underline{k}$  est nécessairement complexe.

2. Si  $\omega$  est très important, les termes  $\frac{mg\ell}{2Cd^2}$  et  $\frac{jf\omega}{Cd^2}$  sont négligeables devant celui en  $\omega^2$ , et on obtient la nouvelle relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{m\ell^2\omega^2}{3Cd^2}$$

Dans ce cas :

$$k' = \sqrt{\frac{m\ell^2}{3Cd^2}}\omega \quad \text{et} \quad k'' = 0$$

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{m\ell^2}}$$

La vitesse de phase est indépendante de  $\omega$ , donc le milieu est non dispersif. De plus,  $k'' = 0$ , donc on peut écrire :

$$\underline{\theta} = \underline{A}e^{j(\omega t - k'x)}$$

et le milieu est non absorbant.

Il n'est pas surprenant de retrouver ce résultat car on a négligé la pesanteur et les frottements dans ce cas, et on est ramenés au cas déjà évoqué précédemment de l'équation de D'Alembert. Deux ondes peuvent se propager en sens opposés, suivant le signe de  $k'$ .

D'après l'expression de  $k'$ , la vitesse de groupe s'identifie ici à la vitesse de phase de sorte que :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = v_\varphi$$

3. Dans ce second cas, la relation de dispersion devient :

$$\underline{k}^2 = \frac{m\ell^2\omega^2}{3Cd^2} - \frac{jf\omega}{Cd^2}$$

En utilisant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{m\ell^2\omega^2}{3Cd^2}} \sqrt{1 - \frac{3jf}{m\ell^2\omega}} \simeq \omega \sqrt{\frac{m\ell^2}{3Cd^2}} \left( 1 - \frac{3jf}{2m\ell^2\omega} \right)$$

et donc :

$$k' = \pm \sqrt{\frac{m\ell^2}{3Cd^2}}\omega \quad \text{et} \quad k'' = \mp f \sqrt{\frac{3}{4m\ell^2Cd^2}}$$

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{m\ell^2}}$$

La vitesse de phase est indépendante de  $\omega$ , donc le milieu reste non dispersif.

De plus, on rappelle qu'avec la convention choisie, on peut écrire :

$$\theta = \underline{A} e^{k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$$

donc pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  positifs, on doit avoir  $k' > 0$ , donc  $k'' < 0$ , donc le milieu est absorbant<sup>1</sup>. L'amortissement se fait sur une distance caractéristique  $\delta = \frac{1}{|k''|} = \sqrt{\frac{4ml^2Cd^2}{3f^2}}$ . On voit que l'amortissement est directement relié au couple de frottement, et que la distance caractéristique d'amortissement est d'autant plus faible que  $f$  est grand.

Par ailleurs, on a toujours :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = v_\varphi$$

4. La relation de dispersion précédente devient, en posant  $f = 0$  :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$$

en posant<sup>2</sup>

$$c = \sqrt{\frac{3Cd^2}{ml^2}} \quad \text{et} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

• Si  $\omega > \omega_c$ ,  $k^2 > 0$  et le nombre d'onde est réel, avec  $k' = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$  et  $k'' = 0$ . La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = c \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}}$$

Celle-ci dépend de la pulsation donc le milieu est dispersif. En revanche, il est non absorbant car  $k'' = 0$ , ce qui est cohérent puisqu'on a négligé les frottements.

On notera que  $v_\varphi > c$ , ce qui n'est pas en contradiction avec le principe de relativité d'Einstein, car l'OPPH n'a pas de réalité physique seule, et c'est la vitesse de groupe qui caractérise la propagation de l'information. Celle-ci s'obtient en différenciant la relation de dispersion comme dans le cours sur les plasmas. On obtient :

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}}}$$

et on vérifie bien que cette valeur est inférieure à  $c$ .

• Si  $\omega < \omega_c$ ,  $k^2 < 0$ , et le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$k' = 0 \quad \text{et} \quad k'' = \pm \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}$$

Afin d'interpréter ce cas, revenons à l'expression réelle de  $\theta(x, t)$ . On obtient :

$$\theta(x, t) = A e^{k''x} \cos(\omega t)$$

où le signe de  $k''$  peut être déterminé en fonction des conditions aux limites.

1. On obtient le même résultat avec une onde se propageant dans la direction opposée.

2. On se ramène exactement à la relation de dispersion vue en cours dans le cas de la propagation des ondes dans un plasma.

La vitesse de phase est nulle, mais le milieu est absorbant. Les variables spatiales et temporelles sont découplées, de sorte qu'on a affaire ici à une onde stationnaire, ce qui est cohérent avec le fait que la vitesse de phase soit nulle. Cependant, contrairement à ce que nous avons vu jusqu'à présent, il n'y a ni ventres ni noeuds. L'onde stationnaire décroissant exponentiellement avec une coordonnées de l'espace est en général appelée onde stationnaire évanescence.

Une onde ne peut se propager que pour  $\omega > \omega_c$ , et la chaîne de pendule joue le rôle d'un **filtre passe-haut**.

## 2 Oscillations de la densité de charge dans un métal ou un plasma non dilué

1) On applique le PFD -à un électron libre de masse  $m$ : (modèle de Drude)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \underbrace{e\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\substack{\uparrow \text{négligeable car } e \text{ non relativiste}}} \cdot m \frac{\vec{v}}{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e\vec{E}}{m}}$$

$$\text{Or } \vec{j} = q \cdot \vec{v} + \underbrace{q_+ \vec{v}_+}_{\substack{\uparrow \text{négligeable car ions fixe} \\ \text{dans le métal.}}} = -en_0 \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{e^2 n_0 \vec{E}}{m}} \quad (*) \quad (\text{en R.P., on retrouve la loi d'ohm locale})$$

2) On utilise l'équation de la conservation de la charge:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$

On fait  $\text{div} (*)$  et on a:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_0^2 \rho = 0}$$

$$\text{avec } \omega_0 = e \sqrt{\frac{n_0}{m \epsilon_0}}$$

$\uparrow$  terme ajouté / au cours

3) En régime pseudo périodique, on a:  $\rightarrow$

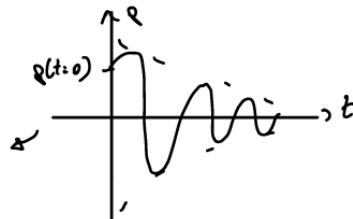
L'éq caractéristique donne:  $r^2 + \frac{1}{\tau} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0$$

$$\text{Donc } r_1 = -\frac{1}{2\tau} + i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 \tau^2 - 1}}{2\tau}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2\tau} - i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 \tau^2 - 1}}{2\tau}$$

$\rightarrow \Omega$  la pseudo pulsation



Solution de la forme :

$$\boxed{\rho(t) = e^{\text{Re}(\lambda_{1/2} t)} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}$$

Ici on a: 
$$q(t) = e^{-\frac{1}{2T}t} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{4\omega_0^2 T^2 - 1}}{2T} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4\omega_0^2 T^2 - 1}}{2T} t\right) \right]$$

Le temps caractéristique de décroissance vaut  $2T$

$q$  revient à l'équilibre en environ  $10^{-13}$  s ( $\approx T$ ) donc **quasi instantané**

4) Si on néglige les forces d'amortissements, on a l'EDL: 
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

On reconnaît un OHT de pulsation caractéristique:

$$\omega_0 = \omega_p = e \sqrt{\frac{n_0}{m \epsilon_0}}$$

! Dans le plasma:  $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{plus de collisions et } T \rightarrow \infty \\ \rightarrow \text{cations bougent.} \end{array} \right.$

pulsation de propagation du plasma

5)  $[Na] = 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 \rightarrow 1e^- \text{ de valence} = 1e^- \text{ de conduction}$

$[Al] = 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1 \rightarrow 3e^- \text{ de valence} = 3e^- \text{ de conduction}$

On a donc  $n_{0[Na]} = C_{Na}$  et  $n_{0[Al]} = 3 C_{Al}$

Donc 
$$\lambda_{Na} = \frac{2\pi c}{\omega_{pNa}} = 2\mu\text{m} \quad \uparrow \text{(IR)}$$

$$\lambda_{Al} = 785\text{nm} \quad \uparrow \text{(rouge)}$$

6) Les cations sont mobiles dans le plasma.

PPD aux  $e^-$  et aux ions. On note  $\vec{E}' = E_0 e^{i\omega t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{v}_e'}{dt} = -e \vec{E}' \\ M \frac{d\vec{v}_i'}{dt} = de \vec{E}' \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} i\omega m \vec{v}_e' = -e \vec{E}' \\ i\omega M \vec{v}_i' = de \vec{E}' \end{array} \right.$$

$$\text{Or, } \vec{j} = \underbrace{q_+ \vec{v}_{ions}}_{\substack{\uparrow \\ \text{neutre: } q_+ = -q_-}} + \underbrace{q_- \vec{v}_e}_{\substack{\uparrow \\ \text{neutre: } q_+ = -q_-}} = \epsilon_0 \left( \frac{d e \vec{E}}{i \omega M} + \frac{e \vec{E}}{i \omega m} \right) = \frac{e^2 n_0}{i \omega m} \left( \frac{dm}{M} + 1 \right) \vec{E}$$

On a donc:  $\vec{j} = \underline{\gamma} \left( 1 + \frac{dm}{M} \right) \vec{E}$

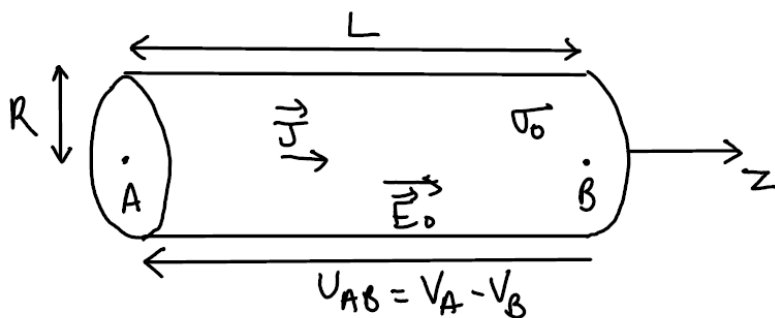
... m raisonnement qui au début, et on a:

$$\omega_p'^2 = \omega_p^2 \left[ 1 + \frac{dm}{M} \right]$$

$$\alpha \approx 1$$

et  $M \leq 10 \times 2000 m_e$

## 3 Effet de peau en électromagnétisme (facultatif)



1) Comme le champ électrique est supposé uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$

$$U = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A \text{grad } V \cdot d\vec{e} = - \int_B^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{e} = \int_A^B E_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{z} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow U = E_0 L$$

Il s'agit d'un conducteur qui vérifie la loi d'Ohm locale donc,  $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}_0$  et donc finalement  $\vec{J} = \frac{\sigma_0 U}{L}$

2) Par ailleurs,  $\vec{J}$  étant également uniforme dans le fil:  
 $I = JS$  et donc:

$$I = \frac{\sigma_0 S U}{L}, \text{ soit } U = R_{\text{elec}} I \text{ avec } R_{\text{elec}} = \frac{L}{\sigma_0 S}$$

A.N pour une longueur d'un mètre (résistance linéique):

$$R_{\text{lin}} = \frac{R_{\text{elec}}}{L} = \frac{1}{\sigma_0 S} = \frac{1}{6,2 \cdot 10^7 \times 2,5 \cdot 10^{-6}} = 6,5 \cdot 10^{-3} \Omega$$

La résistance d'un mètre de fil électrique classique est donc négligeable par rapport aux autres résistances.

$$3) \text{ (MA)}: \text{Rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{j}_D}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \approx \frac{\omega \epsilon_0 E_0}{\sigma_0 E_0}$$

$$= \frac{2\pi f \epsilon_0}{\sigma_0} < \frac{2\pi \times 10^{12} \times 8,85 \cdot 10^{-12}}{6,2 \cdot 10^7} = 9 \cdot 10^{-7} \ll 1$$



Finalement,  $\vec{j}_D$  est largement négligeable devant  $\vec{j}$  dans le fil.

$$4) \text{Rot}(\text{Rot} \vec{j}) = \text{grad}(\text{div} \vec{j}) - \Delta \vec{j} = -\Delta \vec{j}$$

$$\sigma_0 (\text{div} \vec{E})$$

" d'après MG car le conducteur est neutre.

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(MF)}}}{\sigma_0} \text{Rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\sigma_0 \frac{\partial \text{Rot} \vec{B}}{\partial t} = -\sigma_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Finalement  $\Delta \vec{j} = \zeta \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$  avec  $\zeta = \mu_0 \sigma_0$

5) On cherche  $\vec{j}$  sous la forme  $\vec{j} = \vec{J}_0(r) e^{i\omega t} \vec{e}_z = j_z(r) \vec{e}_z$

Le formalisme permet d'écrire en coordonnées cylindriques:

$$\Delta \vec{j} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j_z}{\partial r} \right) \vec{e}_z = \mu_0 \sigma_0 i\omega j_z \vec{e}_z$$

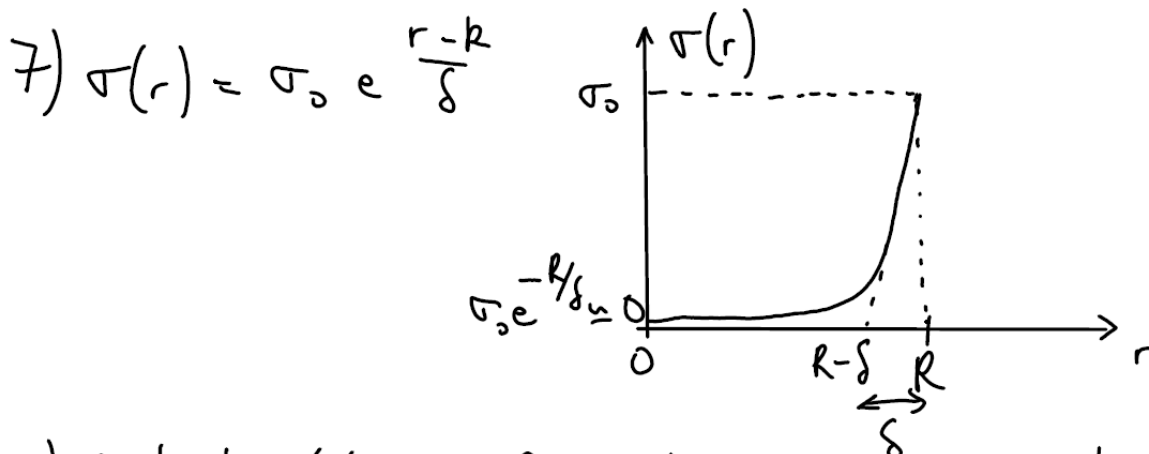
$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{J}_0(r)}{\partial r} \right) = \mu_0 \sigma_0 i\omega \vec{J}_0(r)$$

or en posant  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0 \mu_0 \omega}}$ ,  $\mu_0 \sigma_0 \omega = \frac{2}{\delta^2}$

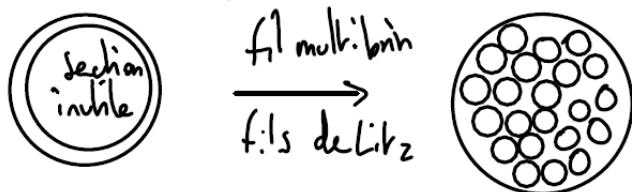
donc  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{J}_0(r)}{\partial r} \right) = \frac{2i}{\delta^2} \vec{J}_0(r)$

$$6) \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0 \mu_0 \omega}} = \sqrt{\frac{2}{6,2 \cdot 10^7 \times 4\pi \cdot 10^7 \times 2\pi \times 10^9}} = 2 \mu\text{m}$$

$\delta \ll R$  et on peut donc bien parler d'effet de peau: le courant n'est localisé qu'en surface du fil.



8) A haute fréquence,  $\delta \ll R$  et le courant ne circule qu'en surface, diminuant ainsi la section du conducteur dans laquelle circule effectivement un courant. On utilise ainsi des fils multibrins pour contrer cet effet:



Par ailleurs, dans les circuits imprimés d'ordinateurs, on dépose parfois une couche d'argent sur du cuivre de façon à faire passer les signaux haute fréquence dans l'argent, de très faible résistivité électrique ( $\sigma_0 = 6,2 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ , qui est la valeur utilisée dans le texte, et qui est supérieure à la conductivité des autres métaux  $\Rightarrow$  résistivité =  $\frac{1}{\sigma}$  est plus faible). On fait passer les signaux à plus basse fréquence dans la partie en cuivre

argent  $\rightarrow$  HF  
cuivre  $\rightarrow$  BF

$$9) dG = \underbrace{\sigma(r)}_{\substack{\uparrow \\ \text{par analogie avec}}} \underbrace{dS}_{\frac{L}{r}} = \underbrace{\sigma(r)}_{\substack{\uparrow \\ \text{par analogie avec}}} \underbrace{2\pi r dr}_{\frac{L}{r}}$$

$$G = \frac{1}{R_{\text{elec}}^i} = \frac{\sigma_0 S}{L}$$

10) Ces éléments sont branchés en parallèle (soumis à la même différence de potentiel  $U$ )

Par analogie avec  $\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \Rightarrow G_{\text{tot}} = \sum_i G_i$

et ici  $G = \int_{r=0}^R dG = \frac{2\pi\sigma_0}{L} \int_{r=0}^R r e^{\frac{r-R}{\delta}} dr$

On fait une intégration par parties:

$$u(r) = r; \quad u'(r) = 1$$

$$v'(r) = e^{\frac{r-R}{\delta}}; \quad v(r) = \delta e^{\frac{r-R}{\delta}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{r=0}^R r e^{\frac{r-R}{\delta}} dr &= \left[ r \delta e^{\frac{r-R}{\delta}} \right]_0^R - \int_0^R \delta e^{\frac{r-R}{\delta}} dr \\ &= R\delta - \delta \left[ \delta e^{\frac{r-R}{\delta}} \right]_0^R \\ &= R\delta - \delta^2 \left[ 1 - e^{-R/\delta} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G = \underbrace{\frac{\pi R^2 \sigma_0}{L}}_{G_0 \text{ conductance pour un courant continu}} \times \frac{2\delta}{R^2} \left[ R + \delta (e^{-R/\delta} - 1) \right]$$

$$G = G_0 \times \frac{2\delta}{R} \left[ 1 + \underbrace{\frac{\delta}{R} (e^{-R/\delta} - 1)}_{\ll 1 \text{ car } \delta \ll R} \right]$$

$$\ll 1$$

$$G \simeq G_0 \times \frac{2\delta}{R}$$

la conductance est donc beaucoup plus faible, comme on s'y attendait car la section "efficace" de

Conducteur est réduite à cause de l'effet de peau.  
Conjointement c'est la résistance qui augmente :

$$R = R_0 \times \frac{R}{2\delta} \Rightarrow R_0 = \frac{L}{\sigma_0 S}$$