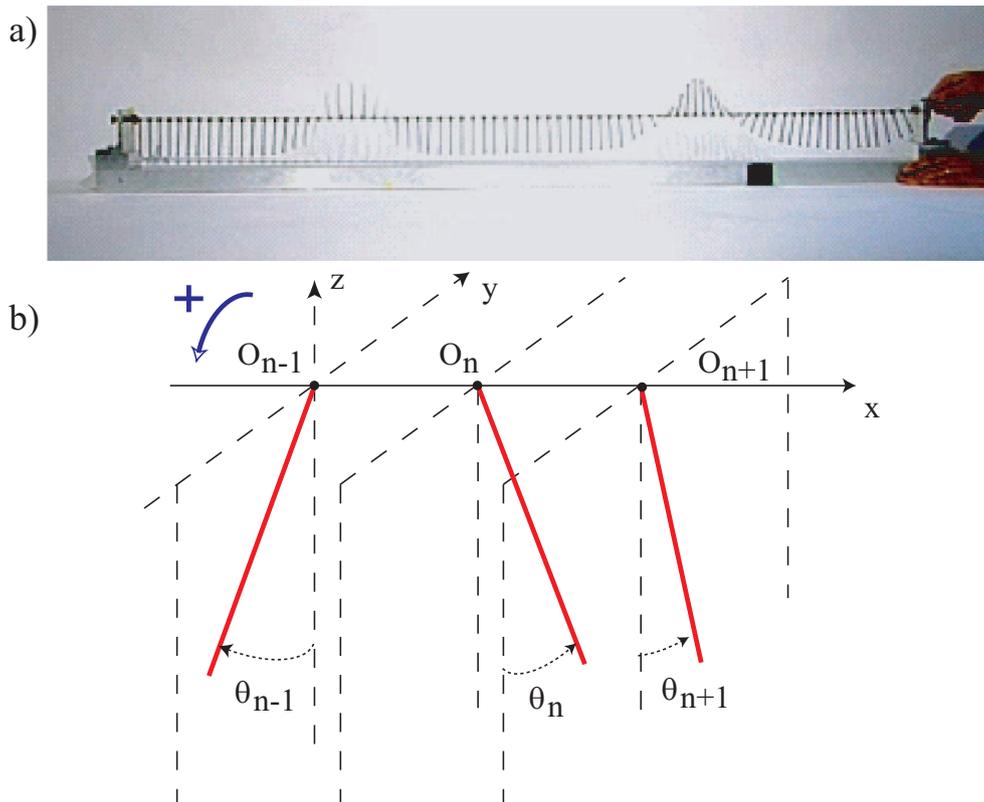


DM n°13 : Ondes dans les milieux matériels
À rendre pour le vendredi 25 janvier
1 Ondes mécaniques sur des pendules couplés

Considérons la chaîne de pendules couplés représentée sur la figure ci-dessous.


 FIGURE 1 – a) *Expérience réalisée avec une chaîne de pendules couplés par un fil de torsion.* b) *Modélisation.*

Chaque pendule est une barre homogène de masse m et de longueur ℓ qui oscille dans le plan $O_n y z$ autour de l'axe horizontal $O_n x$, où O_n est le point de l'axe horizontal Ox d'abscisse $x_n = nd$ et le mouvement du pendule (n) est repéré par son angle θ_n avec la verticale descendante $O_n z$. Chaque pendule est relié à ses voisins par un fil de torsion de constante C , confondu avec l'axe Ox . En outre, l'air exerce sur le pendule (n) un couple de frottements fluides de la forme $-f\dot{\theta}_n$. Chaque pendule a un moment d'inertie $J = \frac{m\ell^2}{3}$ par rapport à son axe de rotation.

Les deux parties A et B sont largement indépendantes.

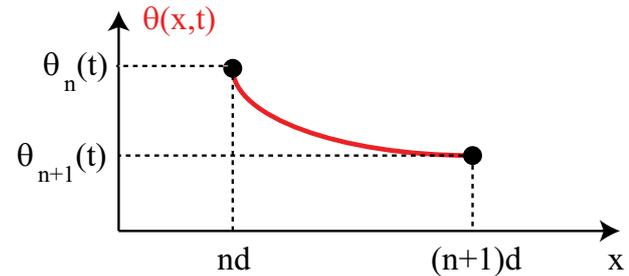
A. Détermination de l'équation d'onde

1. Les ondes pouvant se propager sur la chaîne de pendules couplés sont-elles longitudinales ou transverses ?
2. Déterminer l'équation du mouvement du pendule (n).
3. Les ondes se propageant sur une telle chaîne de pendules couplés ont des longueurs d'onde λ de l'ordre du mètre, donc beaucoup plus grandes que la distance entre deux pendules, qui est de l'ordre du centimètre d'après l'illustration, de sorte qu'on pourra considérer que $\lambda \gg d$.

À l'échelle de la longueur d'onde, le milieu n'apparaît donc plus discontinu, et on peut donc remplacer les fonctions $\theta_n(t)$ par une seule fonction continue de deux variables $\theta(x, t)$ telle que :

$$\begin{cases} \theta(nd, t) = \theta_n(t) \\ \theta((n+1)d, t) = \theta_{n+1}(t) \end{cases}$$

Approximation des milieux continus



Réécrire l'équation précédente en utilisant l'approximation des milieux continus autour de $x = nd$ de sorte que $\theta_n(t) = \theta(x, t)$. On pourra notamment utiliser le développement de Taylor à l'ordre 2 suivant :

$$\theta(x + d, t) = \theta(x, t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

4. En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $\theta(x, t)$. Cette équation est-elle linéaire ?
5. Simplifier encore cette équation en faisant l'approximation des petits mouvements, et montrer qu'on obtient finalement l'équation d'onde suivante :

$$\frac{m\ell^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2} \theta - f \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

B. Propriétés du milieu lors de la propagation d'une onde plane progressive harmonique

1. On recherche des solutions de l'équation d'onde sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques en utilisant la notation complexe suivante :

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{A} e^{j\omega t - j\underline{k}x}$$

où la pulsation ω est réelle et où le nombre d'onde \underline{k} peut être complexe.

Déterminer la relation de dispersion.

2. En considérant que la pulsation est très élevée, simplifier la relation de dispersion en ne conservant que le terme à l'ordre le plus élevé en ω . En déduire l'expression des parties réelle k' et imaginaire k'' du nombre d'onde \underline{k} . Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe et caractériser la propagation de l'onde dans la chaîne de pendules. Est-elle dispersive, absorbante ?
3. Raffiner le modèle précédent en prenant également en compte le second terme dominant lorsque la pulsation est élevée. Caractériser à nouveau la propagation.
4. On néglige maintenant les frottements. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire :

$$\underline{k}^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$$

On précisera les expressions de c et ω_c . On étudiera ensuite les propriétés du milieu en fonction de la valeur de la pulsation ω . Quel type de filtrage réalise la chaîne de pendules ?

2 Oscillations de la densité de charge dans un métal ou un plasma non dilué

Pour décrire les propriétés électriques d'un métal, on adopte le modèle du gaz d'électrons libres (électrons de conduction) dans une matrice d'ions positifs et fixes placés dans le vide.

Seule l'interaction du champ électromagnétique avec les électrons est pour l'instant considérée, le reste de la matière étant assimilée au vide.

Les électrons sont supposés non relativistes, leurs interactions mutuelles sont négligées, les pertes d'énergie par collision avec le réseau sont modélisées par une force d'amortissement $-m \frac{\vec{v}}{\tau}$, avec $\tau = 10^{-13}$ s.

La densité électronique est n_0 à l'équilibre ; sa valeur n hors équilibre reste très proche de cette valeur n_0 . On notera que le conducteur est initialement neutre, de sorte que $\rho = \rho_+ + \rho_- = -en_0 + en_0 = 0$, puis on modifie localement la valeur de la densité volumique d'électrons, de sorte que $n_e \simeq n_0$. ρ n'est donc plus strictement nul.

1. Montrer que le vecteur densité volumique de courant électrique \vec{j} et le champ électrique \vec{E} sont liés par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \beta \vec{E}$$

où l'on précisera l'expression de β . Commenter l'équation obtenue.

2. Un milieu métallique est initialement perturbé : sa répartition de charges initiale fausse localement sa neutralité électrique globale.

Déduire de la question précédente que l'équation régissant l'évolution de la densité volumique de charge électrique ρ au sein du milieu est donnée par

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_0^2 \rho = 0$$

où l'on précisera l'expression de ω_0 .

3. Quel ordre de grandeur peut-on prévoir pour le temps de retour à la neutralité électrique du milieu métallique en supposant que le régime est pseudo-périodique ?
4. Montrer que si l'on néglige les forces d'amortissement, il peut exister dans le gaz d'électrons un mode propre d'oscillations de charges, de pulsation ω_p à préciser.
5. Calculer ω_p pour le sodium et l'aluminium (en considérant que tous les électrons de valence d'un atome deviennent des électrons de conduction) dont les concentrations atomiques sont $C_{\text{Na}} = 2,65 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ et $C_{\text{Al}} = 6,02 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. $Z_{\text{Na}} = 11$ et $Z_{\text{Al}} = 13$.
Situer ces valeurs dans le spectre électromagnétique.

Données : pour l'électron, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

6. Afin d'améliorer le modèle précédent, on considère un plasma dans lequel les collisions sont toujours négligées, mais dans lequel on prend maintenant en compte le mouvement des ions, de masse M et de charge ae . Évaluer et commenter l'ordre de grandeur de la modification apportée à la valeur de la pulsation de plasma.

3 Effet de peau en électromagnétisme (facultatif)

On considère un fil de cuivre cylindrique de rayon R et de longueur L très grande devant le rayon R .

Ce fil est placé dans le vide. On note σ_0 sa conductivité électrique supposée constante. On appelle

(Oz) l'axe du fil de vecteur unitaire \vec{e}_z .

On prendra $\sigma_0 = 6,2 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; $\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Données : Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{a} &= \left[\frac{\partial^2 a_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{a_r}{r^2} \right] \vec{u}_r \\ &+ \left[\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r^2} \right] \vec{u}_\theta \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right] \vec{u}_z \end{aligned}$$

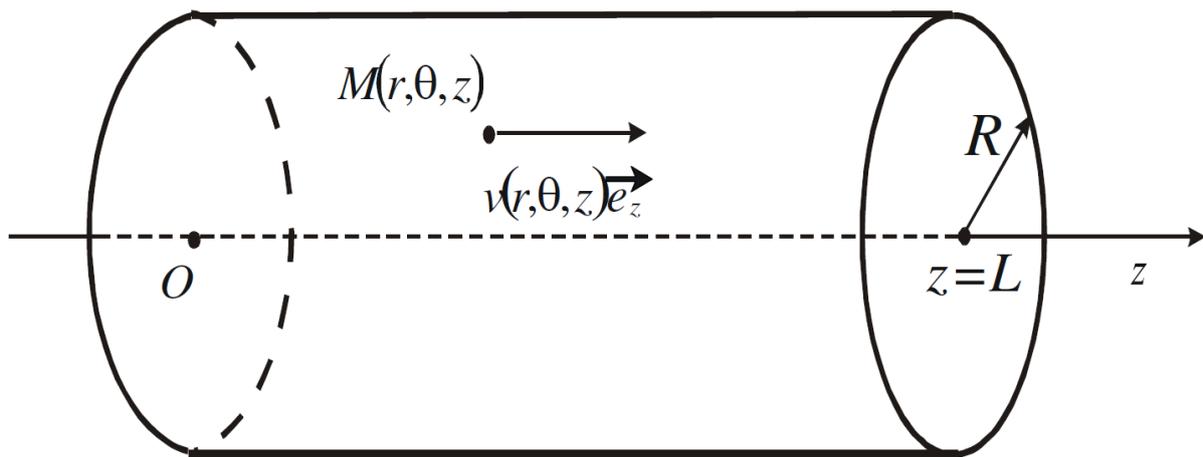


Figure 1 : géométrie du fil de cuivre

- On applique une différence de potentiel U constante entre les deux extrémités du fil de cuivre. En supposant que le champ électrique créé dans le cuivre est uniforme, donner l'expression littérale de la norme J du vecteur densité volumique de courant en fonction de σ_0 , U et L .
- Calculer alors l'intensité du courant traversant le fil de cuivre et en déduire l'expression littérale de la résistance électrique R_{elec} de ce fil de cuivre.
Application numérique : calculer la résistance linéique R_{lin} de ce fil de section $2,5 \text{ mm}^2$.
- Dans la suite du problème, un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ traverse le fil de cuivre. La fréquence du courant est inférieure au térahertz ($1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$). Montrer que l'on peut alors négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère.
- Etablir que le vecteur densité volumique de courant \vec{j} satisfait à l'équation différentielle suivante : $\Delta \vec{j} = \xi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ où l'on exprimera ξ en fonction des données du problème.
- Les symétries du problème permettent d'écrire le vecteur densité volumique de courant sous la forme complexe $\vec{j} = J_0(r) \cdot e^{i\omega t} \vec{e}_z$ où $i^2 = -1$ et r est la distance d'un point M du fil par rapport à l'axe. On rappelle que \vec{e}_z est le vecteur unitaire de l'axe (Oz). L'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques est donnée à la fin du sujet. Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $J_0(r)$. On introduira la quantité
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0 \mu_0 \omega}}.$$
- Calculer δ à la fréquence de 1 GHz. Comparer cette grandeur au rayon du fil de cuivre de section $2,5 \text{ mm}^2$.

7. La résolution de l'équation différentielle obtenue à la question **B.9** n'est pas demandée ici. On admettra donc que la densité de courant diminue lorsque l'on se rapproche de l'axe du cylindre (le rayon r diminue donc). La distance caractéristique sur laquelle se réalise cette décroissance est naturellement δ . On propose donc le modèle suivant : la conductivité électrique est une fonction exponentielle de la distance r : $\sigma(r) = \sigma_0 \cdot e^{\frac{r-R}{\delta}}$. Tracer l'allure de la fonction $\sigma(r)$. Tracer la tangente à la courbe en $r = R$. Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ?
8. Justifier le fait que, en haute fréquence, on utilise des câbles formés de multiples brins de cuivre très fins isolés électriquement les uns des autres (appelés fils de Litz). Justifier aussi le fait que l'on recouvre les conducteurs en cuivre des circuits imprimés d'ordinateurs d'une mince pellicule d'argent.
9. On se propose maintenant de calculer la résistance du fil avec le modèle de conductivité variable. On découpe la section circulaire du fil de cuivre en éléments de surface annulaires de largeur dr et de longueur $2\pi r$. On découpe ainsi le fil en éléments de volume.

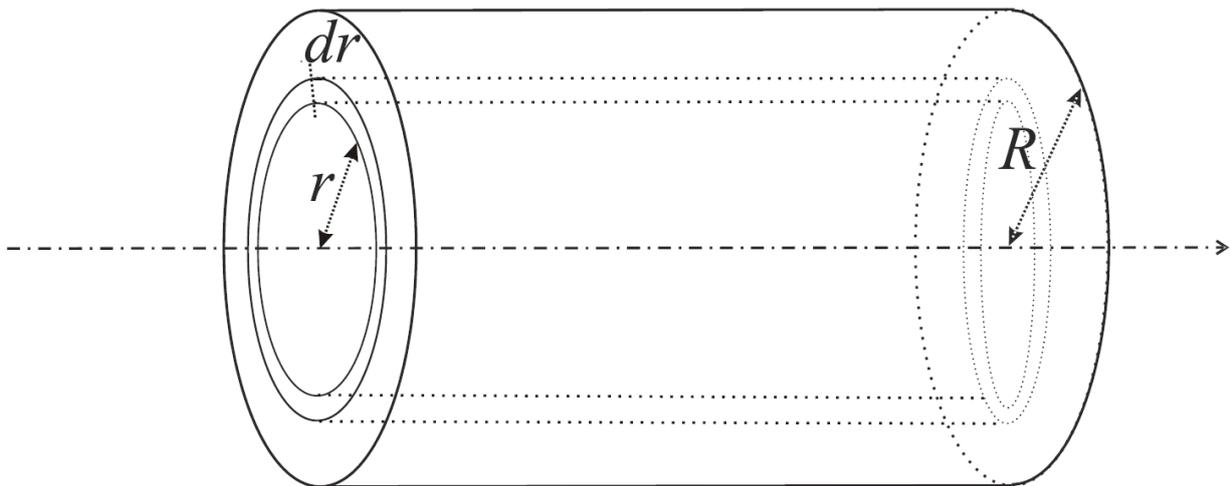


Figure 2 : découpage en volumes élémentaires

Quelle est la conductance électrique élémentaire dG d'un tel élément de volume ? On l'exprimera en fonction de r , $\sigma(r)$, dr et L .

10. Comment sont branchés entre eux ces éléments de volume ? En déduire la conductance totale G du fil en fonction de δ , R , L , σ_0 . Comparer à $G_0 = \frac{\pi R^2 \sigma}{L}$. On donnera la signification de G_0 .