Interrogation de cours n°15 - Correction

13

1 Ondes électromagnétiques dans le vide

- Démontrer l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$ dans le vide.

$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{E}) = \vec{grad}(\underbrace{div \vec{E}}_{0 \text{ dans le vide (MG)}}) - \vec{\Delta}\vec{E}$

$\underset{\text{MF}}{=} \vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (MA) dans le vide

2

Eq de D'Alembert : $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$ avec $\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$

- Comment s'écrivent les solutions harmoniques les plus générales sous forme complexe ? Vérifier que cette expression est bien solution de l'équation de propagation.

$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$ (1) (On aurait pu choisir $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ l'autre choix pour la notation complexe.)

1

D'Alembert : en complexe avec la convention (1) $(i\vec{k})^2\underline{\vec{E}} = \frac{(-i\omega)^2}{c^2}\underline{\vec{E}} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Equation vérifiée si } k = \frac{\omega}{c}}$ OK.

- Écrire les équations de Maxwell sous forme complexe dans le cas de la propagation d'une OPPH. Préciser la notation choisie pour l'OPPH. En déduire que l'onde est transverse, donner l'expression de $\vec{B}$ en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{k}$ (relation de structure) et l'expression du rapport $||\vec{E}||/||\vec{B}||$ pour une OPPH dans le vide.

$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$

2,5

$$\boxed{\begin{aligned}
&(MG) \quad +i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \ \text{(vide)} \\
&(M\Phi) \quad +i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\
&(MF) \quad +i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -(-i\omega)\underline{\vec{B}} \\
&(MA) \quad i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \underset{\text{vide}}{\vec{0}} + \frac{1}{c^2}(-i\omega\underline{\vec{E}})
\end{aligned}}$$

$(\vec{E}, \vec{B})$ est une onde transverse.

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}}$ Relation de structure

$\Rightarrow ||\vec{B}|| = \frac{||\vec{k}||\,||\vec{E}||}{\omega}$ car $\vec{E} \perp \vec{k}$

or $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \boxed{||\vec{B}|| = \frac{||\vec{E}||}{c}}$

- Quand la relation de structure n'est-elle pas valable ? (deux conditions attendues)

1

La relation de structure n'est pas valable si l'onde n'est pas une OPPH (il faut donc qu'elle soit progressive et non stationnaire) et plane.
Il faut que les champs s'écrivent en coordonnées cartésiennes.

2 Ondes électromagnétiques dans les plasmas

• Définir la vitesse de phase v_φ dans le cas général, dans un milieu matériel.

0,5 $\quad v_\varphi = \left|\dfrac{d\omega}{dk'}\right|$ où $k' = Re[\underline{k}]$ *

• Donner plusieurs propriétés permettant de caractériser un milieu dispersif. Comment se manifeste la dispersion lorsqu'on considère la propagation d'une impulsion ?

milieu dispersif $\Leftrightarrow$ n dépend * de λ (ou de ω, ν) $\Leftrightarrow$ v_φ dépend * de ω (car $n = \dfrac{c}{v_\varphi}$)

Dans un milieu dispersif, une impulsion à tendance à s'étaler (ou à se contracter – plus rare) : *

2,5

schéma *

On notera que l'amplitude maximale diminue, mais que la largeur également ($\neq$ absorption).

respecté sur le schéma ou expliqué *

• Lors de l'étude de la propagation d'un champ électromagnétique écrit en complexe sous la forme : $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{i(\underline{k}x-\omega t)}\overrightarrow{u}_z$, que peut-on dire des propriétés du milieu si $k' = \mathcal{R}e[\underline{k}] = a > 0$ et $k'' = \mathcal{I}m[\underline{k}] = b > 0$, où a et b sont des constantes ?

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{u}_z\, e^{i[(k'+ik'')x-\omega t]} = E_0 \vec{u}_z\, e^{-k''x}\, e^{i(k'x-\omega t)}$$

donc $\vec{E} = Re[\underline{\vec{E}}] = E_0 e^{-k''x}\cos(k'x-\omega t)\,\vec{u}_z$ * calcul.

avec $k' > 0$: propagation selon $+\vec{u}_x$
$k'' > 0$: atténuation selon $+\vec{u}_x$ *

2,5

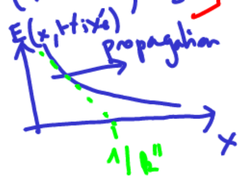

schéma *

Le milieu est donc absorbant *, sur une distance caractéristique $\delta = 1/k''$. *

• Donner la définition de l'indice complexe d'un milieu. Comment définit-on la longueur d'onde λ_m dans un milieu ?

1 $\quad \underline{n} = \dfrac{\underline{k}}{k_0}$ avec $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ * $\quad$ et $\lambda_m = \dfrac{\lambda}{n'}$ où $n' = Re[\underline{n}]$ *