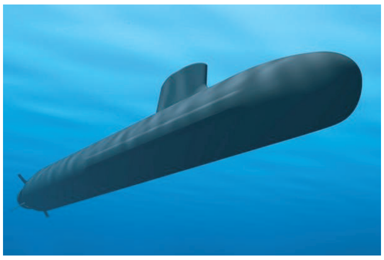
TD n°14 - Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

1 Communication sous-marine

1. Question préliminaire : Sachant que la taille caractéristique d'une antenne permettant d'émettre un signal est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde émise (voir cours sur le rayonnement dipolaire), déterminer la taille d'une antenne utilisée pour la radio FM ($f \simeq 100\ MHz$), ou pour le wifi ou la téléphonie mobile ($f \simeq 2\ GHz$).
2. On cherche maintenant à déduire des conséquences de cette propriété générale pour la communication sous-marine.
   (a) En utilisant les données ci-dessous, déterminer l'ordre de grandeur de la fréquence des ondes électromagnétiques qui permettraient de communiquer avec un sous-marin ? Quelle est la taille de l'antenne correspondante ? Commenter.
   (b) Qu'en est-il dans un lac ?



Données : La conductivité électrique de l'eau de mer est d'environ $1 S.m^{-1}$, et celle de l'eau pure d'environ $5 \times 10^{-6} S.m^{-1}$.

2 Étude énergétique de l'effet de peau

Un métal occupant le demi-espace $z > 0$ est caractérisé par une permittivité ε_0, une perméabilité μ_0 et une conductivité électrique γ. On se place dans le domaine de fréquences où le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

On étudie une situation pour laquelle il existe dans le métal un champ électrique de la forme (solution des équations de Maxwell) :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \vec{u}_x \exp(-\alpha z) \exp[i(\alpha z - \omega t)]$$

où E_0 est une amplitude réelle positive et où $\alpha = \sqrt{\dfrac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$.

1. Préciser les expressions du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ et de la densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$ en tout point du métal.
2. (a) Quelle est l'expression de la puissance électromagnétique moyenne P_0 transmise en $z = 0$ à travers une surface S perpendiculaire à Oz ?
   (b) Quelle est l'expression de la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule dans le volume limité par un cylindre d'axe Oz, de surface de base S et qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à l'infini ? Commenter.
3. On peut retrouver la relation établie à la question précédente à l'aide d'un bilan énergétique. À cet effet :
   (a) En partant de l'identité locale de Poynting, établir la relation entre la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{\pi} \rangle$ dans le métal (à la cote z) et la valeur moyenne de la densité volumique de puissance $\langle p_J \rangle$ dissipée par effet Joule en ce même point.
   (b) Retrouver alors la relation entre P_0 et P_J établie à la question 2.b).

3 Transparence ultraviolette des métaux

Un métal est éclairé sous incidence normale par une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique. On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-m\frac{\overrightarrow{v}}{\tau}$. On note n^* le nombre volumique d'électrons libres.

Données : $n^* \simeq 10^{28} m^{-3}$, $\gamma = 6.10^8 \Omega.m^{-1}$, $m = 9.10^{-31} kg$, $e = 1,6.10^{-19} C$ et $\tau \simeq 10^{-14} s$.

1. Montrer que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

   Quelle convention a-t-elle été choisie pour la notation complexe du champ électrique pour obtenir cette expression ?

2. On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire la relation de dispersion des pseudo-OPPH :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 i \underline{\sigma} \omega = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{1 + i\omega\tau}$$

3. <u>Dans l'ultra-violet</u> : montrer que $\omega\tau \gg 1$ et interpréter le fait que certains métaux sont transparents dans l'UV.
4. <u>Dans le visible</u> : montrer qu'on a encore $\omega\tau \gg 1$ et interpréter le fait que les métaux bons conducteurs sont aussi des miroirs dans le visible.
5. <u>Dans les micro-ondes et dans les grandes ondes</u> : montrer que $\omega\tau \ll 1$ et interpréter le fait que les métaux bons conducteurs absorbent en partie les micro-ondes et les grandes ondes.