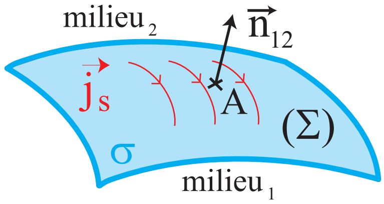
TD n°15 - Réflexion sous incidence normale d'une OPPH sur un plan conducteur parfait

1 Relations de passage au niveau de densité surfaciques de charge et de courant



On considère une surface (Σ), présentant une densité surfacique de charge σ et un vecteur densité de courant surfacique $\overrightarrow{j}_s$. Celle-ci sépare deux milieux ne présentant ni charges, ni courants.

En régime stationnaire :

1. montrer, à l'aide du théorème de Gauss, que : $\overrightarrow{E}_{2n}(A) - \overrightarrow{E}_{1n}(A) = \dfrac{\sigma(A)}{\mathcal{E}_0}\overrightarrow{n}_{12}$ où $\overrightarrow{E}_{1n}(A)$ et $\overrightarrow{E}_{2n}(A)$ sont respectivement les composantes normales à la surface Σ des champs électriques dans les milieux 1 et 2 juste au niveau de la surface, en A.
2. montrer, à l'aide de la loi de Faraday, que : $\overrightarrow{E}_{2t}(A) - \overrightarrow{E}_{1t}(A) = \overrightarrow{0}$ où $\overrightarrow{E}_{1t}(A)$ et $\overrightarrow{E}_{2t}(A)$ sont respectivement les composantes tangentielles à la surface Σ des champs électriques dans les milieux 1 et 2 juste au niveau de la surface, en A.
3. montrer, en utilisant le fait que $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif, que : $\overrightarrow{B}_{2n}(A) - \overrightarrow{B}_{1n}(A) = \overrightarrow{0}$
4. montrer, à l'aide du théorème d'Ampère, que : $\overrightarrow{B}_{2t}(A) - \overrightarrow{B}_{1t}(A) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{12}$
5. écrire les relations de passage sous forme compacte et préciser les composantes continues et les composantes potentiellement discontinues.

2 Lois de Descartes pour la réflexion sur un métal parfait d'une onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

Un métal supposé parfaitement conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se dirige vers ce plan dans le vide : c'est l'onde incidente. Par hypothèse, cette onde est supposée polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, c'est à dire suivant $(O, \overrightarrow{u}_x)$ et son vecteur d'onde est dans le plan (yOz). Le champ électrique de cette onde a pour expression :

$$\underline{\overrightarrow{E}}_i = E_0 \mathrm{e}^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \overrightarrow{u}_x$$

où $\overrightarrow{u}_x$ est le vecteur unitaire porté par (Ox), et où $k_y > 0$ et $k_z > 0$..

1. On suppose que le champ réfléchi est lui aussi polarisé suivant (Ox) et correspond à l'expression générale

$$\underline{\overrightarrow{E}}_r = \underline{E_1} \mathrm{e}^{i(k'_x x + k'_y y + k'_z z - \omega t)} \overrightarrow{u}_x \, .$$

   Justifier sans calcul la direction de polarisation de ce champ réfléchi ainsi que sa pulsation. On rappelle ci-dessous les relations de passage des champs au niveau d'une interface séparant deux milieux 1 et 2 :

$$\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n}_{12} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{12}$$

   où $\overrightarrow{n}_{12}$ est un vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu 1 vers le milieu 2.
   En utilisant les conditions aux limites pour $\overrightarrow{E}$, déterminer $\underline{E_1}$ en fonction de E_0 ainsi que les composantes du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}'$ en fonction des composantes de $\overrightarrow{k}$. Quelle loi retrouve-t-on ainsi ?
2. Donner les expressions des champs réels $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ totaux dans le demi-espace $z < 0$. Vérifier en particulier que la composante normale de $\overrightarrow{B}$ est bien nulle à la surface du métal.

3. Déterminer les densités surfaciques de charge et de courant au niveau du plan conducteur.
4. On donne l'expression de la force de Laplace surfacique s'exerçant sur une interface parcourue par un courant surfacique :

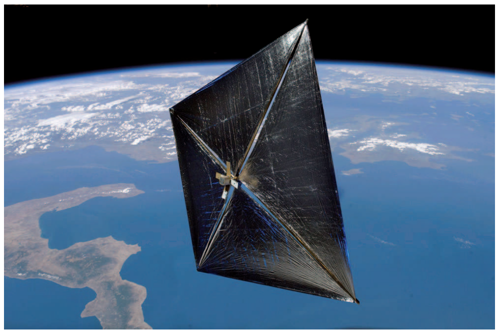
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}S} = \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{B}_{surf} \qquad \text{où} \qquad \overrightarrow{B}_{surf} = \frac{\overrightarrow{B}(z=0^-) + \overrightarrow{B}(z=0^+)}{2}$$

On prend en compte ici la valeur moyenne entre les champs magnétiques de chaque côté de l'interface car celui-ci est discontinu au niveau de la surface.

Calculer la force moyenne par unité de surface s'exerçant sur le métal en fonction de E_0, ϵ_0 et α, l'angle d'incidence. Expliquer pourquoi la grandeur calculée s'appelle la *pression de radiation*.

5. Commenter le texte ci-dessous à propos de la voile solaire Sunjammer dont le lancement était prévu en 2015 (abandonné en 2014) vers le point de Lagrange L_1 situé à 1.5 millions de kilomètres de la Terre, entre le Soleil et cette dernière (source : wikipedia) :

Le satellite a la taille d'une machine à laver avant le déploiement de la voile solaire qui se fait en orbite. Malgré sa superficie - 38 × 38m soit 4 fois et demi la superficie d'un terrain de tennis - la voile solaire, qui est épaisse de 5 microns ne pèse que 32 kg avec ses équipements. La voile exerce une poussée maximale de 0,1 Newton. Le contrôle d'attitude est réalisé sans propulseurs grâce à des portions de voile solaire orientables situées à chaque extrémité. Le satellite emporte deux petits instruments scientifiques destinés à mesurer le champ magnétique et le flux d'ions du vent solaire.



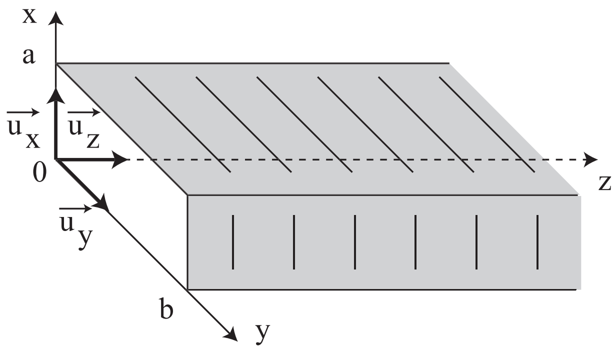
<u>Donnée</u> : constante solaire (flux du rayonnement solaire hors de l'atmosphère) : 1360 W.m^{-2}.

Réponses : 2. $\overrightarrow{B}_{tot} = \frac{k_y}{\omega} 2E_0 sin(k_z z) sin(k_y y - \omega t)\overrightarrow{u}_z + \frac{k_z}{\omega} 2E_0 cos(k_z z) cos(k_y y - \omega t)\overrightarrow{u}_y$, 3. $\sigma = 0$ et $\overrightarrow{j}_s = \frac{k_z}{\mu_0 \omega} 2E_0 cos(k_y y - \omega t)\overrightarrow{u}_x$, 4. $P = \epsilon_0 E_0^2 cos^2\alpha$.

3 Guide d'onde rectangulaire

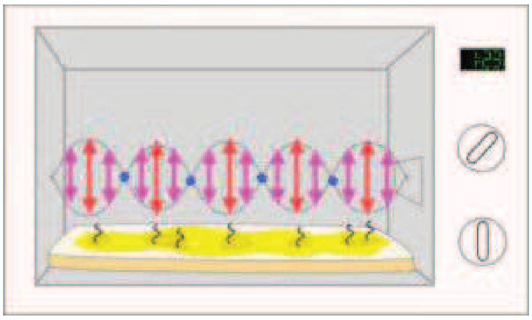
Soit un guide d'onde rectangulaire défini par quatre plans métalliques parfaitement conducteurs représentés sur la figure ci-dessous et situés en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$. Dans la cavité vide formée par les conducteurs, on considère un champ électrique $\overrightarrow{E}$ de pulsation ω se propageant selon la direction $(O, \overrightarrow{u}_z)$ de la forme

$$\overrightarrow{E} = f(y)\cos(\omega t - k_z z)\overrightarrow{u}_x$$



1. Quelles sont les conditions aux limites imposées par le conducteur au champ électrique ?
2. Déterminer $f(y)$. Donner et commenter l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ et de la relation de dispersion.
3. Déterminer les fréquences qui peuvent se propager dans le guide. Commenter.
4. On rajoute deux plans parfaitement conducteurs en $z = 0$ et $z = \ell$ pour former une cavité électromagnétique de volume $a \times b \times \ell$.
   (a) Justifier précisément pourquoi on peut alors chercher le champ électrique sous la forme suivante dans la cavité :
   $$\overrightarrow{E} = E_0 \sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x$$
   (b) Quelles sont maintenant les fréquences des ondes électromagnétiques pouvant exister à l'intérieur de cette cavité en régime permanent ?

(c) Commenter les illustrations des micro-ondes ci-dessous en lien avec les questions précédentes.

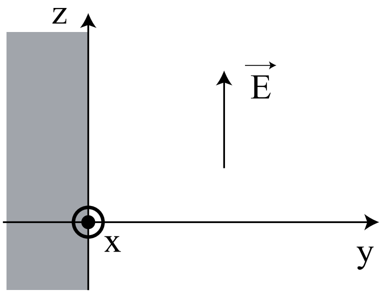


(d) La fréquence utilisée dans les micro-ondes est $f_0 = 2,45\ GHz$. Pourquoi utilise-t-on cette fréquence précise ? En déduire la taille minimale d'un micro-ondes cubique, c'est à dire dans le cas où on impose $a = b = \ell$?

4 Onde électromagnétique le long d'un conducteur parfait

Une onde progressive électromagnétique se propage parallèlement à un plan conducteur parfait. La surface plane du conducteur est le plan (xOz). Le métal est semi-infini et occupe la zone $(y < 0)$. Le champ électrique est de la forme :

$$\overrightarrow{E} = f(y)\ \cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z$$



1. Caractériser la forme générale acceptable du champ électromagnétique correspondant à des solutions de ce type.
2. Calculer le champ magnétique associé. Montrer qu'il vérifie bien l'équation de Maxwell-Thomson.
3. Quelles sont les charges et courants portés par le conducteur parfait ?
4. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à l'onde et la valeur moyenne de la densité d'énergie électromagnétique.

Réponses : 1. $\overrightarrow{E} = A\sin\left(y\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right)\ \cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z$, 2. $\overrightarrow{B} = -\dfrac{\Omega}{\omega}A\cos(\Omega y)\ \sin(\omega t - kx)\overrightarrow{u}_x - \dfrac{k}{\omega}A\sin(\Omega y)\ \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u}_y$, 3. $\sigma = 0$ et $\overrightarrow{j}_s = \dfrac{\Omega}{\mu_0\omega}A\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{u}_z$, 4. $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \dfrac{kA^2}{2\mu_0\omega}\sin^2(\Omega y)\vec{u}_x$ et $\langle u_{em}\rangle = \dfrac{\epsilon_0 A^2}{4} + \dfrac{A^2k^2}{4\mu_0\omega^2}\left[\sin^2(\Omega y) - \cos^2(\Omega y)\right]$

5 Réflexion et transmission sous incidence normale à l'interface de deux milieux

A - Cas général

Deux milieux semi-infinis, d'indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ occupent respectivement les demi-espaces $z \leq 0$ et $z \geq 0$. Une pseudo-onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$ arrive depuis les $z \leq 0$ en incidence normale sur l'interface depuis le milieu 1.

On rappelle ci-dessous les relations de passage des champs au niveau d'une interface séparant deux milieux 1 et 2 :

$$\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n}_{12} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0\,\overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{12}$$

où $\overrightarrow{n}_{12}$ est un vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique.

1. Donner l'expression des champs électrique et magnétique incidents, réfléchis et transmis en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

2. En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n_1}$ et $\underline{n_2}$, en faisant l'hypothèse qu'il n'existe ni charge ni courants surfaciques à l'interface (on justifiera cette hypothèse dans les trois cas particuliers B, C et D ci-dessous).
3. Donner les expressions des coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance en fonction de $\underline{n_1}$ et $\underline{n_2}$ uniquement.

B - Cas de l'interface entre deux milieux transparents

1. Quelle est la particularité des indices complexes dans le cas de deux milieux transparents ?
2. En déduire les expressions simplifiées de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ et montrer que la réflexion s'accompagne d'un déphasage de π du champ électrique dans un cas particulier que l'on précisera.
3. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance en fonction des indices des milieux. Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Quel est le sens physique de cette relation ?
4. En déduire le coefficient de réfelxion/transmission d'une vitre. Commenter.

C - Cas de l'interface entre le vide et un plasma

1. Préciser l'expression des indices des deux milieux dans ce cas en fonction de la pulsation ω de l'onde incidente. On pourra considérer que le plasma est caractérisé par sa pulsation ω_p.
2. En déduire les expressions simplifiées de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de l'indice complexe $\underline{n}_p$ du plasma.
3. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance en fonction de ω et ω_p dans les deux cas suivants :
   (a) $\omega < \omega_p$. Commenter.
   (b) $\omega > \omega_p$. Commenter en particulier le cas $\omega_p = 0$.
4. Vérifiez que la relation entre R et T trouvée précédemment reste valable.

D - Cas de l'interface entre le vide et un métal réel

1. Préciser l'expression des indices des deux milieux dans ce cas en fonction de la pulsation ω de l'onde incidente. On pourra considérer que le métal réel est caractérisé par sa conductivité γ.
2. En déduire les expressions simplifiées de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de l'indice complexe $\underline{n}_m$ du métal.
3. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance en fonction de la pulsation ω du champ incident et de l'épaisseur de peau δ dont on rappellera l'expression.
4. Vérifiez que la relation entre R et T trouvée précédemment reste valable.
5. Montrer que les expressions de R et T permettent de retrouver le cas du conducteur parfait.