Interrogation de cours n°16

13,5

1 Ondes électromagnétiques dans les plasmas

• Donner la définition d'un plasma ainsi qu'un exemple concret.

1 Plasma = gaz ionisé globalement neutre (e^- + cations)

Ex : flammes, éclair, étincelle, ionosphère, tubes fluorescents...

• On considère un plasma homogène, peu dense, totalement ionisé et constitué de *cations* de charge $+e$ et de masse M, et d'*électrons*, de charge $-e$ et de masse m, de densité n_0. On s'intéresse à la propagation d'une OPPH polarisée rectilignement suivant la direction Oz dans ce plasma et se propageant selon la direction Ox, décrite par $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\underline{k}x-\omega t)}\vec{u}_z$.

Déterminer la conductivité complexe du plasma en appliquant le PFD à un électron du plasma.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \cancel{\vec{v}\wedge\vec{B}}) + \cancel{m\vec{g}} - \cancel{m\frac{\vec{v}}{\tau}} \rightarrow -im\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$$

négligeable car non relativiste $\|\vec{v}\| \ll c$ — négligeable — négligeable car dilué

pour approximations (au moins une).

1,5 or $\vec{j} = \cancel{\rho_+\vec{v}_+} + \rho_-\vec{v} = -ne\underline{\vec{v}} = -\frac{ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}} \Rightarrow \boxed{\underline{\gamma} = \frac{-ne^2}{im\omega}}$

négligeable car ions ≃ fixes

car convention ≠ cours.

• Écrire les équations de Maxwell dans le plasma. En déduire que le champ électromagnétique est transverse, et écrire la relation de dispersion. On pourra introduire la pulsation de plasma ω_p dont on précisera l'expression.

MG $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 = 0$ (neutre) $\rightarrow i\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$

MT $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \rightarrow i\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{B} \perp \vec{k}$ onde transverse

MF $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow i\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = i\omega\underline{\vec{B}}$

MA $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow i\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\gamma}\underline{\vec{E}} + \frac{-i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$

$$\Rightarrow i\underline{\vec{k}}\wedge\left(\frac{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = -\frac{\mu_0 ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}} - \frac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$$

2 $$i\left[\frac{\underline{\vec{k}}(\cancel{\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}}}) - \underline{k}^2\underline{\vec{E}}}{\omega}\right] = -\frac{i\underline{k}^2\underline{\vec{E}}}{\omega}$$

MG

$$-\frac{i\underline{k}^2}{\omega} = -\frac{i\omega}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{im\omega} \Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{\mu_0 ne^2}{m}c^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$$

• Que se passe-t-il si $\omega < \omega_p$? On précisera en particulier quel type d'onde est présent dans le plasma.

Si $\omega < \omega_p$: $\underline{k}^2 < 0 \Rightarrow \underline{k} \in i\mathbb{R}$ et $\begin{cases} k' = 0 \\ k'' = \pm \sqrt{\dfrac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \end{cases}$

1,5

$$\Rightarrow \vec{E} = \mathrm{Re}\left[E_0 \, e^{i\left(\pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}} x - \omega t\right)} \right] \vec{u_z} = E_0 \, e^{\pm \sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}} x} \cos(\omega t) \vec{u_z}$$

Onde stationnaire amortie appelée onde évanescente (amortissement sur une longueur caractéristique $\delta = 1/|k''|$)

• Si $\omega > \omega_p$, quel type d'onde est présent dans le plasma ? On donnera l'expression de la vitesse de phase v_φ, on précisera si le milieu est dispersif et on expliquera la nécessité d'introduire la vitesse de groupe v_g dont on donnera la définition.

Si $\omega > \omega_p$: $\underline{k}^2 > 0 \Rightarrow \underline{k} \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} k' = \pm \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \\ k'' = 0 \end{cases}$

$\vec{E} = \mathrm{Re}[\vec{\underline{E}}] = E_0 \cos(\omega t - k'x) \vec{u_z}$. Onde plane progressive harmonique (OPPH)

3

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

mais pas de contradiction car non physique seule (pas liée à la propagation de l'énergie et de l'information) $\Rightarrow$ besoin d'une autre vitesse pour décrire énergie/info.

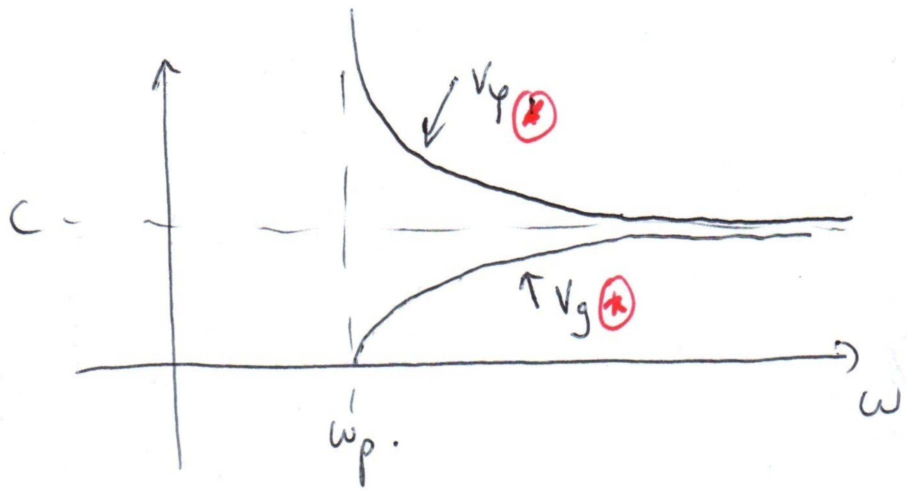
$\hookrightarrow$ dépend de $\omega \Rightarrow$ milieu dispersif

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

$2k\,dk = \dfrac{2\omega\,d\omega}{c^2}$

• Tracer v_φ et v_g en fonction de la pulsation de l'onde incidente.

1



2 Effet de peau dans un conducteur

• La relation de dispersion dans le cas d'une OPPH écrite sous la forme complexe suivante $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{-i(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u}_z$ est donnée par :

$$\underline{k}^2 = i\mu_0\gamma\omega$$

En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ dans le conducteur. Déterminer les caractéristiques de propagation du milieu (dispersion, absorption) et préciser l'expression de l'épaisseur de peau δ.

$\underline{k}^2 = i\mu_0\gamma\omega = e^{i\pi/2}\mu_0\gamma\omega \Rightarrow \underline{k} = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\, e^{i\pi/4} = \pm\left(\frac{1+i}{\delta}\right)$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$

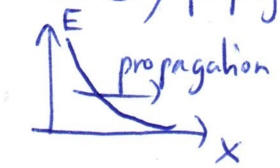
$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{E}}\right] = E_0\vec{u}_z\, \mathrm{Re}\left[e^{-i\left(\omega t \mp \left(\frac{1+i}{\delta}\right)x\right)}\right] = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{u}_z$

3

* dispersion : $v_\varphi = \frac{\omega}{|\underline{k}'|} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$ dépend de $\omega \Rightarrow$ milieu dispersif.

Avec $\oplus$, propagation dans le sens $+\vec{u}_x$.

* absorption :



$\Rightarrow$ absorption

• Donner sans justification les propriétés d'un conducteur parfait

0,5

$\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$ (ou $\vec{B}_0$), $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ (σ et $\vec{j}_s$ potentiellement non nuls)