DM n^{o}14 : Ondes électromagnétiques

À rendre pour le jeudi 1 février

1 Réflexion sur un métal réel

Une onde électromagnétique, plane, progressive, monochromatique, arrive sous incidence normale sur un milieu conducteur de conductivité γ réelle, de valeur finie, occupant le demi-espace $z > 0$.

Le vecteur d'onde de l'onde incidente est $\overrightarrow{k}_0 = k_0 \overrightarrow{u}_z$, et son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\overrightarrow{\underline{E}}_i = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)} \overrightarrow{u}_x$$

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise dont les champs électriques sont définis par :

$$\overrightarrow{\underline{E}}_r = \underline{E}_{0r} e^{i(\omega t + k_0 z)} \overrightarrow{u}_x \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\underline{E}}_t = \underline{E}_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}_m z)} \overrightarrow{u}_x$$

1. Montrer qu'on peut établir la relation de dispersion suivante dans le métal en faisant les approximations qui s'imposent lorsque la fréquence de l'onde incidente n'est pas trop élevée :

$$\underline{k}_m^2 = -i\omega\mu_0\gamma$$

2. Montrer que les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ pour l'amplitude du champ électrique sont donnés par :

$$\underline{r} = \frac{k_0 - \underline{k}_m}{k_0 + \underline{k}_m} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{2k_0}{k_0 + \underline{k}_m}$$

3. Montrer que le pouvoir réflecteur du milieu métallique défini comme le rapport de la puissance réfléchie et de la puissance incidente en $z = 0$ est donnée par :

$$R = \frac{1 + \left(1 - \dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2}$$

   Commenter l'expression obtenue lorsque $\delta \ll \lambda_0$.

4. Montrer que la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre d'axe Oz, de surface de base S, s'étendant du plan $z = 0$ jusqu'à l'infini est donnée par :

$$\mathcal{P}_J = \frac{\delta\gamma}{4} \frac{\left(2\dfrac{\delta\omega}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2} \left|\underline{E}_0\right|^2 S$$

5. Comparer à la puissance transmise dans le métal en $z = 0$ à travers une surface S. Conclure.

2 Bleu du ciel et rouge du soleil couchant

Afin de décrire l'interaction entre les molécules de l'atmosphère et le rayonnement électromagnétique du soleil, on adopte le modèle dit "de l'électron élastiquement lié" dans lequel :

- les noyaux atomiques sont fixes ;
- chaque électron, de masse m_e, est traité indépendamment des autres et considéré comme soumis, en plus de la force exercée par le champ électromagnétique, à une force de rappel élastique du type $\overrightarrow{F} = -m_e\omega_0^2\overrightarrow{r}$ où $\overrightarrow{r}$ est le déplacement de l'électron par rapport à sa position au repos, et à une force dissipative modélisée comme un frottement fluide du type $\overrightarrow{F}_f = -\dfrac{m_e}{\tau}\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$. On prendra pour la suite : $\omega_0 = 2,0.10^{16}\ rad.s^{-1}$ et $\tau = 10^{-8}\ s$.


1. On étudie le mouvement forcé d'un électron sous l'action du champ électromagnétique d'une onde excitatrice. Le champ électrique de cette onde est donné, en notation complexe, par $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u}_x$. On admet que la vitesse de l'électron reste très inférieure à la vitesse de la lumière c.
   (a) Écrire l'équation du mouvement de l'électron en faisant une approximation classique.
   (b) On cherche la solution sous la forme $\underline{\overrightarrow{r}} = \underline{\overrightarrow{r}}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$. Déterminer $\underline{\overrightarrow{r}}_0$.
   (c) En déduire le moment dipolaire induit par l'onde sous la forme $\underline{\overrightarrow{p}} = \underline{\overrightarrow{p}}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$.
   (d) Simplifier l'expression de $\underline{\overrightarrow{p}}_0$ en tenant compte des valeurs numérique données et sachant que l'onde excitatrice est une onde lumineuse.
   (e) On rappelle l'expression de la formule de Larmor : $\mathcal{P}_{ray} = \dfrac{\langle \ddot{p}^2 \rangle}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$, où $\mathcal{P}_{ray}$ est la puissance moyenne rayonnée par le dipôle oscillant de moment dipolaire p. Exprimer $\mathcal{P}_{ray}$ en fonction de E_0, ω et de paramètres caractéristiques du modèle.
   (f) Expliquer la couleur bleue du ciel à l'aide de ce modèle.
2. (a) Rappeler l'expression de l'intensité I de l'onde excitatrice (moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting) en fonction de E_0.
   (b) Toujours dans le cadre de l'approximation de la question 1(e), exprimer la puissance rayonnée sous la forme $\mathcal{P}_{ray} = \sigma(\omega)I$. Quelle est la dimension de $\sigma(\omega)$?
   (c) On suppose que le milieu contient n^* électrons par unité de volume. L'énergie rayonnée par ces électrons est prélevée à l'onde incidente, ce qui fait que l'intensité $I(z)$ diminue avec z. En faisant un bilan d'énergie sur un cylindre dont les bases sont dans les plans de cotes z et $z + dz$, établir une équation différentielle de la forme $\dfrac{dI(z)}{dz} + \dfrac{I(z)}{\delta} = 0$ où δ est fonction de ω et des paramètres du modèle.
   Résoudre cette équation. Quelle est la signification physique de δ ?
   (d) Calculer δ pour une lumière bleue ($\lambda_{bleu} = 450\ nm$) et pour une lumière rouge ($\lambda_{rouge} = 750\ nm$), avec $n^* = 3,0.10^{26}\ m^{-3}$, $e = 1,6.10^{-19}\ C$, $m_e = 9,1.10^{-31}\ kg$, $c = 3,0.10^8\ m.s^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$.
   (e) Expliquer la couleur du soleil couchant à l'aide de ce modèle.