Correction - DM n^{o}14 : Ondes électromagnétiques

1 Réflexion sur un métal réel

L'onde incidente s'écrivant sous la forme $\overrightarrow{\underline{E}}_i = \overrightarrow{\underline{E}}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}$, on recherche le champ électrique transmis dans le milieu métallique sous la forme $\overrightarrow{\underline{E}}_t = \overrightarrow{\underline{E}}_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}_m z)}$. La pulsation est nécessairement identique d'après la linéarité des équations de Maxwell. Nous ne faisons cependant aucune hypothèse sur la direction ou l'amplitude du champ transmis dans le métal.

1. Les équations de Maxwell s'écrivent dans le métal en négligeant le courant de déplacement devant le courant de conduction, en notation complexe :

$$\begin{aligned}
&(MT) \qquad -i\underline{k}_m \overrightarrow{u}_z \cdot \overrightarrow{\underline{B}_t} = 0 \\
&(MG) \qquad -i\underline{k}_m \overrightarrow{u}_z \cdot \overrightarrow{\underline{E}_t} = 0 \\
&(MF) \qquad -i\underline{k}_m \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{E}_t} = -i\omega \overrightarrow{\underline{B}_t} \\
&(MA) \qquad -i\underline{k}_m \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{B}_t} = \mu_0 \gamma \overrightarrow{\underline{E}_t}
\end{aligned}$$

   L'équation de Maxwell Faraday permet d'écrire le champ magnétique $\overrightarrow{B}_t$ sous la forme :

$$\overrightarrow{\underline{B}_t} = \frac{\underline{k}_m}{\omega} \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{E}_t}$$

   Et en réinjectant cette expression dans celle de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$i\frac{\underline{k}_m^2}{\omega}\left[\overrightarrow{u}_z \wedge \left(\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{\underline{E}_t}\right)\right] = \mu_0 \gamma \overrightarrow{\underline{E}_t}$$

   En développant le double produit vectoriel et en utilisant (MG), on obtient :

$$i\frac{\underline{k}_m^2}{\omega} = \mu_0 \gamma$$

   et la relation de dispersion est donc donnée par :

$$\boxed{\underline{k}_m^2 = -i\mu_0 \gamma \omega}$$

2. Les ondes s'écrivent :

- *Onde incidente :*

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_i}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} \exp\left(i\left(\omega t - k_0 z\right)\right) \\ \underline{\overrightarrow{B_i}} = \dfrac{\overrightarrow{k_0} \wedge \underline{\overrightarrow{E_0}}}{\omega} \exp\left(i\left(\omega t - k_0 z\right)\right) \end{cases}$$

où $\overrightarrow{k_0} = k_0 \overrightarrow{u_z}$ avec $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$;

- *Onde réfléchie :*

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{\overrightarrow{E_{0r}}} \exp\left(i\left(\omega t + k_0 z\right)\right) \\ \underline{\overrightarrow{B_r}} = -\dfrac{\overrightarrow{k_0} \wedge \underline{\overrightarrow{E_{0r}}}}{\omega} \exp\left(i\left(\omega t + k_0 z\right)\right) \end{cases}$$

- *Onde transmise :*

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_t}} = \underline{\overrightarrow{E_{0t}}} \exp\left(i\left(\omega t - \underline{k}_m z\right)\right) \\ \underline{\overrightarrow{B_t}} = \dfrac{\underline{\overrightarrow{k_m}} \wedge \underline{\overrightarrow{E_{0t}}}}{\omega} \exp\left(i\left(\omega t - \underline{k}_m z\right)\right) \end{cases}$$

où $\underline{\overrightarrow{k_m}} = \underline{k}_m \overrightarrow{u_z}$ avec $\underline{k}_m = \dfrac{1-i}{\delta}$ (on choisit le signe + car l'onde se propage dans le sens des z croissants).

Le champ incident est transverse donc les champs électriques et magnétiques sont tangents à la surface du conducteur. Le champ électrique est donc continu à l'interface $z = 0$. Le conducteur étant réel, il est parcouru par des courants volumiques, il n'y a donc pas lieu de considérer une densité surfacique de courant à la surface. Le champ magnétique est donc continu en $z = 0$. Nous en déduisons les relations :

$$\underline{\overrightarrow{E_0}} + \underline{\overrightarrow{E_{0r}}} = \underline{\overrightarrow{E_{0t}}} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{k_0} \wedge \underline{\overrightarrow{E_0}}\right) - \left(\overrightarrow{k_0} \wedge \underline{\overrightarrow{E_{0r}}}\right) = \underline{\overrightarrow{k_m}} \wedge \underline{\overrightarrow{E_{0t}}}$$

ou encore (les champs électriques étant orthogonaux aux vecteurs d'onde) :

$$\underline{\overrightarrow{E_0}} + \underline{\overrightarrow{E_{0r}}} = \underline{\overrightarrow{E_{0t}}} \quad \text{et} \quad k_0\left(\underline{\overrightarrow{E_0}} - \underline{\overrightarrow{E_{0r}}}\right) = \underline{k}_m \underline{\overrightarrow{E_{0t}}}.$$

On définit les coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$ par $\underline{\overrightarrow{E_{0r}}} = \underline{r}\,\underline{\overrightarrow{E_0}}$ et $\underline{\overrightarrow{E_{0t}}} = \underline{t}\,\underline{\overrightarrow{E_0}}$. La résolution du système ci-dessus donne :

$$\underline{r} = \frac{k_0 - \underline{k}_m}{\underline{k}_m + k_0} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k_0}{\underline{k}_m + k_0}.$$

3. Le pouvoir réflecteur du métal est égal à $R = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{\Pi_r}(0,t) \cdot \left(-\overrightarrow{u_z}\right)\right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\Pi_i}(0,t) \cdot \overrightarrow{u_z}\right\rangle}$.

Or

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi_i}(0,t)\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{E_i}} \wedge \frac{\underline{\overrightarrow{B_i}}^*}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2c\mu_0}\left|\underline{E_0}\right|^2 \overrightarrow{u_z}$$

et

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi_r}(0,t) \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{E_r}} \wedge \frac{\overrightarrow{\underline{B_r}}^*}{\mu_0} \right) = -\frac{1}{2c\mu_0}\,|\underline{r}|^2\,|\underline{E_0}|^2\,\overrightarrow{u_z}.$$

Nous en déduisons : $R = |\underline{r}|^2 = \dfrac{1+\left(1-\dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2}{1+\left(1+\dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2}$.

Si $\delta \ll \lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega}$, le métal se comporte comme un métal parfait et R tend vers 1 : toute l'énergie de l'onde incidente est réfléchie.

4. Le champ électrique complexe dans le métal s'écrit :

$$\overrightarrow{\underline{E_t}} = \underline{t}\,\underline{E_0}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule cherchée est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_J &= \int_0^\infty \gamma \left\langle E_t(z,t)^2 \right\rangle S\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\gamma\,|\underline{E_t}|^2\,S\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\gamma\,|\underline{t}|^2\,|\underline{E_0}|^2\exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right)S\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\delta\gamma}{4}\,\frac{(2\delta\omega/c)^2}{1+\left(1+\dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2}\,|\underline{E_0}|^2\,S.
\end{aligned}$$

La puissance transmise par l'onde incidente est égale au flux moyen du vecteur de Poynting transmis en $z=0$, à travers la surface S. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_t &= \left\langle \overrightarrow{\Pi_t}(0,t) \right\rangle \cdot S\overrightarrow{u_z} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{E_t}} \wedge \frac{\overrightarrow{\underline{B_t}}^*}{\mu_0} \right) \cdot S\overrightarrow{u_z} \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega}\,|\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}(\underline{k_m})\,|\underline{E_0}|^2\,S \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega\delta}\,\frac{(2\delta\omega/c)^2}{1+\left(1+\dfrac{\omega\delta}{c}\right)^2}\,|\underline{E_0}|^2\,S.
\end{aligned}$$

Comme $\delta^2 = \dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}$, ces deux puissances sont égales. La puissance transmise par l'onde est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur. Si le conducteur est parfait, ces deux puissances sont nulles, ce qui confirme le commentaire de la question précédente.

2 Bleu du ciel et rouge du soleil couchant

Remarque : pour la justification des hypothèses prises dans ce modèle et des ordres de grandeur mis en jeu, on se reportera au cours sur le dipôle oscillant, dans la partie diffusion de la lumière.

1. (a) Le PFD appliqué à un électron non relativiste, en notation complexe, s'écrit :

$$\boxed{m_e \frac{d^2\underline{\overrightarrow{r}}}{dt^2} = -e\underline{\overrightarrow{E}} - m_e\omega_0^2\underline{\overrightarrow{r}} - \frac{m_e}{\tau}\frac{d\underline{\overrightarrow{r}}}{dt}}$$

où on a négligé la partie magnétique de la force de Lorentz puisque l'électron est relativiste.

(b) En cherchant la solution sous la forme $\underline{\overrightarrow{r}} = \underline{\overrightarrow{r}}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$, on obtient :

$$-m_e\omega^2\underline{\overrightarrow{r}}_0 e^{-i(\omega t-kz)} = -e\underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{-i(\omega t-kz)} - m_e\omega_0^2\underline{\overrightarrow{r}}_0 e^{-i(\omega t-kz)} + i\omega\frac{m_e}{\tau}\underline{\overrightarrow{r}}_0 e^{-(\omega t-kz)}$$

donc $\boxed{\underline{\overrightarrow{r}}_0 = \dfrac{e\underline{\overrightarrow{E}}_0/m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\dfrac{\omega}{\tau}}}$

Il s'agit d'une réponse du type filtre passe-bas du second ordre puisque $\underline{\overrightarrow{r}}_0(\omega \to 0) \to -\dfrac{e\underline{\overrightarrow{E}}_0}{m_e}$ et $\underline{\overrightarrow{r}}_0(\omega \to \infty) \to \overrightarrow{0}$.

(c) On peut en déduire le moment dipolaire induit par l'onde : $\overrightarrow{p} =$ "$q\overrightarrow{NP}$" $= e \times (-\overrightarrow{r})$, puisque l'électron n'est pas au centre de la distribution, mais au point d'étude, de sorte que $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{r}$. On peut finalement en déduire directement en notation complexe : $\underline{\overrightarrow{p}} = \underline{\overrightarrow{p}}_0 e^{-(\omega t-kz)}$ avec :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{p}}_0 = -e\underline{\overrightarrow{r}}_0 = \frac{-\,e^2\underline{\overrightarrow{E}}_0/m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\dfrac{\omega}{\tau}}}$$

(d) Sachant qu'on s'intéresse à une onde lumineuse, $\omega \simeq 10^{15}\ rad.s^{-1}$, donc $\omega^2 \ll \omega_0^2$ et $\dfrac{\omega}{\tau} \ll \omega_0^2$, donc :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{p}}_0 \simeq \frac{e^2\underline{\overrightarrow{E}}_0}{m_e\omega_0^2}}$$

(e) D'après la formule de Larmor :

$$\mathcal{P}_{ray} = \frac{\langle \ddot{p}^2 \rangle}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{1}{2}\left(\omega^2\frac{e^2E_0}{m_e\omega_0^2}\right)^2 \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^4E_0^2}{12\pi m_e^2\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

(f) Finalement on obtient $\mathcal{P}_{ray} \propto \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4$, c'est à dire que plus ω est grand, plus les ondes électromagnétiques sont diffusées (c'est à dire absorbées, puis ré-émises). Comme $\lambda_{bleu} < \lambda_{rouge}$, soit $\omega_{bleu} > \omega_{rouge}$, donc le bleu est beaucoup plus diffusé que le rouge. Un atome de l'atmosphère illuminé par la lumière du soleil va donc davantage émettre de rayonnement bleu que de rayonnement rouge vers notre œil. Par ailleurs, la sensibilité accrue de l'œil dans le vert fait que le ciel nous apparaît bleu et non violet.

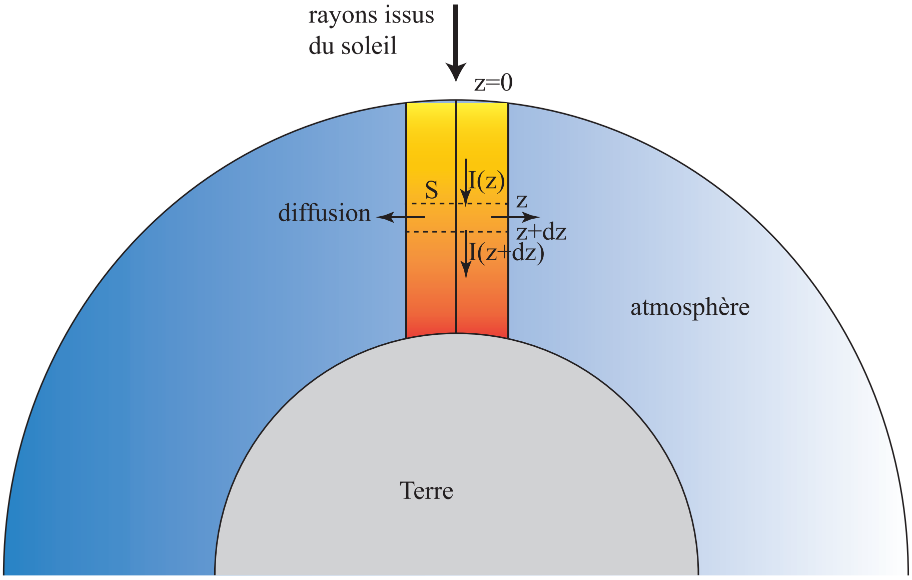
2. (a) $I = \left|\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle\right| = \dfrac{1}{2\mu_0 c}E_0^2$

(b)

$$\mathcal{P}_{ray} = \frac{e^4(2\mu_0 cI)}{12\pi m_e^2 \varepsilon_0 c^3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 = \frac{e^4\mu_0^2}{6\pi m_e^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 I$$

donc on peut poser $\mathcal{P}_{ray} = \sigma(\omega)I$, avec $\sigma(\omega) = \dfrac{e^4\mu_0^2}{6\pi m_e^2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4$. Comme I correspond au vecteur de Poynting, $\sigma(\omega)$ est homogène à une surface.

(c) Représentons la situation physique sur un schéma :



On fait un bilan de puissance à la tranche cylindrique d'atmosphère, de section S comprise entre les abscisses z et $z+dz$ qui contient $dN = Sdzn^*$ électrons. En régime stationnaire, la puissance entrant dans ce volume est égale à la puissance sortante, soit :

$$0 = I(z)S - I(z+dz)S - dN\mathcal{P}_{ray}$$

sachant que $\mathcal{P}_{ray}$ est la puissance rayonnée pour un seul électron.

On obtient donc : $0 = -\dfrac{dI}{dz}Sdz - Sdzn^*\sigma(\omega)I(z)$, qui s'identifie avec $\dfrac{dI(z)}{dz} + \dfrac{I(z)}{\delta} = 0$ avec $\boxed{\delta = \dfrac{1}{n^*\sigma(\omega)}}$ La résolution conduit à $\boxed{I(z) = I_0 e^{-\frac{z}{\delta}}}$. δ apparaît donc comme la distance caractéristique d'atténuation de l'onde incidente au cours de sa propagation dans l'atmosphère vers le sol.

(d) $\delta = \dfrac{1}{n^*\sigma(\omega)} = \dfrac{6\pi m_e^2}{n^* e^4 \mu_0^2}\left(\dfrac{\lambda\omega_0}{2\pi c}\right)^4$ donc

$$\delta_{rouge} = \frac{6\pi \times (9,1.10^{-31})^2}{3,0.10^{26} \times (1,6.10^{-19})^4 \times (4\pi.10^{-7})^2}\left(\frac{750.10^{-9} \times 2,0.10^{16}}{2\pi \times 3.10^8}\right)^4 = 2,0.10^5\ m \simeq 200\ km$$

$$\delta_{bleu} = \delta_{rouge} \times \left(\frac{450}{750}\right)^4 = 26\ km$$

On obtient une valeur plus faible pour δ_{bleu}, de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère (quelques dizaines de km), ce qui est cohérent avec le fait que toute la lumière bleue n'est pas encore complètement diffusée à la traversée de l'atmosphère (on rappelle que pour $z = \delta$, seule 63% de la lumière est diffusée). Le ciel est donc bleu en plein jour.

Par ailleurs, la valeur obtenue pour δ_{rouge} permet bien d'expliquer le phénomène de soleil couchant puisque lorsque le soleil est rasant en fin de journée, l'épaisseur d'atmosphère traversée est beaucoup plus importante et le bleu est intégralement diffusé alors que le rouge ne l'est pratiquement pas (l'épaisseur d'atmosphère traversée est probablement de l'ordre que quelques centaines de kilomètres dans ce cas).

(e) Comme $\sigma(\omega) \propto \omega^4$, $\delta \propto \dfrac{1}{\omega^4}$, ce qui signifie que le bleu est cette fois atténué plus rapidement puisque $\delta_{bleu} < \delta_{rouge}$. Le faisceau incident "perd" donc ses radiations rouges plus rapidement que ses radiations rouges. Cela explique la couleur rouge qui nous arrive depuis le soleil au soleil couchant. Ce n'est pas le cas en plein jour car la couche d'atmosphère traversée n'est pas suffisante (on rappelle que l'épaisseur de l'atmosphère est de l'ordre quelques dizaines de kilomètres).