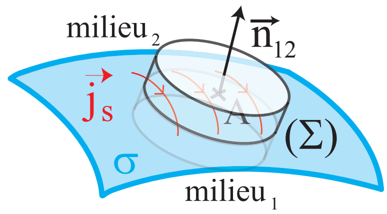
Correction Ex 1 et 3 - TD n°15 - Réflexion sous incidence normale d'une OPPH sur un plan conducteur parfait

1 Relations de passage au niveau de densité surfaciques de charge et de courant

1. Considérons une surface en forme de "boîte de camembert" avec deux faces parallèles à la surface (Σ) de surface δS suffisamment petite pour que toutes les grandeurs puissent être uniformes autour du point A. On applique le théorème de Gauss en régime stationnaire avec cette surface de Gauss :



$$\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \delta S}{\varepsilon_0}$$

avec $\begin{cases} \Phi_1 = -\vec{E}_{1n} \cdot \delta S \vec{n}_{12} = -E_{1n}\delta S \\ \Phi_2 = \vec{E}_{2n} \cdot \delta S \vec{n}_{12} = E_{2n}\delta S \\ \Phi_{lat} = \vec{E}_t \cdot \delta S_{lat} \vec{n}_{lat} = E_t \delta S_{lat} \end{cases}$

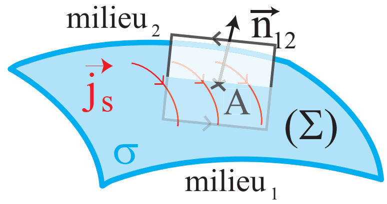
En faisant tendre l'épaisseur de la "boîte de camembert" vers 0, le terme Φ_{lat} tend vers 0. De plus, les valeurs des champs sont maintenant prises en A, point de la surface (Σ). On obtient donc :

$$\left[E_{2n}(A) - E_{1n}(A)\right] \delta S = \frac{\sigma(A)\delta S}{\mathcal{E}_0}$$

En divisant par δS et sachant que toutes les grandeurs sont suivant le vecteur $\vec{n}_{12}$:

$$\boxed{\vec{E}_{2n}(A) - \vec{E}_{1n}(A) = \frac{\sigma(A)}{\mathcal{E}_0}\vec{n}_{12}}$$

2. Considérons un contour orienté "à cheval" sur la surface (Σ) de longueur dL selon la parallèle à la surface (Σ), et de longueur $d\ell$ selon la perpendiculaire à la surface, suffisamment petit pour que les grandeurs puissent être considérées comme uniformes autour du point A.



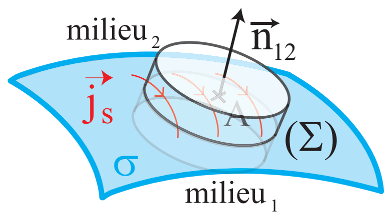
On applique la loi de Faraday au contour en faisant tendre $d\ell$ vers 0, et donc la circulation du champ sur la longueur $d\ell$ tend vers 0 en régime stationnaire [1] :

$$E_{2t}(A)dL - E_{1t}(A)dL = 0$$

En divisant par dL et sachant que les grandeurs sont vectorielles, on obtient :

$$\boxed{\vec{E}_{2t}(A) - \vec{E}_{1t}(A) = \vec{0}}$$

3. Considérons à nouveau une surface en forme de "boîte de camembert" avec deux faces parallèles à la surface (Σ) de surface δS suffisamment petite pour que toutes les grandeurs puissent être uniformes autour du point A.



1. Même en régime variable, le terme supplémentaire correspondant à la variation du flux tend vers 0 car la surface tend vers 0 et le champ ne peut varier infiniment rapidement. Il y a donc toujours continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

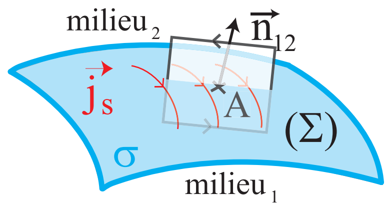
En utilisant le fait que $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif, on obtient, en faisant tendre à nouveau l'épaisseur de la boîte vers 0 de sorte que le flux à travers la surface latérale tend également vers 0 :

$$\Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = B_{2n}(A)\delta S - B_{1n}(A)\delta S = 0$$

Donc finalement, en divisant par δS et sachant que les grandeurs sont vectorielles :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{2n}(A) - \overrightarrow{B}_{1n}(A) = \overrightarrow{0}}$$

4. Considérons à nouveau un contour orienté "à cheval" sur la surface (Σ) de longueur dL selon la parallèle à la surface (Σ), et de longueur $d\ell$ selon la perpendiculaire à la surface, suffisamment petit pour que les grandeurs puissent être considérées comme uniformes autour du point A.



A l'aide du théorème d'Ampère appliqué au contour orienté, en régime stationnaire, pour lequel on fait tendre $d\ell$ vers 0, on obtient [2] :

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B_{2t}(A)dL - B_{1t}(A)dL = \mu_0 I_{enlacé} = \mu_0 j_s dL$$

où $\overrightarrow{j}_s$ est orienté dans le sens positif avec la règle de la main droite par rapport au contour. En divisant par dL et sachant que les grandeurs sont vectorielles, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{2t}(A) - \overrightarrow{B}_{1t}(A) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{12}}$$

5. Les relations précédentes peuvent s'écrire de façon compacte de la façon suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_2(A) - \overrightarrow{E}_1(A) = \frac{\sigma(A)}{\epsilon_0}\overrightarrow{n}_{12}}$$

La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue, et la composante normale est potentiellement discontinue.

$$\boxed{\overrightarrow{B}_2(A) - \overrightarrow{B}_1(A) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{12}}$$

La composante normale du champ magnétique est toujours continue, et la composante tangentielle est potentiellement discontinue.

2 Onde électromagnétique le long d'un conducteur parfait

1. Le champ doit vérifier l'équation de D'Alembert dans le vide [3], donc :

$$f''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(y) = 0$$

En posant $\Omega^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$, on obtient une équation du type harmonique :

$$f''(y) + \Omega^2 f(y) = 0$$

2. Le résultat reste valable en régime variable car on fait tendre $d\ell$ vers 0 et que la composante tangentielle du champ électrique est continue.

3. Il doit aussi vérifier l'équation de Maxwell-Gauss, mais la forme proposée la vérifie déjà automatiquement sans apporter de relation supplémentaire.

Remarque

|| *On voit ici que la présence du milieu conducteur a modifié la relation de dispersion du milieu.*

On peut donc distinguer 2 cas :

- $\Omega > 0$, soit $\omega > kc$:

$$f(y) = Bcos(\Omega y) + Asin(\Omega y)$$

Le champ électrique étant nécessairement continu puisqu'il est tangent au plan conducteur, dans lequel le champ est nul, on en déduit :

$$f(y=0) = 0 \qquad \text{donc} \qquad B = 0 \qquad \text{et} \qquad f(y) = Bsin(\Omega y)$$

- $\Omega \leq 0$, soit $\omega < kc$: les solutions conduisent à une fonction $f(y)$ qui diverge lorsque y tend vers l'infini, ce qui est physiquement impossible.

Finalement, la forme la plus générale pouvant répondre au problème est la suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = A\sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right)\cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z = A\sin\left(\Omega y\right)\cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z}$$

On notera que ce n'est pas une onde plane car l'amplitude dépend de la position.

Remarque

|| *Cependant, l'onde est ici transverse électrique et est notée TE. Si de plus on ajoute un second plan conducteur, on fait apparaître des modes notés TE_n.*

2. Calculons le champ magnétique associé à l'onde précédente[4]. L'onde n'étant pas plane, on revient à l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$:

$$-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\sin\left(\Omega y\right)\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Omega\cos\left(\Omega y\right)\cos(\omega t - kx) \\ Ak\sin\left(\Omega y\right)\sin(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

En intégrant par rapport au temps et en ne tenant pas compte des constantes d'intégration

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Omega}{\omega}A\cos(\Omega y)\sin(\omega t - kx) \\ -\dfrac{k}{\omega}A\sin(\Omega y)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

4. Attention, l'onde n'est pas plane et ne peut donc pas utiliser la relation de structure comme écrit ci-dessous :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega}\vec{u}_x \wedge A\sin(\Omega y)\cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z = -\frac{k}{\omega}A\sin(\Omega y)\cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_y$$

On voit effectivement qu'il manque un terme par rapport au calcul fait dans le corps du texte.

Remarque

|| *On voit ici que le champ magnétique n'est pas transverse, et ce n'est pas une onde TM.*

Vérifions que $div\overrightarrow{B} = 0$:

$$div\overrightarrow{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

MT est donc bien vérifiée.

3. Le champ étant continu en $y = 0$ car il est tangentiel au plan conducteur, il n'y a pas de charges surfaciques sur le plan conducteur :

$$\boxed{\sigma = 0}$$

Au niveau du plan conducteur, la discontinuité du champ magnétique s'écrit :

$$\overrightarrow{B}_{2,vide}(y=0) - \overrightarrow{B}_{1,conducteur}(y=0) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{12,conducteur/vide}$$

Donc $-\frac{\Omega}{\omega} A \sin(\omega t - kx) = \mu_0 \overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{u}_y$, donc il existe un courant surfacique :

$$\boxed{\overrightarrow{j}_s = \frac{\Omega}{\mu_0 \omega} A \sin(\omega t - kx) \overrightarrow{u}_z}$$

On retrouve bien que les courants surfaciques sont parallèles au champ électrique incident.

4. La valeur moyenne du vecteur de Poynting de cette onde est donnée par [5] :

$$\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \langle \overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{kA^2}{2\mu_0 \omega} \sin^2(\Omega y) \vec{u}_x$$

La valeur moyenne de la densité d'énergie électromagnétique de cette onde est donnée par :

$$\langle u_{em} \rangle = \langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{\epsilon_0 A^2}{4} \sin^2(\Omega y) + \frac{A^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[\Omega^2 \cos^2(\Omega y) + k^2 \sin^2(\Omega y) \right]$$

Sachant que $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$, on peut écrire :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 A^2}{4} \sin^2(\Omega y) + \frac{A^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cos^2(\Omega y) + k^2 \sin^2(\Omega y) \right] = \boxed{\frac{\epsilon_0 A^2}{4} + \frac{A^2 k^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[\sin^2(\Omega y) - \cos^2(\Omega y) \right]}$$

5. Le terme supplémentaire est nul car $\langle \cos \sin \rangle = 0$.