

Correction - DM n°15 : Révisions de thermodynamique de MPSI

Transformations réversibles et irréversibles

1. Questions de cours

- 1.1. Un système est fermé s'il ne peut pas échanger de matière avec le milieu extérieur.
 Second principe de la thermodynamique : à tout système fermé, on peut associer une fonction d'état extensive qui s'exprime en J.K^{-1} , appelée entropie, notée S , telle que :
- S est maximale à l'équilibre thermodynamique.
 - S ne peut qu'augmenter lors de la transformation d'un système isolé.
- Pour une transformation entre les états i et f d'un système fermé,
- $$\Delta S = S_f - S_i = S_e + S_c = \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{ech}}}{T_{\text{surf}}} + S_c \quad \text{où } S_e \text{ est l'entropie échangée, } T_{\text{surf}} \text{ la température de surface du système et } \delta Q_{\text{ech}} \text{ le transfert thermique échangé avec le milieu extérieur. } S_c \text{ l'entropie de création est nulle si la transformation est réversible et strictement positive sinon.}$$
- 1.2. Un système est isolé s'il ne peut échanger ni matière ni énergie avec le milieu extérieur. On a alors toujours $\delta Q_{\text{ech}}=0$ d'où $\Delta S = S_c \geq 0$ lors de la transformation d'un système isolé.
- 1.3. On a affaire à des transformations irréversibles s'il y a des frottements mécaniques, une dissipation d'énergie thermique par effet Joule, une diffusion de particules, un transfert thermique entre deux corps de températures différentes, ...
- 1.4.1. D'après la première loi de Joule, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température $U(T)$ et par définition, $C_V = \left[\frac{\partial U}{\partial T} \right]_V = \frac{dU}{dT}$ soit $dU = C_V dT$ et si $C_V = \text{cte}$, on en déduit par intégration, $\Delta U = U_f - U_i = C_V \Delta T = C_V (T_f - T_i)$.
- 1.4.2. En utilisant l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$ pour un gaz parfait $C_V dT = TdS - \frac{nRT}{V} dV$ soit $dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$ et par intégration, $\Delta S = C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$.
- 1.4.3. D'après la seconde loi de Joule et par définition de C_p on a $dH = C_p dT$ avec $H = U + pV = U + nRT$ d'où $dH = dU + nRdT$ et $C_p dT = C_V dT + nRdT$ et après simplification par $dT \neq 0$, $C_p - C_V = nR$: relation de Mayer.
- 1.4.4. On a $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ et $C_p - C_V = nR$ d'où $\gamma C_V - C_V = nR$ soit $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$.

2. Compression d'un gaz parfait

- 2.1. A l'équilibre, la résultante des forces appliquées au piston est nulle. Les forces appliquées sont, le poids du piston $M \vec{g} = -Mg \vec{e}_z$ où \vec{e}_z est le vecteur unitaire de l'axe vertical ascendant, la force de pression $\vec{F}_0 = -P_0 S \vec{e}_z$ due à l'action de l'atmosphère et enfin celle due au gaz présent dans le cylindre $\vec{F}_1 = P_1 S \vec{e}_z$. Par projection, $-Mg - P_0 S + P_1 S = 0$ d'où $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$.
- 2.2. Ajout de la masse m et nouvel équilibre mécanique avant tout transfert thermique.

2.2.1. La température et la pression à l'extérieur du système restent constantes, de plus, aucun transfert thermique n'a eu le temps de se produire. On a donc une transformation monotherme, monobare, adiabatique et irréversible.

2.2.2. Après avoir ajouté la surcharge m sur la piston et à l'équilibre mécanique, on retrouve la même équation que dans la question précédente avec en plus le poids de la

$$\text{surcharge : } -Mg - mg - P_0S + P_2S = 0 \text{ soit } \boxed{P_2 = P_0 + \frac{(M+m)g}{S} = P_1 + \frac{mg}{S}}.$$

2.2.3. Le travail W_{12} est le travail reçu par le système soumis à la pression extérieure constante $p_e = P_2$ quand son volume varie de ΔV or, pour les forces de pression,

$$W = -\int p_e dV \text{ soit ici } \boxed{W_{12} = -\int p_e dV = -P_2 \Delta V_{12}}.$$

2.2.4. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système fermé du gaz parfait entre l'état initial 1 et l'équilibre mécanique 2, on obtient $\Delta E = \Delta U = W + Q$ (on néglige le déplacement du centre d'inertie du gaz) où $W = W_{12}$ le travail reçu par le gaz et $Q = 0$ car le transfert thermique ne s'est pas produit. En utilisant ensuite $\Delta U = C_v (T_2 - T_0) = -P_2 \Delta V_{12}$ et comme $\Delta V = S(a_2 - a_1)$, on a

$$C_v (T_2 - T_0) = -P_2 S (a_2 - a_1) \text{ soit } \boxed{a_2 = a_1 - \frac{C_v (T_2 - T_0)}{P_2 S}}.$$

2.2.5. Comme le gaz est parfait $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$, $T_0 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{P_1 S a_1}{nR}$ et $T_2 = \frac{P_2 S a_2}{nR}$. En

remplaçant dans l'équation précédente, on en déduit :

$$a_2 = a_1 - \frac{nR}{\gamma-1} \frac{P_2 a_2 S - P_1 a_1 S}{nR P_2 S} = a_1 - \frac{P_2 a_2 - P_1 a_1}{(\gamma-1) P_2} \Leftrightarrow (\gamma-1) P_2 (a_2 - a_1) = -P_2 a_2 + P_1 a_1 \text{ et}$$

$$\text{finalement, } \boxed{a_2 = \frac{P_1 + (\gamma-1) P_2}{\gamma P_2} a_1}.$$

2.3. On suppose maintenant que l'équilibre thermique s'est établi avec l'extérieur.

2.3.1. Cette fois, la pression du gaz reste constante, sa température va tendre vers T_0 sous l'effet du transfert thermique, on a donc une transformation isobare, monotherme, quasistatique et irréversible.

2.3.2. Lorsque l'équilibre thermique s'est établi, on a toujours l'équilibre mécanique et à

$$\text{nouveau, } -Mg - mg - P_0S + P_3S = 0 \text{ soit } \boxed{P_3 = P_0 + \frac{(M+m)g}{S} = P_2}.$$

Comme à l'équilibre thermique, la température du système est T_0 comme au départ (transformation monotherme), $T_0 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{P_1 V_1}{nR}$ soit $P_3 V_3 = P_1 V_1$ et comme $V_3 = a_3 S$ et

$$V_1 = a_1 S \text{ on en déduit } \boxed{a_3 = \frac{P_1}{P_3} a_1}. \text{ En remplaçant } P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S} \text{ et } P_3 = P_0 + \frac{(M+m)g}{S}$$

$$\text{dans l'expression précédente, on obtient alors } \boxed{a_3 = \frac{P_0 S + Mg}{P_0 S + (M+m)g} a_1}.$$

2.4. La transformation complète étant monotherme, $\Delta T = 0$ et $\Delta U = 0$ pour le gaz parfait, par application du premier principe, on a $\Delta U = W_T + Q_T = 0$ d'où $\boxed{W_T = -Q_T}$

Lors de la dernière phase, $W_{23} = -\int p_e dV$ où $p_e = p = P_3 = P_2$, on a donc une transformation isobare et $W_{23} = -P_2 (V_3 - V_2)$. Au total, $W_T = W_{12} + W_{23} = -P_2 (V_1 - V_3)$ et $\boxed{W_T = -P_2 S (a_3 - a_1)}$.

On a donc $Q_T = -W_T = P_2 S (a_3 - a_1)$. Ainsi, $Q_T = P_2 (V_3 - V_1) = P_2 \left(\frac{nRT_0}{P_3} - \frac{nRT_0}{P_1} \right)$ avec

$$P_3 = P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} \quad \text{et} \quad P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S} \quad \text{d'où} \quad Q_T = nRT_0 \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right) = nRT_0 \frac{P_1 - P_2}{P_1} = nRT_0 \frac{-mg}{P_0 S + Mg} \quad \text{d'où}$$

finalement $Q_T = \frac{-mgnRT_0}{P_0 S + Mg} < 0$: transfert thermique vers l'extérieur.

2.5. Variations d'entropie sur l'ensemble des transformations.

2.5.1. Le milieu extérieur (l'atmosphère) reçoit au cours de la transformation un transfert thermique $Q_{atm} = -Q_T$ alors que sa température reste égale à T_0 . On a donc

$$\Delta S_{ext} = \frac{Q_{atm}}{T_0} = -\frac{Q_T}{T_0} = \frac{mgnR}{P_0 S + Mg}$$

2.5.2. En utilisant 1.4.2., $\Delta S = C_v \ln \frac{T_0}{T_0} + nR \ln \frac{V_3}{V_1}$ avec, comme la transformation est

$$\text{monotherme, } \frac{V_3}{V_1} = \frac{P_1}{P_3} = \frac{P_0 S + Mg}{P_0 S + (M+m)g} \quad \text{soit} \quad \Delta S_{gaz} = nR \ln \left(\frac{P_0 S + Mg}{P_0 S + (M+m)g} \right).$$

2.5.3. Variation d'entropie de l'univers :

$$\Delta S = S_c = \Delta S_{ext} + \Delta S_{gaz} = \frac{mgnR}{P_0 S + Mg} + nR \ln \left(\frac{P_0 S + Mg}{P_0 S + (M+m)g} \right)$$

En posant $x(m) = \frac{mg}{Mg + P_0 S}$, on a $1 + x(m) = \frac{mg + Mg + P_0 S}{Mg + P_0 S}$, on reconnaît aussi

$\ln \frac{1}{1+x} = -\ln(1+x)$ dans l'expression de ΔS . On peut donc bien écrire

$$\Delta S = nR [x - \ln(1+x)].$$

2.5.4. La transformation n'est pas réversible puisque $x - \ln(1+x)$ est toujours positif ou nul (nul pour $x=0$).

2.6. On pose $x_j(m) = \frac{\mu g}{[M + (j-1)\mu]g + P_0 S}$ et si N est grand, $x_j(\mu) \ll 1$.

2.6.1. En reprenant l'expression précédente, $\Delta S_j = nR [x_j - \ln(1+x_j)]$.

2.6.2. Si N grand, $x_j(\mu) \ll 1$, d'où $\ln(1+x_j) \approx x_j - \frac{x_j^2}{2}$ d'où $\Delta S_j \approx nR \frac{x_j^2}{2}$. La variation d'entropie de l'univers correspondant à l'ajout de toutes les petites masses se met alors

$$\text{sous la forme} \quad \Delta S = \sum_{j=1}^N \Delta S_j \approx nR \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{2}.$$

2.6.3. En remarquant que $x_j(\mu) \leq x(\mu)$, alors $\Delta S \approx nR \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{2} \leq nR \sum_{j=1}^N \frac{x(\mu)^2}{2} = nRN \frac{x(\mu)^2}{2}$. Or

$$Nx(\mu) = x(m) \quad \text{d'où} \quad \Delta S \leq nR \frac{x(m)x(\mu)}{2}.$$

2.6.4. Lorsque N tend vers l'infini, μ tend vers zéro ainsi que $x(\mu)$ d'où $\Delta S \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. La transformation devient réversible.

3. Irréversibilité de la détente de Joule-Gay Lussac

3.1. Détente de Joule-Gay Lussac.

3.1.1. Si on prend comme système, tout ce qui est à l'intérieur du récipient, c'est à dire le gaz parfait et le vide au départ, le volume du système ne varie pas et $\boxed{W=0}$.

3.1.2. Les parois sont adiabatiques, on a donc également $Q=0$ d'où, d'après le premier principe usuel, $\boxed{\Delta U = W + Q = 0}$.

3.1.3. On se souvient que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. Or ici, il n'y a pas de variation de l'énergie interne d'où $\boxed{\text{aucune variation de température}}$.

3.1.4. D'après la question 1.4.2., $\Delta S_{Gaz} = C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$ soit ici, $\boxed{\Delta S_{Gaz} = nR \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}}$.

3.1.5. La transformation étant adiabatique, S_e l'entropie échangée par le gaz est nulle $\boxed{S_e = 0}$. De $\Delta S_{Gaz} = S_e + S_c$ on déduit $\boxed{S_c = \Delta S_{Gaz} = nR \ln \left[1 + \frac{V_2}{V_1} \right] \neq 0}$ donc la transformation est $\boxed{\text{irréversible}}$.

3.2. Transformation quasi statique.

3.2.1. En reprenant le raisonnement précédent, $\boxed{\Delta S_j = nR \ln \left[\frac{V_{j+1}}{V_j} \right] = nR \ln \left[\frac{V_j + \delta V}{V_j} \right]}$.

3.2.2. A la fin de la transformation : $\Delta S_{Gaz} = \sum_j \Delta S_j = nR \sum_j \ln \left(\frac{V_{j+1}}{V_j} \right) = nR \ln \left(\prod_j \frac{V_{j+1}}{V_j} \right)$.

Les termes du produit se simplifient deux à deux, d'où $\Delta S_{Gaz} = nR \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$

3.2.3. On retrouve ainsi le $\boxed{\text{même résultat}}$. Cela était prévisible car S est une fonction d'état et on part du même état initial pour aboutir au même état final. Cette fois, le fait de rendre la transformation quasistatique ne l'a pas rendue réversible. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Etude de machines thermiques

1. Etude préliminaire

1.1. Lorsque le système décrit un cycle complet, l'état final de ce dernier est confondu avec l'état initial. U et S étant des fonctions d'état, on a alors $\boxed{\Delta U_{Cycle} = U_f - U_i = 0}$ et

$$\boxed{\Delta S_{Cycle} = S_f - S_i = 0}$$

Machine monotheurme.

1.2. D'après le premier principe de la thermodynamique, $\Delta U = Q_1 + W = 0$ car le fonctionnement est cyclique. De plus, d'après le second principe : $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + S_c = 0$. Or S_c est toujours positif

ou nul d'où $\frac{Q_1}{T_1} = -S_c \leq 0 \Rightarrow Q_1 \leq 0$ et $W = -Q_1 \geq 0$, le système ne peut donc que recevoir du travail et fournir un transfert thermique. Cette machine peut fonctionner comme radiateur.

1.3. Si le fonctionnement du système est réversible, alors $S_c = 0$. En utilisant les expressions précédentes, on en déduit $Q_1 = 0$ et $W = 0$.

2. Moteur à explosion

2.1. D'après la première loi de Joule, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température et $dU = C_V dT$ d'où $\Delta U_{23} = C_V (T_3 - T_2)$ et $\Delta U_{41} = C_V (T_1 - T_4)$.

2.2. Les transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ sont isochores, le travail reçu par le système lors de ces transformations est donc nul. D'après le premier principe, on a alors :

$$\Delta U_{23} = Q_{23} + W_{23} = Q_{23} = C_V (T_3 - T_2) \text{ et } \Delta U_{41} = Q_{41} = C_V (T_1 - T_4). \text{ Or } C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{ et pour tout } i,$$

$P_i V_i = nRT_i$ d'où $Q_{23} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_3 V_3 - P_2 V_2) = \frac{V_2}{\gamma - 1} (P_3 - P_2)$ et $Q_{41} = \frac{V_1}{\gamma - 1} (P_1 - P_4)$. D'après les données, $P_3 > P_2$ et $P_4 > P_1$ d'où $Q_{23} < 0$ et $Q_{41} < 0$. Lors de la transformation $2 \rightarrow 3$ le système reçoit un transfert thermique de la part de la source chaude. Lors de la transformation $4 \rightarrow 1$ le système fournit un transfert thermique à la source froide.

2.3. Par définition $\eta_m = \frac{\text{énergie à optimiser}}{\text{énergie coûteuse}}$. Ici, l'énergie à optimiser est W et l'énergie

coûteuse est Q_{23} . Ainsi $\eta_m = \frac{W}{Q_{23}} = -\frac{W}{Q_{23}}$. D'après le premier principe de la thermodynamique,

lors d'un cycle $\Delta U = 0 = W + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$. Or $Q_{12} = Q_{34} = 0$ car les transformations $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ sont adiabatiques. Ainsi $\eta_m = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$. En utilisant les résultats

précédents, on trouve alors $\eta_m = 1 + \frac{C_V (T_1 - T_4)}{C_V (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

2.4. Les transformations $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ étant isentropiques (adiabatiques réversibles) et le système étant un gaz parfait, on peut utiliser les relations de Laplace : $TV^{\gamma-1} = cte$. D'où

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = K^{\gamma-1} \text{ et } \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{\gamma-1} = K^{\gamma-1}.$$

2.5. Ainsi $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = K^{\gamma-1} = \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1}$ et $\eta_m = 1 - K^{1-\gamma}$.

2.6. Application numérique : $\gamma = 1,5$ et $K = 9$. $\eta_m = 1 - 9^{1-1,5} = 1 - \frac{1}{\sqrt{9}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 67\%$.

3. Moteur de Stirling

3.1. Voir diagramme ci-contre.

3.2. Le transfert thermique récupéré par la zone de récupération lors de l'étape de refroidissement du fluide est égal à celui fourni au fluide lors de l'étape de chauffage d'où $Q_2 = -Q_4$.

$$3.3. \quad W_3 = -\int p dV = -nRT_2 \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = -nRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right).$$

Comme $V_2 < V_1$ alors $\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) > 0$ et $W_3 < 0$. Le gaz fournit un travail au milieu extérieur.

3.4. L'étape 3 est isotherme. Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa

température alors sur cette étape $\Delta U = Q_3 + W_3 = 0$ d'où $Q_3 = -W_3 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$.

3.5. Les étapes 2 et 4 sont isochores, le travail est donc nul sur ces deux étapes. Ainsi $W = W_1 + W_3$

avec $W_1 = -\int p dV = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ d'où $W = nR(T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$.

3.6. Comme précédemment, $\eta_m = \left| \frac{\text{énergie à optimiser}}{\text{énergie coûteuse}} \right|$. Ici l'énergie à optimiser est W . Le

système échange un transfert thermique à chaque étape. Or $Q_2 = -Q_4$, les transferts thermiques s'annulent mutuellement, ils ne rentrent donc pas dans le bilan d'énergie car ce qui est reçu en 2 par le gaz est restitué en 4. La seule énergie coûteuse est alors $Q_3 > 0$ d'où

$$\eta_m = \left| \frac{W}{Q_3} \right| = -\frac{W}{Q_3} = \frac{nR(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad \text{On retrouve le rendement de Carnot, le moteur}$$

Stirling fonctionne donc de façon réversible.

Ce moteur encore méconnu a un coût de revient très élevé. Il est tout de même utilisé dans des applications militaires ou de pointe. (propulsion de frégates, sous-marins ou drone, réfrigération industrielle)

Le saurez-vous ?

En 1900, Rudolf Diesel présenta son fameux moteur à l'exposition universelle de Paris. Le carburant utilisé était de l'huile végétale brute d'arachide.

La température de vaporisation de l'hélium liquide est de 4,2K. On l'utilise pour atteindre de très basses températures.

