DM n^{o}15 : Révisions de thermodynamique de MPSI

Transformations réversibles et irréversibles

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

1. Questions de cours

1.1. Donner la définition d'un système fermé. Pour un système thermodynamique fermé, énoncer le second principe de la thermodynamique. On rappellera notamment le bilan entropique liant la variation d'entropie ΔS du système fermé à l'entropie échangée S_e et l'entropie créée S_c.

1.2. Donner la définition d'un système isolé. Que devient le bilan entropique du 1.1. dans le cas d'un système isolé ?

1.3. Donner deux exemples de causes d'irréversibilité.

1.4. Dans les questions suivantes, on notera n la quantité de matière de gaz parfait, R la constante des gaz parfaits, C_p la capacité thermique à pression constante des n moles de gaz, C_v la capacité thermique à volume constant des n moles de gaz, et γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants. On supposera que C_v et C_p sont indépendants de la température T. On s'attachera à soigner les explications.

- 1.4.1. Exprimer la variation d'énergie interne d'un gaz parfait en fonction de la variation de température.
- 1.4.2. Exprimer la variation d'entropie d'un gaz parfait en fonction de n, R et des températures et volumes dans l'état initial et final.
- 1.4.3. Dans le cas d'un gaz parfait, donner la relation entre C_p, C_v, R et n. Quel est le nom donné à cette relation ?
- 1.4.4. Exprimer C_p et C_v en fonction de n, R et γ.

2. Compression d'un gaz parfait

Un cylindre circulaire d'axe vertical et de section S est fermé par un piston de masse M. Pour traiter l'aspect thermodynamique de ce problème, on négligera les frottements du piston sur le cylindre (NB : ces frottements existent néanmoins et permettent d'atteindre l'état d'équilibre mécanique).

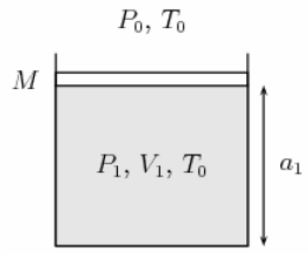


Figure 1.

On introduit dans le cylindre à température ambiante T_0 une quantité d'azote n telle que le plan inférieur du piston soit, à l'équilibre, à une distance a_1 du fond (fig.1). On notera P_0 la pression atmosphérique et on assimilera l'azote à un gaz parfait diatomique.

2.1. En étudiant l'équilibre du piston, donner l'expression de la pression P_1 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, S, et l'accélération de la pesanteur g.

2.2. On ajoute dorénavant une surcharge de masse m sur le piston (fig.2). On suppose dans cette question que le nouvel équilibre mécanique est atteint avant que tout échange de chaleur n'ait eu lieu avec l'extérieur.

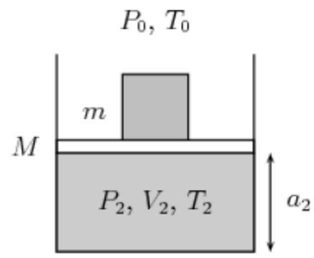


Figure 2.

2.2.1. La transformation subie par le gaz est-elle isotherme, monotherme, isobare, monobare, isochore, quasistatique, adiabatique, réversible, irréversible ?

2.2.2. Exprimer la pression P_2 dans le cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g.

2.2.3. En déduire W_{12} en fonction de P_2 et ΔV_{12}, le travail reçu par le gaz quand son volume a varié de ΔV_{12}.

2.2.4. En appelant T_2 la température juste après l'équilibre mécanique et avant tout échange thermique, appliquer le premier principe de la thermodynamique au système fermé du gaz parfait et exprimer la nouvelle hauteur du piston a_2 en fonction de a_1, C_v, T_2, T_0, P_2 et S.

2.2.5. En déduire alors a_2 en fonction de a_1, γ, P_1 et P_2. On pourra utiliser l'équation d'état du gaz et la relation établie en 1.4.1.

2.3. On suppose maintenant que l'équilibre thermique s'est établi avec l'extérieur.

2.3.1. Reprendre la question 2.2.1.

2.3.2. Exprimer la pression P_3 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g. Exprimer ensuite la nouvelle position d'équilibre du piston a_3 en fonction de a_1, P_1 et P_3, puis en fonction de a_1, P_0, M, m, S et g.

2.4. Quelle est la relation entre le transfert thermique Q_T et le travail $W_T=W_{13}$ reçus par le gaz sur l'ensemble de la transformation subie par ce dernier (c'est à dire entre les deux équilibres thermodynamiques 1 et 3). Donner l'expression de W_T.

En déduire l'expression de Q_T en fonction de P_3, a_3, a_1 et S. Montrer que $Q_T = \dfrac{-mgnRT_0}{P_0S+Mg}$.

2.5. On souhaite ici calculer les variations d'entropie sur l'ensemble des transformations.

2.5.1. L'atmosphère extérieure ayant en permanence une température égale à T_0, on peut la modéliser par un thermostat. En déduire l'expression de l'entropie reçue par l'extérieur, c'est à dire l'atmosphère. Exprimer la variation d'entropie de l'extérieur ΔS_{ext} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S.

2.5.2. En utilisant la question du 1.4.2. exprimer la variation d'entropie totale du gaz parfait dans le cylindre ΔS_{gaz} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S.

2.5.3. En déduire la variation d'entropie de l'univers (ou entropie créée) $\Delta S=S_c=\Delta S_{gaz}+\Delta S_{ext}$.

En posant $x(m)=\dfrac{mg}{Mg+P_0S}$, montrer que $\Delta S = nR(x - \ln(1 + x))$.

2.5.4. La transformation est-elle réversible ? Justifier la réponse.

2.6. On veut rendre cette fois-ci la transformation quasi statique, en ajoutant la surcharge de masse m progressivement : on dépose successivement N masses identiques μ très petites, en attendant à chaque fois que les équilibres thermique et mécanique s'établissent avant d'ajouter la petite masse suivante. On passe ainsi par une suite d'états d'équilibre thermodynamique. Lorsqu'on dépose la $j^{\text{ième}}$ masse μ, j-1 masses μ sont déjà sur le piston. On posera $x_j(m)=\dfrac{\mu g}{\left[M+(j-1)\mu\right]g+P_0S}$ et on notera que si N est grand, $x_j(\mu) \ll 1$.

2.6.1. Exprimer la variation d'entropie de l'univers ΔS_j correspondant à l'ajout de la j^ième petite masse μ, alors que j-1 masses sont déjà posées.
2.6.2. Faire un développement limité au second ordre de ΔS_j sur la variable $x_j(\mu)$. Exprimer sous la forme d'une somme la variation d'entropie de l'univers correspondant à l'ajout de toutes les petites masses.
2.6.3. En remarquant que $x_j(\mu) \leq x(\mu)$, montrer que l'on peut majorer la variation totale d'entropie de l'univers par $nR.x(m).x(\mu)/2$.
2.6.4. Que devient la variation d'entropie lorsque N tend vers l'infini ? A-t-on rendu la transformation réversible en travaillant de façon quasi statique?

3. Irréversibilité de la détente de Joule-Gay Lussac

3.1. Détente de Joule-Gay Lussac.

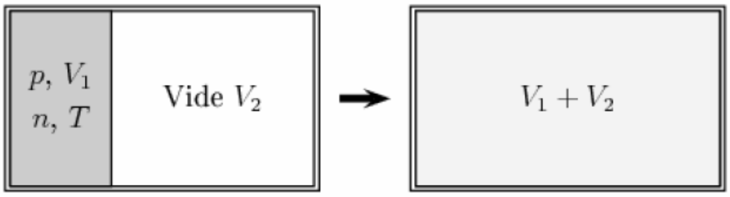


Figure 3 : détente de Joule Gay Lussac simple.

On considère un récipient ayant des parois rigides et adiabatiques. Il est composé de deux compartiments de volume V_1 et V_2 séparés par une cloison. On introduit n moles de gaz parfait à la température T dans un des deux compartiments. Le deuxième compartiment est vide (fig.3). Lorsqu'on enlève la cloison séparant les deux compartiments, le gaz se répand dans tout le volume.
On supposera que le travail fourni pour enlever la cloison est négligeable.

3.1.1. Quel est le travail reçu par le gaz parfait au cours de la détente ?
3.1.2. Montrer que l'énergie interne du gaz est constante au cours de la détente.
3.1.3. En déduire que la température du gaz ne change pas au cours de la détente.
3.1.4. En utilisant la question 1.4.2., calculer la variation d'entropie du gaz au cours de la détente en fonction de n, R, V_1 et V_2.
3.1.5. Que vaut l'entropie échangée par le gaz S_e ? Que vaut l'entropie créée au sein du gaz S_c ? La transformation subie par le gaz est-elle réversible ?

3.2. On opère cette fois-ci de façon quasi statique à l'aide d'un récipient comportant N+1 compartiments, N étant très grand devant 1. Le premier compartiment contenant initialement le gaz a toujours le même volume V_1. Le reste du récipient de volume V_2 est subdivisé en N petits compartiments de volumes δV séparés par des cloisons (fig.4).

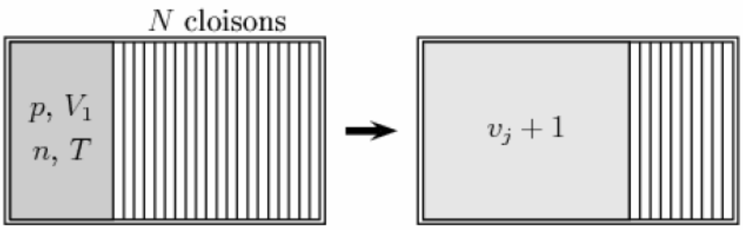


Figure 4 : détente de Joule Gay Lussac quasistatique.

On souhaite procéder en augmentant le volume occupé par le gaz par petites quantités δV. On enlève pour cela une à une les cloisons séparant les compartiments. On attend à chaque fois le retour à l'équilibre avant d'enlever une nouvelle cloison : le gaz est alors à chaque instant dans un état infiniment proche d'un état d'équilibre thermodynamique.

3.2.1. Exprimer la variation d'entropie ΔS_j correspondant à la suppression de la cloison j en fonction de n, R, δV et le volume V_j occupé par le gaz avant d'enlever la cloison j.
3.2.2. Exprimer la variation d'entropie du gaz correspondant à la suppression de toutes les cloisons en fonction de n, R, V_1 et V_2.
3.2.3. Comparer les résultats des questions 3.1.4. et 3.2.2. En procédant de façon quasi statique, a-t-on rendu la transformation réversible ?

Etude de machines thermiques

1. Etude préliminaire

On considère un système décrivant un **cycle** thermodynamique durant lequel il est susceptible d'échanger un transfert thermique avec une ou deux sources thermiques ainsi qu'un travail avec le milieu extérieur.

On note:

- U et S respectivement l'énergie interne et l'entropie du système,
- S_c l'entropie créée par le système durant le cycle complet,
- W le travail reçu algébriquement par le système durant le cycle complet.

1.1. Quelles sont les valeurs particulières des variations d'énergie interne U et d'entropie S du système lorsque celui-ci décrit un cycle complet?

On commence par traiter le cas particulier d'une machine monotherme échangeant un transfert thermique avec une source à la température T_1. On note Q_1 le transfert thermique reçu algébriquement par le système en provenance de la source.

1.2. En utilisant les deux premiers principes de la thermodynamique, montrer que dans ce cas le système peut uniquement recevoir du travail et fournir un transfert thermique. Quel est l'intérêt d'une telle machine ?

1.3. Quelles sont les valeurs de S_c, W et Q_1 lorsque l'évolution thermodynamique du système est réversible ?

2. Moteur à explosion

Le moteur à explosion fonctionne sur le principe du cycle illustré par le diagramme de Clapeyron (P,V) de la figure 1. Ce cycle peut se décomposer en quatre transformations thermodynamiques consécutives subies par un mélange air-carburant initialement admis dans une chambre de combustion via une soupape d'admission:

- une compression isentropique (adiabatique réversible) du mélange (portion 1→2),
- une explosion du mélange à volume constant (portion 2→3),
- une détente isentropique du mélange (portion 3→4),
- une chute de pression du mélange à volume constant due à l'ouverture d'une soupape d'échappement (portion 4→1).

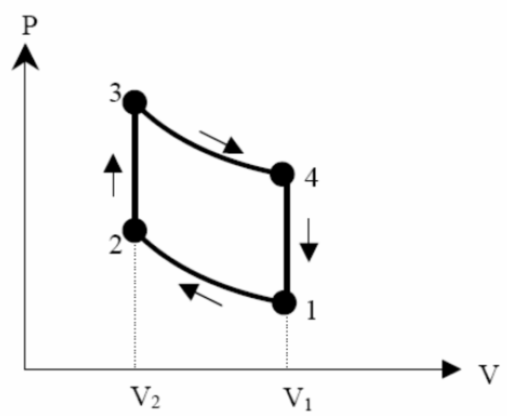


Figure 1

On note:

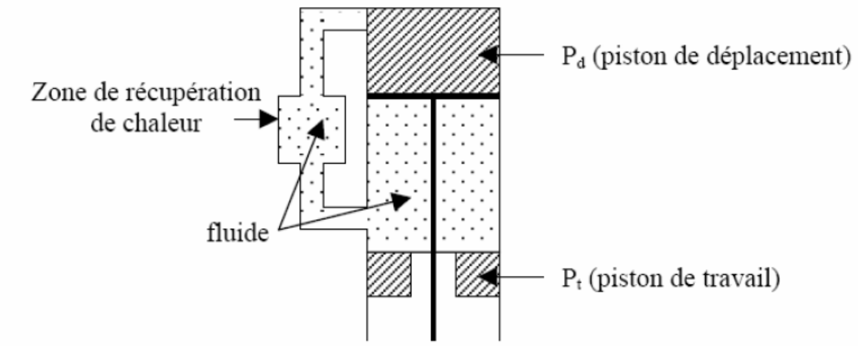
- P_i, V_i et T_i, respectivement la pression, le volume et la température du mélange aux points i variant de 1 à 4 de la figure 1 (en remarquant que $V_3 = V_2$ et $V_4 = V_1$),
- Q_{23}, le transfert thermique algébrique reçu par le mélange lors de l'explosion (2→3),
- Q_{41}, le transfert thermique algébrique reçu par le mélange lors de la chute de pression (4→1), W, le travail algébrique reçu par le mélange lors du cycle complet,
- C_V et C_P, respectivement les capacités calorifiques molaires isochore et isobare du mélange,
- η_m, le rendement du moteur,
- $\gamma = C_P/C_V$.

On considèrera le mélange air-carburant comme un système thermodynamique fermé assimilable à une mole de gaz parfait.

2.1. Déterminer les expressions de ΔU_{23} et ΔU_{41}, variations de l'énergie interne du mélange sur les portions respectives 2→3 et 4→1 du cycle en fonction de C_v et des températures.
2.2. En déduire les expressions de Q_{23} et Q_{41} en fonction de C_v et des températures puis en fonction de γ, P_i et V_i (i variant de 1 à 4). Déterminer et interpréter les signes de Q_{23} et Q_{41}.
2.3. Exprimer η_m en fonction de T_1, T_2, T_3 et T_4.
2.4. Déterminer les expressions des rapports T_2/T_1 et T_3/T_4 en fonction de $K=V_1/V_2$ et γ.
2.5. En déduire l'expression de η_m en fonction de K et γ.
2.6. Application numérique : $\gamma = 1{,}5$ et $K = 9$. Calculer la valeur numérique de η_m.

3. Moteur de Stirling

On considère un fluide enfermé dans une enceinte close comportant deux pistons, un piston de déplacement P_d et un piston de travail P_t. Cette enceinte est constituée d'un cylindre creux ainsi que d'une zone de récupération de chaleur (cf. figure ci-dessous).



Le moteur de Stirling repose sur le cycle comportant les 4 étapes représentées sur les figures 2a à 2d décrites ci-dessous :

- Compression isotherme (figure 2a) : le fluide est comprimé de façon isotherme et réversible par le piston P_t à la température T_1. On note V_1 le volume initial du fluide et V_2 son volume final.
- Chauffage à volume constant (figure 2b) : le piston P_d descend et impose au fluide de traverser la zone de récupération de chaleur qui chauffe le fluide à volume constant. On note Q_2 le transfert thermique algébrique reçu par le fluide lors de cette étape.
- Détente isotherme (figure 2c) : les deux pistons descendent ensemble ce qui permet au fluide de se détendre de façon isotherme et réversible à la température T_2 jusqu'au volume V_1.
  On note respectivement W_3 et Q_3 le travail et le transfert thermique algébrique reçu par le fluide durant cette étape.

- Refroidissement à volume constant (figure 2d) : le piston P_d remonte seul et le fluide traverse de nouveau la zone de récupération en lui cédant un transfert thermique. On note Q_4 le transfert thermique algébrique reçu par le fluide lors de cette étape.

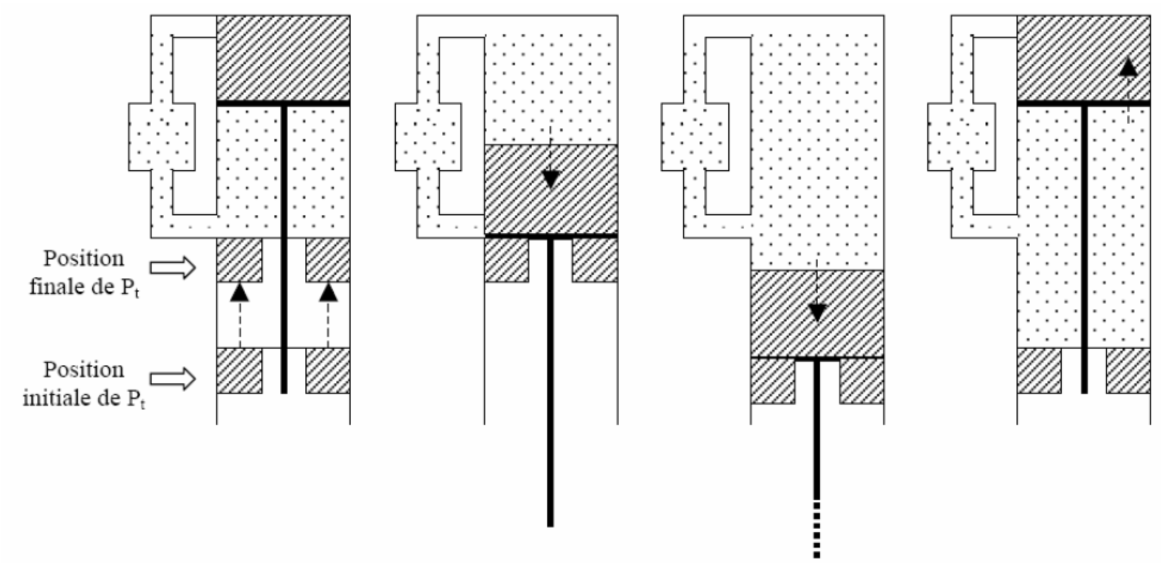


Figure 2a ***Figure 2b*** ***Figure 2c*** ***Figure 2d***

On assimilera le fluide à un gaz parfait. On note R la constante des gaz parfait et n la quantité de matière du fluide.
Exprimera tous les résultats en fonction de n, R, T_1, V_1, T_2 ou V_2.

3.1. Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Watt.

On supposera que le transfert thermique récupéré par la zone de récupération lors de l'étape de refroidissement du fluide est égal à celui fourni au fluide lors de l'étape de chauffage.

3.2. En déduire la relation entre Q_2 et Q_4.
3.3. Déterminer l'expression de W_3. Déterminer et interpréter le signe de W_3.
3.4. Déterminer l'expression de Q_3.
3.5. Déterminer l'expression algébrique de W, travail reçu par le système lors d'un cycle complet.
3.6. En déduire le rendement η_m de ce moteur. Commenter ce résultat.

Le saurez-vous ?

En 1900, Rudolf Diesel présenta son fameux moteur à l'exposition universelle de Paris. Quel était alors le carburant utilisé ?

Quelle est, sous la pression atmosphérique, la température de vaporisation de l'hélium liquide ? Donner une application.