

Transferts thermiques

Table des matières

I Première approche des transports d'énergie thermique	2
I.1 Les différents modes de transport d'énergie thermique (ou de transfert thermique)	2
I.2 Le phénomène de diffusion en particulier	4
I.3 Axiome d'équilibre thermodynamique local	4
II Etude comparative des différents phénomènes de diffusion	5
II.1 Flux et vecteurs densité de flux	5
II.2 Lois phénoménologiques de la diffusion	5
II.3 Equations de conservation	6
II.4 Equations de diffusion	10
II.5 Tableau récapitulatif	12
III Solutions de l'équation de diffusion en régime variable	12
III.1 Longueur caractéristique de diffusion - Analyse dimensionnelle	12
III.2 Régime sinusoïdal forcé	13
IV Solutions de l'équation de diffusion en régime stationnaire	14
IV.1 Analogie électrostatique	14
IV.2 Application à la diffusion thermique dans une barre homogène en régime stationnaire	14
IV.3 Transferts thermiques conducto-convectifs	18
a Loi de Newton de la conducto-convection	18
b Comparaison entre conduction et convection	18
c Principe du banc Kofler	19

Introduction

Les transferts thermiques ont déjà été introduits en première année, sous la forme d'un " δQ ", mais aucune expression de transfert n'avait été présentée et il ne pouvait être obtenu que de manière indirecte à partir du premier principe. L'objet de ce chapitre est justement d'en donner une approche précise et quantitative.

Ce chapitre est principalement dédié à l'étude de la diffusion thermique, encore appelée conduction thermique car nous verrons qu'il existe de nombreuses analogies avec la conduction de l'électricité dans un conducteur.

On veillera à ne pas confondre le terme de diffusion employé ici avec celui de la *diffusion de la lumière*, dont les mécanismes sont très différents.

I Première approche des transports d'énergie thermique

I.1 Les différents modes de transport d'énergie thermique (ou de transfert thermique)

Les échanges de chaleur entre parties chaudes et parties froides d'un même système peuvent se faire selon trois mécanismes que nous illustrerons à chaque fois sur l'exemple du chauffage d'une casserole d'eau :

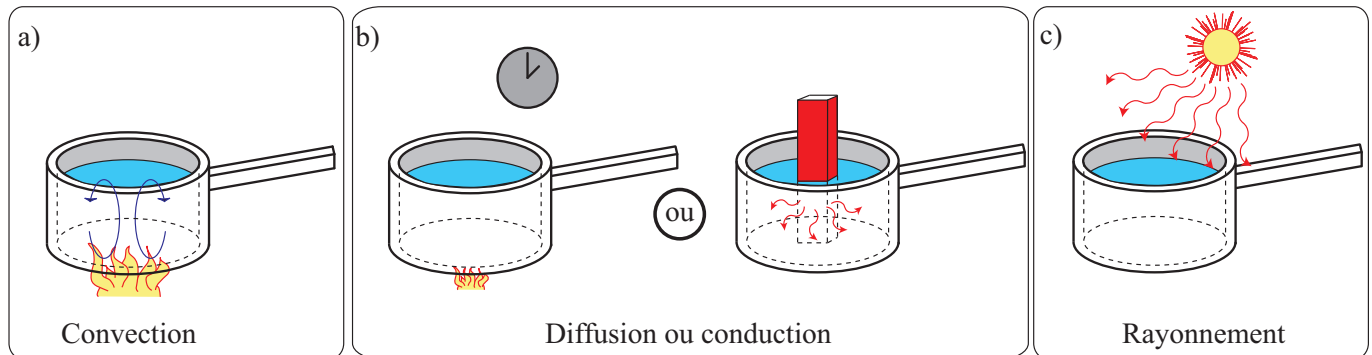


FIGURE 1 – Les trois différents modes de transferts thermiques illustrés sur l'exemple du réchauffement de l'eau dans une casserole : a) convection, b) conduction (ou diffusion), c) rayonnement.

- **par convection** : une élévation de température s'accompagne d'une dilatation du milieu, les parties chaudes deviennent moins denses et ont tendance à s'élever, alors qu'inversement les parties froides plus denses vont descendre. Il s'amorce ainsi un mouvement de brassage qui finit par uniformiser la température. C'est le mécanisme le plus efficace quand il est possible. Mais il ne l'est pas toujours : il n'y a pas de convection dans un solide, pas de convection non plus dans un liquide froid au fond et chaud en surface.

Exemple : lorsqu'on fait chauffer l'eau des pâtes, on constate, avant l'ébullition, l'existence de courants ascendants et descendants dans la casserole sous l'effet de la *convection thermique*. Ceux-ci sont macroscopiques car ils sont visibles à l'œil nu.

- **par conduction (ou par diffusion)** : même avec une densité particulière uniforme, un transfert thermique est possible en présence d'une *inhomogénéité de température*. En effet, dans les régions chaudes, l'énergie cinétique d'agitation thermique des particules est plus élevée que pour les régions froides, donc à travers une surface séparant le chaud et le froid, passe dans un sens un certain nombre de particules très énergétiques et dans l'autre le même nombre de particules moins énergétiques : le bilan particulaire est nul mais pas le bilan thermique ; il y a *diffusion thermique*.

Exemple : lorsqu'on veut faire cuire un œuf, on l'immerge dans l'eau bouillante, et la chaleur pénètre progressivement à l'intérieur par *diffusion thermique*. De même, en plongeant un barreau de métal chauffé dans l'eau, on réalise un transfert thermique par contact au niveau de la surface du barreau.

- **par rayonnement** : Nous avons vu qu'un rayonnement électromagnétique pouvait être absorbé par la matière et permettre ainsi des échanges énergétiques à distance, sans contact entre source et récepteur : c'est le rayonnement thermique émis par tout corps à température non nulle.

Exemple : lorsqu'on place un morceau de métal au soleil, celui-ci devient brûlant. Il a reçu de l'énergie solaire par *rayonnement thermique*. De même, une casserole d'eau peut être chauffée par rayonnement.

La longueur d'onde d'émission dépend de la température du corps. Par exemple :

- ▷ le soleil dont la température de surface est de l'ordre de 6000 K émet dans le visible ;
- ▷ le corps humain ou la surface de la Terre, dont la température est de l'ordre de 300 K, émettent dans l'infrarouge ;
- ▷ le rayonnement thermique du fond diffus cosmologique, à 2.7 K, se fait dans les ondes radios.

Remarque

Il est possible de remonter à la température d'un objet - autour de 300 K - grâce à une caméra infrarouge. Celle-ci mesure le flux d'énergie électromagnétique provenant de la surface visée. Elle fournit une image en fausses couleurs correspondant à la température en chaque point. La valeur affichée sur l'appareil n'est exacte que pour une surface noire et mate. Ceci permet par exemple de vérifier l'isolation thermique des habitations ou de mesurer la température d'un patient à l'aide d'un thermomètre auriculaire.

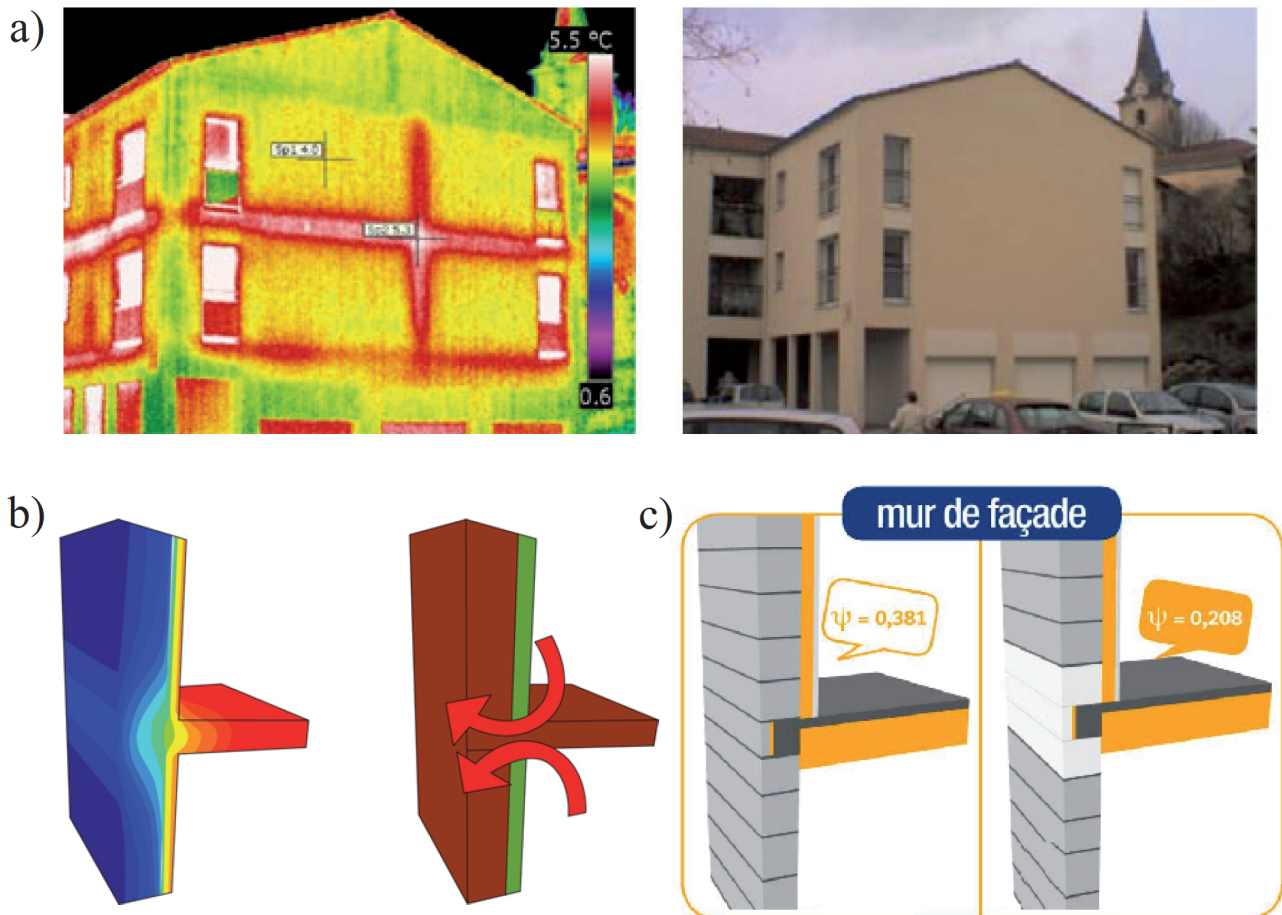


FIGURE 2 – Illustration du problème de pont thermique : a) visualisation à l'aide d'une caméra infrarouge, b) modélisation qui montre la zone plus chaude au niveau du plancher et la fuite thermique vers l'extérieur, c) une solution possible : isoler le mur de façade (ψ en $W.m^{-2}$ ici).



FIGURE 3 – Mesure de la température corporelle basée sur l'émission de rayonnement infrarouge au niveau de l'oreille, à l'aide d'un thermomètre auriculaire.

En pratique, les trois phénomènes de transport thermique sont simultanés, comme le montrent les figures ci-dessous.

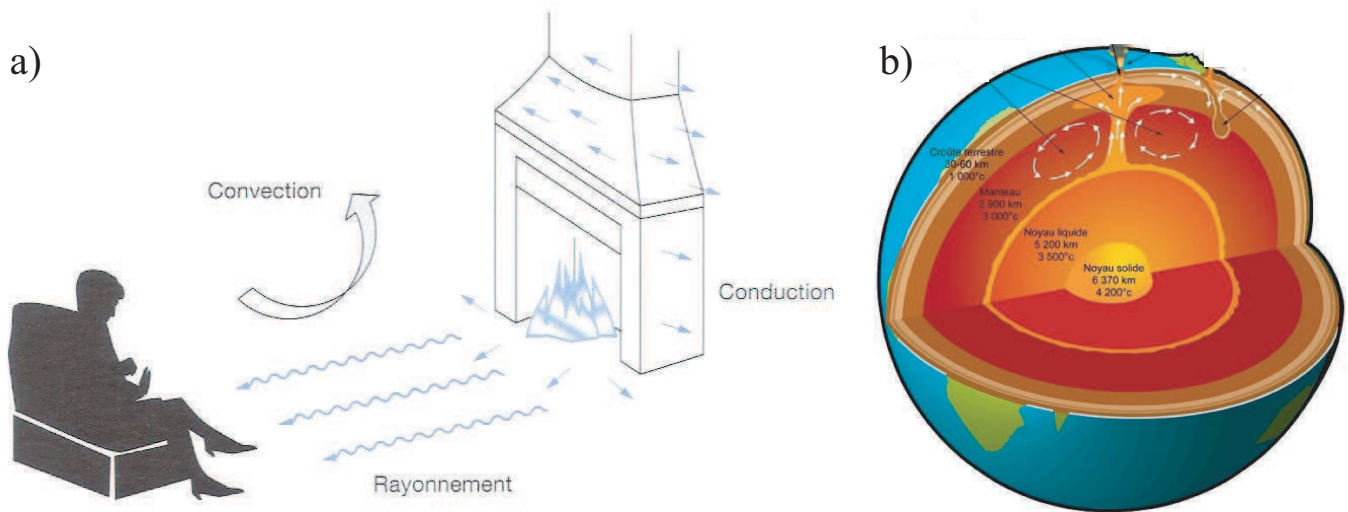


FIGURE 4 – En général, les trois phénomènes de transport thermique sont simultanés. a) À la maison. b) La Terre possède une chaleur importante résiduelle qui provient de sa formation, et dans une bien moindre mesure de la radioactivité de certaines roches de son sous-sol. Elle se refroidit en évacuant la chaleur à sa surface par conduction thermique avec l'atmosphère, convection dans le manteau terrestre et transfert radiatif vers l'atmosphère puis l'espace (c'est cette dernière étape qui met en jeu l'effet de serre).

Dans toute la suite¹, nous nous limiterons à l'étude de la diffusion thermique dans des situations où la convection et le rayonnement thermique seront négligeables : diffusion thermique dans une barre métallique, gel d'un lac, échanges thermiques à travers une vitre...

I.2 Le phénomène de diffusion en particulier

Définition

La diffusion est le phénomène physique qui tend à uniformiser le milieu lorsqu'il existe une inhomogénéité de l'un de ses paramètres physiques (densité de particules, de charges, d'énergie...).

L'origine microscopique de la diffusion correspond à l'existence de chocs entre les particules à l'échelle moléculaire. Ces chocs se faisant de manière aléatoire, ils ont tendance à homogénéiser un milieu en chacun de ses paramètres physiques.

I.3 Axiome d'équilibre thermodynamique local

Propriété

On fait l'hypothèse que le système peut être décrit localement comme s'il était à l'état d'équilibre. On peut donc à chaque instant associer à tout point du système des grandeurs intensives qui sont uniformes à l'échelle mésoscopique mais variables à l'échelle macroscopique.



Transition : Même si le programme de MP se limite à l'étude de la diffusion thermique, nous ferons systématiquement un parallèle avec la diffusion de particules (cf exemple ci-contre de diffusion de particules de permanganate de potassium dans de l'eau) et la conduction électrique.

1. Sauf pour la loi de Newton qui tient à la fois compte de la conduction et de la convection.

II Etude comparative des différents phénomènes de diffusion

II.1 Flux et vecteurs densité de flux

Le sens des phénomènes de diffusion est tout à fait intuitif puisqu'il tend à uniformiser le milieu :

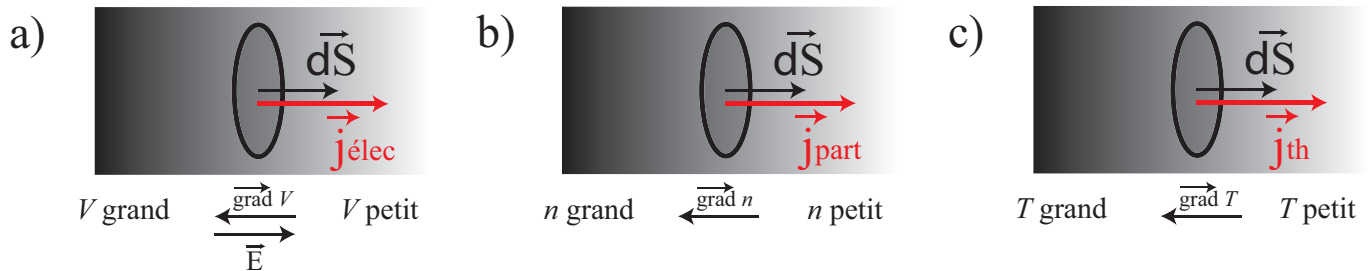


FIGURE 5 – Illustration de la similarité entre trois phénomènes de diffusion en présence d’une inhomogénéité : a) diffusion de charges en présence d’un gradient de potentiel, b) diffusion de particules en présence d’un gradient de densité, c) diffusion thermique en présence d’un gradient de température.

- une **inhomogénéité de potentiel électrique** dans un milieu conducteur provoque un flux ou un débit de charges δI à travers une surface élémentaire orientée \vec{dS} , correspondant à la traversée d’une charge $d(\delta q)$ pendant dt , dans le sens des potentiels décroissants pour une charge positive :

$$\delta I = \quad \quad \quad \text{et} \quad \boxed{d(\delta q) =}$$

- une **inhomogénéité de densité particulaire** provoque un flux ou un débit de particules $\delta\phi_{part}$ à travers une surface élémentaire orientée \vec{dS} , correspondant à la traversée de $d(\delta N)$ particules pendant dt :

$$\delta\phi_{part} = \quad \quad \quad \text{et} \quad \boxed{d(\delta N) =}$$

- une **inhomogénéité de température** provoque un flux thermique ou un flux de chaleur $\delta\phi_{th}$ à travers une surface élémentaire orientée \vec{dS} , correspondant à un transfert thermique $d(\delta Q)$ à travers la surface élémentaire pendant dt :

$$\delta\phi_{th} = \quad \quad \quad \text{et} \quad \boxed{d(\delta Q) =}$$

Transition : Examinons maintenant l’expression des différents vecteurs densité de courant \vec{j} .

II.2 Lois phénoménologiques de la diffusion

Les lois donnant les expressions des vecteurs densité de flux ont été déterminées expérimentalement - d’où le nom de lois "phénoménologiques" - comme étant proportionnels et orientés dans le sens contraire au gradient caractérisant l’inhomogénéité de la grandeur diffusante ² :

- la **loi d’Ohm** :

$$\boxed{\vec{j}^{elec} =}$$

où γ est la *conductivité électrique du milieu*, qui s’exprime en $A.V^{-1}.m^{-1}$ ou en $\Omega^{-1}.m^{-1}$, et est de l’ordre de $\gamma = 10^8 \Omega^{-1}.m^{-1}$ pour un métal comme le cuivre.

2. On notera toutefois que ces lois ne sont plus valables si l’inhomogénéité est trop forte : il apparaît alors des effets non linéaires.

- la **loi de Fick** (hors programme) :

$$\vec{j}_{part} = -D \overrightarrow{\text{grad}n}$$

où D est le *coefficient de diffusion particulaire*, qui s'exprime en $m^2.s^{-1}$, et est de l'ordre de $D = 10^{-5}m^2.s^{-1}$ pour un gaz.

- la **loi de Fourier** :

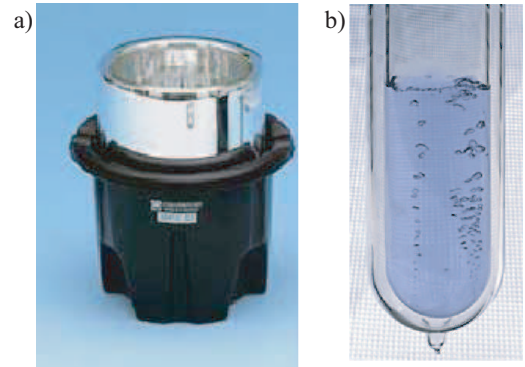
$$\vec{j}_{th} =$$

où λ_{th} est la *conductivité thermique*, toujours positif³ qui s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$ et qui varie fortement entre les matériaux.

Matériau	Métal (Cu, Al)	Verre	Bois	Air	Polystyrène expansé	Vide
λ_{th} (en $W.m^{-1}.K^{-1}$)	400	0.8	0.2	0.03	0.004	0

Les bons conducteurs électriques sont en général également de bons conducteurs thermiques. Les milieux peu denses sont généralement de mauvais conducteurs thermiques. En particulier, $\lambda_{thvide} = 0$ puisque les échanges thermiques ne peuvent pas se faire à l'échelle microscopique.

Ceci est utilisé en particulier dans certains types de récipients à double paroi entre lesquelles un vide plus ou moins poussé a été établi (tasses à café, calorimètres (fig.a), bouteilles Thermos ou vases Dewar (fig.b)).



Transition : Examinons maintenant les lois de conservation des grandeurs introduites, en nous appuyant sur les résultats déjà obtenus en électromagnétisme.

II.3 Equations de conservation

a) Expressions

En utilisant les définitions précédentes, on peut faire des bilans des grandeurs physiques associées à chaque phénomène de diffusion. En l'absence de termes "sources" et de termes "puits" :

- la *conservation de la charge* montre que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

où ρ est la densité volumique de charge (ou le nombre de charges par unité de volume).

- la *conservation du nombre de particules* montre que (hors programme) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{part} = 0$$

où n est la densité volumique de particules (ou le nombre de particules par unité de volume).

3. Ceci vient de l'énoncé de Clausius du second principe : *La chaleur ne passe pas spontanément d'un corps froid à un corps chaud.*

- le *premier principe de la thermodynamique* (conservation de l'énergie) montre que :

$$\boxed{\phantom{U(t) = \iiint_{(V)} u(M, t) d\tau_M = \iiint_{(V)} \mu c T(M, t) d\tau_M}}$$

où $u = \frac{U}{V} = \frac{CT}{V} = \frac{mcT}{V} = \mu c T$ est l'énergie interne volumique, T est la température, μ est la masse volumique du fluide, et c est la capacité thermique massique du milieu.

b) Démonstrations

- On se reportera aux chapitres d'électromagnétisme pour la démonstration de l'équation de conservation de la charge.
- L'équation de la conservation du nombre de particules est tout à fait similaire, mais sort du cadre du programme de MP.
- Équation locale de conservation de l'énergie interne dans le cas général :

Considérons un volume élémentaire (V) *fixe* limité par une surface fermée (Σ).

Cherchons maintenant à exprimer la conservation de l'énergie interne traversant la surface (Σ) fixe.

Écrivons tout d'abord l'énergie interne contenue dans le volume V sous forme intégrale, en utilisant la *1^{ère} loi de Joule* pour un **milieu homogène** (μ et c sont indépendants des coordonnées de l'espace) :

$$U(t) = \iiint_{(V)} u(M, t) d\tau_M = \iiint_{(V)} \mu c T(M, t) d\tau_M$$

où u est l'énergie interne volumique, μ est la masse volumique et c est la capacité thermique massique du milieu.

L'application du *premier principe de la thermodynamique* au volume (V) constant entre t et $t + dt$ correspond à la conservation de l'énergie interne :

$$dU = \delta Q \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = -\Phi_{th}}$$

où δQ est le transfert thermique reçu par le volume (V) entre les instants t et $t + dt$ (le travail δW est nul puisque le volume reste fixe), et Φ_{th} est le flux thermique sortant par (Σ). On notera l'analogie parfaite avec le cas de la conservation de la charge électrique⁴

D'après les résultats obtenus précédemment, sachant que (V) est fixe :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu c T(M, t)}{\partial t} d\tau_M = - \underbrace{\oint_{(\Sigma)} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}_{ext}}_{\phi_{th \text{ sortant}}} = - \iiint_{(V)} Div \vec{j}_{th} d\tau$$

où la normale $d\vec{S}_{ext}$ est orientée vers l'extérieur, par convention pour une surface fermée.

Comme l'équation intégrale précédente est vraie pour tout volume (V) fixe, elle est vraie en particulier pour le volume $d\tau$, obtient l'**équation locale de conservation de l'énergie interne** :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + Div \vec{j}_{th} = 0}$$

4. On rappelle que la conservation de la charge électrique découle de l'équation

$$\frac{dQ}{dt} = -I_{sortant}$$

- Équation locale de conservation de l'énergie interne à une seule dimension :

- Équation locale de conservation de l'énergie interne en géométrie cylindrique :

- Équation locale de conservation de l'énergie interne en géométrie sphérique :

II.4 Equations de diffusion

a) Expressions et démonstrations

Les expressions des vecteurs densité de flux permettent d'obtenir des équations aux dérivées partielles **linéaires** en fonction d'une seule variable diffusante :

- En injectant la loi de Fick dans l'équation de conservation du nombre de particules, on obtient l'*équation de la diffusion de particules* (hors programme) :

$$\vec{j}_{part} = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \quad \text{et} \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{Div} \vec{j}_{part} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n}$$

où D est le coefficient de diffusion, qui s'exprime en $m^2.s^{-1}$.

- En injectant la loi de Fourier dans l'équation de conservation de la chaleur, on obtient l'équation de la chaleur ou de la diffusion thermique :

Par analogie avec l'équation de la diffusion de particules, on définit un coefficient de diffusion thermique D_{th} , également de dimension $L^2.T^{-1}$ par :



- on rappelle que l'équation de diffusion dans le cas de la conduction électrique correspond à l'équation de l'effet de peau et s'obtient à partir de la loi d'Ohm locale et des équations Maxwell :

Par analogie avec l'équation de la diffusion de particules, on définit un coefficient de diffusion électrique D_{elec} par :



b) Irréversibilité des phénomènes de diffusion

Examinons l'influence d'un renversement du temps, c'est à dire d'un changement de t en $-t$, sur l'évolution des variables diffusantes. On prendra l'exemple de la diffusion thermique.

Supposons que la solution de l'équation de la chaleur soit donnée par la fonction $T(x, y, z, t)$. La fonction $T(x, y, z, -t)$ est-elle toujours solution ?

$$\frac{\partial T(x, y, z, -t)}{\partial x} = 1 \times \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T(x, y, z, -t)}{\partial t} = (-1) \times \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t}$$

donc $T(x, y, z, -t)$ n'est donc plus solution de l'équation de la chaleur, mais d'une autre équation :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{th}}{\mu c} \Delta T$$

Il n'y a donc pas invariance par renversement du temps et le phénomène est irréversible.

Propriété

Les phénomènes de diffusion sont irréversibles.

Remarque

On notera que ceci est le cas dès qu'un phénomène est régi par une équation avec une dérivée d'ordre impair par rapport au temps. Ce ne sera par exemple pas le cas pour l'équation de D'Alembert qui comporte une dérivée seconde par rapport au temps, et qui régit des phénomènes ondulatoires réversibles :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \Delta X$$

II.5 Tableau récapitulatif

	Diffusion thermique (Conduction thermique)	Conduction électrique	Diffusion de particule (HP)
Grandeur extensive (quantité conservée)	Énergie	Charge électrique	Nombre de particules
Transfert	$d(\delta Q) = \pm \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} dt$	$d(\delta q) = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$	$d(\delta N) = \vec{j}_N \cdot \vec{dS} dt$
Flux	$\Phi = \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}$	$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$	$\frac{dN}{dt} = \iint \vec{j}_{part} \cdot \vec{dS}$
Loi phénoménologique	(loi de Fourier) $\vec{j}_{th} = -\lambda_{th} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$	$\vec{j} = \gamma \overrightarrow{E}$ (loi d'Ohm) $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$	(loi de Fick) $\vec{j}_{part} = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n)$
Coeff de proportionnalité	λ_{th} : conductivité thermique	γ : conductivité électrique	D : coefficient de diffusion de particules
Cause flux : inhomogénéité	température T	potentiel V	densité particulaire n^* ($= \frac{dN}{d\tau}$)
Équation de conservation	$\text{div}(\vec{j}_{th}) + \mu c_V \frac{\partial T}{\partial t} = 0$	$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\text{div}(\vec{j}_N) + \frac{\partial n^*}{\partial t} = 0$
Équation de diffusion	$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \Delta T$	$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \Delta \overrightarrow{E}$	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$

III Solutions de l'équation de diffusion en régime variable

Il n'existe de solutions analytiques de cette équation que dans des cas particuliers que nous ne chercherons pas à étudier. On peut néanmoins retenir quelques résultats importants en régime variable.

III.1 Longueur caractéristique de diffusion - Analyse dimensionnelle

On se restreint à un cas unidimensionnel pour lequel la température ne dépend que de x et de t et où il n'y a pas de source :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$$

Le coefficient de diffusion D_{th} donne des renseignements sur les ordres de grandeur de la durée τ_{diff} et de la longueur L qui caractérisent le phénomène de diffusion. Par analyse dimensionnelle, on voit que :

Propriété

En régime variable, un phénomène de diffusion caractérisé par un coefficient de diffusion D_{th} se propage au cours d'un temps τ_{diff} sur une distance caractéristique L reliés par :

$$L \sim \sqrt{D_{th} \tau_{diff}} \quad \text{et} \quad \tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{th}}$$

Considérons par exemple un régime transitoire de diffusion thermique dans une tige d'acier homogène, de conductivité thermique λ et de longueur L .

La tige étant à la température T_0 , on impose, à partir de l'instant initial $t = 0$, les températures suivantes aux deux extrémités : $T_1 = T_0 + \frac{\Delta T}{2}$ et $T_2 = T_0 - \frac{\Delta T}{2}$.

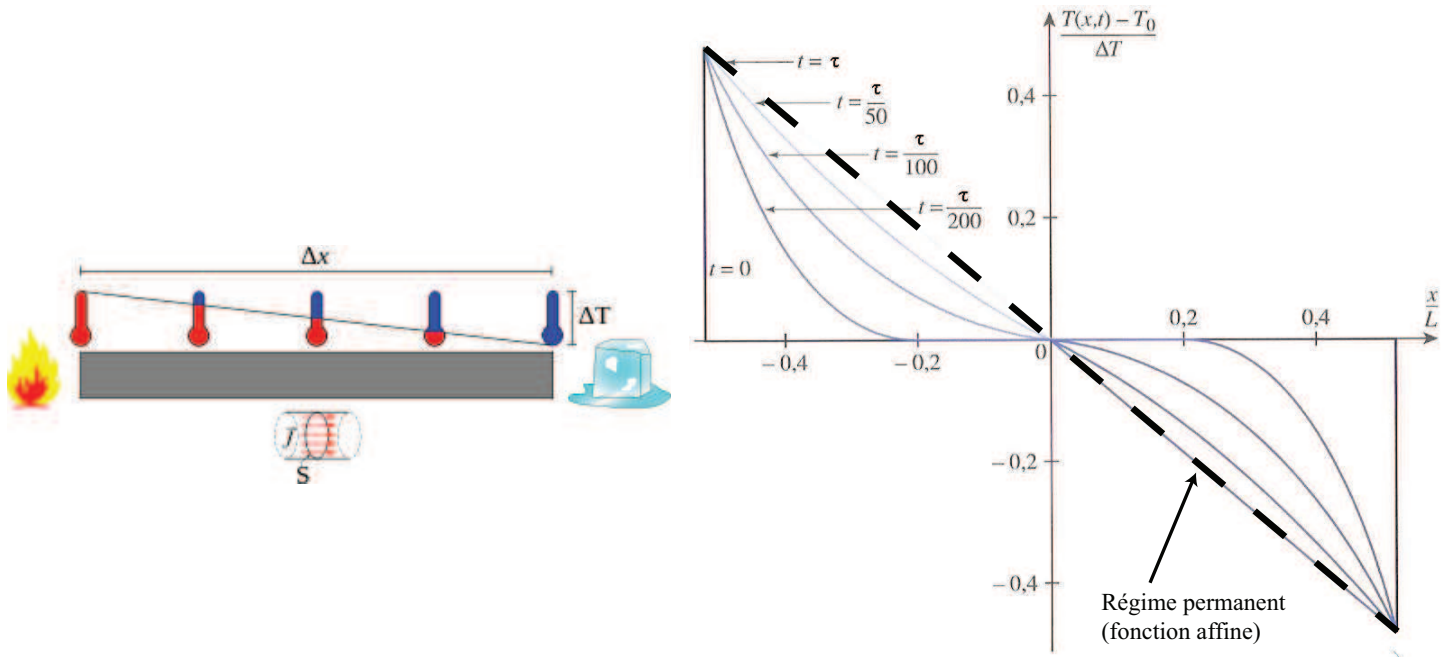


FIGURE 6 – Évolution temporelle de la température le long de la tige. Le profil (obtenu à l'aide d'une modélisation numérique) tend vers une fonction affine en régime permanent, régime pratiquement atteint au bout de $t = \tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{th}}$.

Nous remarquons qu'au-delà de τ_{diff} , la répartition de température n'évolue quasiment plus et se confond avec une fonction affine de x . Ainsi, si nous prenons une barre de longueur $2L$ faite du même matériau, il faudra un temps $4\tau_{diff}$ pour atteindre le régime permanent (étudié ensuite).

III.2 Régime sinusoïdal forcé

Dans le domaine des transferts thermiques comme en électrocinétique ou pour l'étude des ondes, l'étude du régime sinusoïdal forcé est d'un grand intérêt. Ces problèmes correspondent à des **équations linéaires** et l'analyse de Fourier montre que, dans ce cas, un régime variable peut être considéré comme la superposition de régimes sinusoïdaux du temps.

Ceci permet par exemple de traiter simplement les oscillations de température dans une cave à vin située à quelques mètres sous la terre, en réponse aux oscillations diurnes et saisonnières de la température extérieure. On peut alors définir une longueur analogue à l'effet de peau dans un conducteur :

IV Solutions de l'équation de diffusion en régime stationnaire

IV.1 Analogie électrostatique

Dans la suite, on aura toujours quelle que soit la variable X :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = 0$$

On s'intéressera maintenant uniquement à la diffusion thermique.

- L'équation de conservation de l'énergie thermique permet de montrer qu'en régime stationnaire :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j}_{th} = 0}$$

On en déduit par analogie avec ce qui avait été vu en électrostatique ($\operatorname{div} \vec{j} = 0$) que les vecteurs densité de courant sont à **flux conservatif**, c'est à dire que les flux thermiques sont nuls à travers toute surface fermée (**loi des nœuds**) et sont constants dans tout tube de courant (**loi des branches**), en l'absence de sources et de puits thermiques.

- L'équation de la diffusion thermique en régime stationnaire se résume à une *équations de Laplace*, que nous avons également déjà rencontrée en électrostatique ($\Delta V = 0$) :

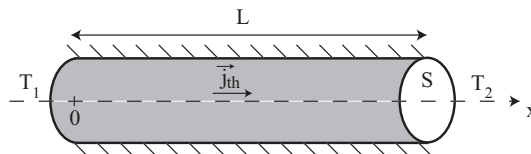
$$\boxed{\Delta T = 0}$$

IV.2 Application à la diffusion thermique dans une barre homogène en régime stationnaire

a) Cadre de l'étude

Considérons une barre cylindrique de section S et de longueur L , calorifugée latéralement. On suppose le problème unidimensionnel de sorte que toutes les grandeurs ne dépendent que de x . On suppose également que depuis un temps très long, la température des deux extrémités est maintenue aux valeurs suivantes :

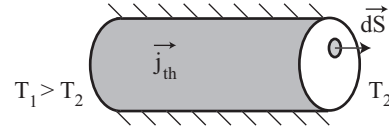
$$T(x = 0) = T_1 \quad > \quad T(x = L) = T_2$$



b) Résistance thermique

En régime stationnaire, la seconde conséquence est la conservation du flux thermique traversant toute section de la barre (loi des branches), qui s'écrit, pour un flux allant des $x < 0$ vers les $x > 0$:

On vérifie bien que le flux thermique est positif des températures les plus élevées vers les températures les plus faibles.



L'équation précédente est analogue à celle obtenue dans le cadre de la conduction électrique dans une résistance de longueur L et de section S , qui permet d'écrire⁵ :

On a donc une analogie parfaite entre conduction électrique et conduction thermique pour les grandeur suivante :

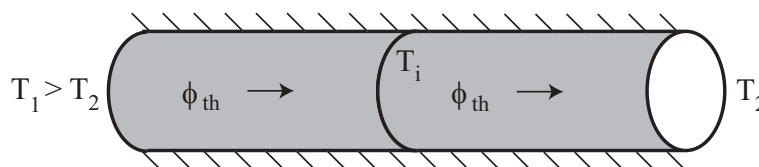
$$\begin{aligned} V &\longleftrightarrow \\ I &\longleftrightarrow \\ \gamma &\longleftrightarrow \end{aligned}$$

On peut donc définir par analogie une **résistance thermique** R_{th} de la façon suivante :

Plus la résistance thermique est grande, moins le flux traversant le milieu de conductivité thermique λ_{th} est important pour une différence de température donnée entre les deux extrémités car $\phi_{th} R_{th} = cste$.

c) Association de résistances thermiques

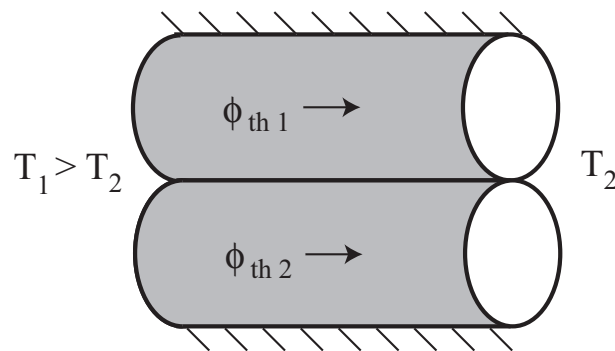
• **Association en série** : le flux est identique dans les deux barres, mais les températures sont différentes aux extrémités. Dans ce cas :



5. On rappelle que l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ permet de montrer, comme dans le calcul précédent que le potentiel dans la résistance est donné par $V(x) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{x}{L}$, et donc :

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\gamma \frac{dV}{dx} S = \frac{\gamma S (V_1 - V_2)}{L} = \frac{(V_1 - V_2)}{R}$$

• **Association en parallèle** : le flux est différent dans les deux barres, mais les températures sont identiques aux extrémités. Dans ce cas :



Bilan : L'association de résistances thermiques est en tout point analogue à celle des résistances en électricité.

d) Application au double vitrage

Les résultats précédents permettent de comprendre facilement l'intérêt du double vitrage par rapport au simple vitrage du point de vue de l'isolation thermique.

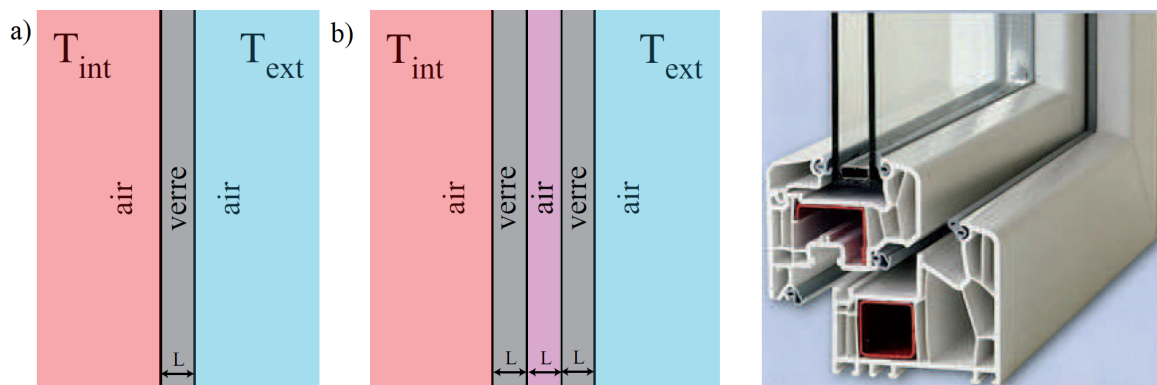


FIGURE 7 – a) Simple vitrage. b) Double vitrage : schématisation simplifiée et vue en coupe d'une fenêtre à double vitrage.

• **Simple vitrage** : la résistance thermique est donnée par, pour une surface S de verre :

$$R_{th} =$$

On peut en déduire que le flux thermique au travers de la vitre vaut :

$$\phi_{th-simple} =$$

• **Double vitrage** : la résistance thermique pour une surface S de verre, est donnée pour un modèle grossier dans lequel l'épaisseur L des deux vitres est identique à celle de la couche d'air entre elles (association en série) :

$$R_{th} =$$

On peut en déduire que le flux thermique au travers de la vitre vaut :

$$\phi_{th-double} =$$

Comme $\lambda_{thair} \simeq 0.03W.K^{-1}.m^{-1}$ et $\lambda_{thverre} \simeq 0.8W.K^{-1}.m^{-1}$, on peut donc en déduire que le double vitrage classique isole plus de 20 fois mieux que le simple vitrage. La résistance thermique est beaucoup plus importante et limite le flux thermique à travers la vitre⁶.

Remarque

Le **triple vitrage** apparaît ici comme relativement inutile d'un point de vue thermique car il ne permet que de diviser par 2 le flux thermique (utiliser du double vitrage d'épaisseur double revient exactement au même). En revanche, il n'en est pas de même de l'isolation phonique, car la puissance sonore transmise est multipliée par un facteur T^2 supplémentaire, où T est la puissance transmise par une interface air-verre. On gagne ainsi un coefficient entre 2 et 10 sur l'intensité sonore transmise.

Transition : La diffusion thermique seule ne permet pas de comprendre pourquoi les montants de la fenêtre dans la figure ci contre sont compartimentés ; il faut pour cela faire appel au phénomène de convection qui intervient en même temps que la conduction thermique.

Ceci permet également de faire la différence entre les deux configurations suivantes :

6. On notera qu'on utilise maintenant de l'argon - gaz neutre présent dans l'air - pour remplacer la couche d'air dans le double vitrage car sa conductivité thermique est encore plus faible que celle de l'air : $\lambda_{th} = 0.018W.m^{-1}.K^{-1}$.

IV.3 Transferts thermiques conducto-convectifs

Il est courant de rencontrer des cas pour lesquels des termes "sources" ou "puits" devront être pris en compte lors d'un bilan d'énergie ou de particules dans un volume donné.

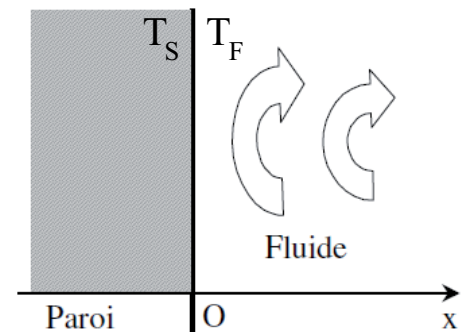
Citons ici l'exemple de **pertes thermiques par conducto-convection**, qui permet de comprendre le principe d'un radiateur, d'une ailette de refroidissement d'un moteur ou d'un composant électronique ou d'un **banc Kofler**, c'est à dire l'appareil qui permet de déterminer la température de fusion d'un solide.

a Loi de Newton de la conducto-convection

Les transferts thermiques entre un corps et un milieu extérieur liquide ou gazeux se font simultanément sous forme de conduction et de convection à l'interface entre les deux milieux. Cet échange thermique peut être modélisé à une dimension, en régime stationnaire, par la loi de Newton.

Le fluide est animé de mouvements de convection qui provoquent une homogénéisation de la température. On considère que ce brassage est suffisamment efficace pour que la température du fluide soit constante spatialement et égale à T_F .

Remarque : On admettra que la puissance rayonnée est en général négligeable dans un tel cas.



Loi de Newton

La densité surfacique de flux thermique j_{cc} sortant algébriquement à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre celle de la surface du matériau solide T_S et celle du fluide extérieur T_F :

$$j_{cc} = h(T_S - T_F) \quad \text{et} \quad \phi_{cc} = hS(T_S - T_F)$$

où h est le coefficient de transfert thermique de surface qui dépend principalement du fluide en contact avec le solide.

Ordres de grandeur⁷ :

- entre un gaz et un solide, $h \simeq 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$;
- entre un liquide et un solide, $h > 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

b Comparaison entre conduction et convection

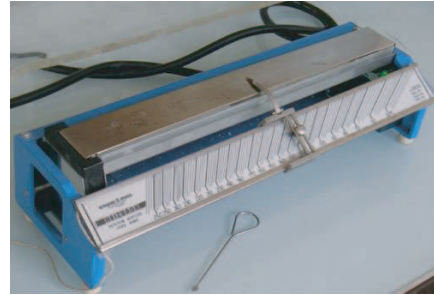
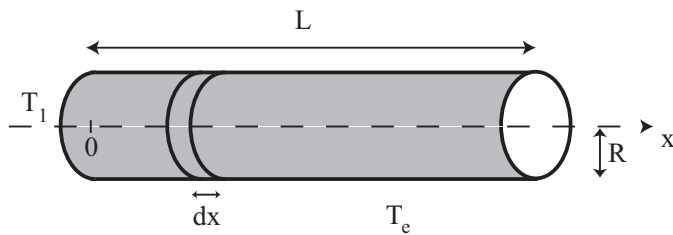
Revenons maintenant sur la photo en coupe du montant de la fenêtre en PVC : peut-on prévoir quelle est la taille caractéristique maximale L_c de chaque cellule afin d'éviter la convection thermique (beaucoup plus efficace que la conduction thermique) ? Dans ce cas, il faut que :

7. On notera que les deux valeurs données ici peuvent être très fortement augmentée en forçant un brassage du gaz avec un ventilateur par exemple, ou avec un écoulement d'eau. Dans ce dernier cas, on peut pratiquement assurer que le fluide vient "thermaliser" le solide, de sorte que $T_S \simeq T_F$, ce qui correspond donc à $h \rightarrow \infty$.

c Principe du banc KoflerExemple

On étudie une barre cylindrique d'axe (Ox) , de rayon R , de longueur L , constitué d'un matériau de conductivité thermique λ_{th} et de capacité thermique c . L'extrémité située en $x = 0$ est maintenue à la température T_1 , et l'extérieur est à la température constante T_e . L'échange thermique entre la barre et l'extérieur sera modélisé par la loi de Newton avec un coefficient h .

Déterminer la température $T(x)$ dans la barre en régime stationnaire.



Conclusion

On notera que les résultats obtenus dans les chapitres sur les ondes sont tout à fait généralisables ici car les équations de diffusion sont linéaires.