

TD n°18 - Transferts thermiques

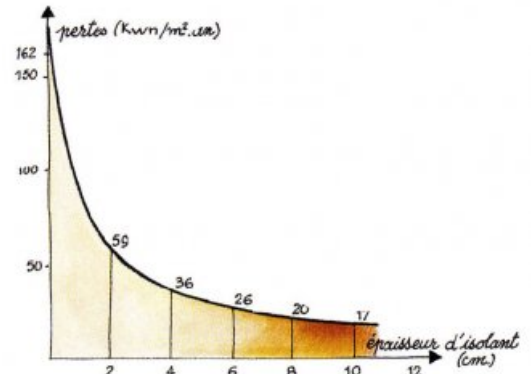
1 Résolution de problème - Isolation thermique

Un site spécialisé dans l'isolation des bâtiments fait figurer le graphique ci-contre dans sa brochure. Celui-ci illustre les pertes thermiques annuelles (en $KWh.m^{-2}.an^{-1}$) d'1 m^2 de mur en fonction de l'épaisseur de l'isolation.

Pouvez-vous retrouver l'allure et les ordres de grandeurs avancés dans la courbe ?

Données :

- $\lambda_{th,brique} = 0.8 W.m^{-1}.K^{-1}$
- $\lambda_{th,lainedeverre} = 0.04 W.m^{-1}.K^{-1}$.



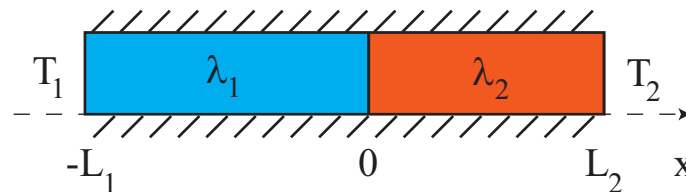
Pertes annuelles moyennes de 1 m2 de mur en fonction de l'épaisseur de l'isolation.*

2 Sensation de chaud ou de froid

L'exercice présenté ici propose une modélisation très simplifiée permettant de comprendre la sensation de chaud ou de froid d'objets pourtant à la même température.



Deux cylindres, isolés thermiquement sur leurs surfaces latérales, de même section S , de même axe (Ox) , de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 , de longueurs L_1 et L_2 , sont en contact en $x = 0$. On maintient leurs extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures respectives T_1 et T_2 . On se place en régime stationnaire.



- Déterminer la température T_i à l'interface en $x = 0$.
- On donne : $T_2 = 37^\circ C$ (main), $T_1 = 20^\circ C$ (bois ou acier), $L_1 = L_2$, $\lambda_2 = 10 W.m^{-1}.K^{-1}$ (main), $\lambda_1 = 1 W.m^{-1}.K^{-1}$ (bois) et $\lambda_2' = 100 W.m^{-1}.K^{-1}$ (acier).

Faire l'application numérique de T_i pour un contact main-bois, et pour un contact *main - acier*.

Réponses : 1. $T_i = \frac{\lambda_1 L_2 T_1 + \lambda_2 L_1 T_2}{\lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_1}$, 2. $T_{main/bois} = 36^\circ C$ et $T_{main/acier} = 22^\circ C$.

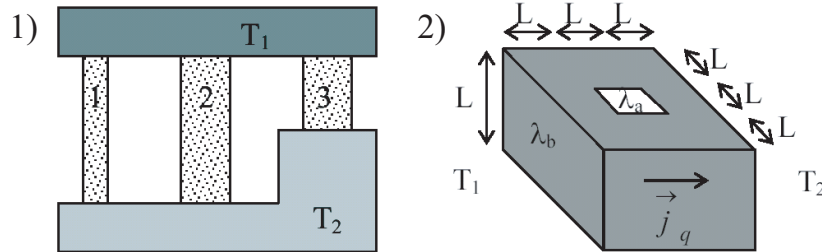
3 Cuisson d'une dinde

Une dinde de $5kg$ met $3h$ à cuire alors qu'une dinde de $10kg$ en met seulement 5. Expliquer.

4 QCM - Diffusion thermique

1. Deux thermostats de températures T_1 et T_2 sont reliés par 3 barres de cuivre de longueurs $L_1 = L_2 = 2L_3 = 2L$ et de sections $S_3 = S_2 = 4S_1$. Que peut-on dire des flux thermiques ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 traversant chacune des barres en régime stationnaire, sachant que $T_1 > T_2$?

- a) $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$ b) $\phi_3 < \phi_2 < \phi_1$ c) $\phi_2 < \phi_3 < \phi_1$ b) autre réponse



2. Une brique de construction est modélisée par le schéma ci-dessus. Elle est réalisée en matériau de conductivité thermique λ_b et l'air qu'elle contient a la conductivité thermique λ_a . En régime stationnaire, estimer la puissance thermique la traversant en fonction des résistances thermiques $R_1 = \frac{3}{L\lambda_b}$ et $R_2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{2}{\lambda_b} \right)$.

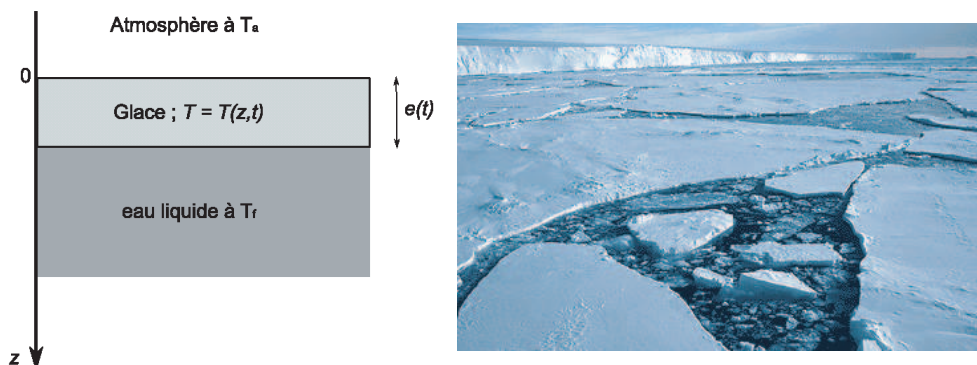
- a) $(T_1 - T_2) \frac{R_1 + 2R_2}{R_1 R_2}$ b) $\frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2}$ c) $\frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2}$

3. Estimer la durée caractéristique de chauffe d'un moteur de taille $L \sim 30cm$ (en métal $D \sim 2.10^{-4}m^2.s^{-1}$).

- a) 2 minutes b) 4 minutes c) 6 minutes d) 8 minutes

5 Gel d'un lac

Lorsque l'air au dessus d'un lac de surface S est à une température T_a inférieure à la température de fusion (c'est à dire aussi de solidification) de la glace T_f , l'eau de surface du lac commence à geler. L'épaisseur de glace formée est notée $e(t)$. On constate qu'elle croît lentement, proportionnellement à \sqrt{t} pour des temps importants. On note T_f la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $T(z, t)$ la température de la glace pour $0 < z < e(t)$. On suppose que le profil de température $T(z, t)$ est le même que si le régime était stationnaire (il ne l'est pas, puisque la glace croît ; approximation des régimes quasi-stationnaires).



On donne la température de fusion $T_f = 273K$ et la chaleur latente $l_f = 330kJ.kg^{-1}$ de fusion de la glace, ainsi que sa masse volumique μ , sa capacité calorifique massique $c = 2,06 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ et sa conductivité thermique λ . On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide et de la glace.

On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac, c'est à dire $T(z = 0, t) = T_a$.

1. Exprimer le flux thermique ϕ traversant la couche de glace dans le sens des z décroissants en fonction de $\lambda, e(t), S, T_a$ et T_f .

2. En faisant un bilan d'enthalpie pour la petite couche de glace de volume dV qui se forme entre t et $t + dt$, montrer que $e(t)$ est solution de :

$$e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_f - T_a)}{\mu l_f}$$

En déduire $e(t)$ pour $e(t = 0) = e_0$ (on part d'un lac déjà partiellement gelé) et commenter le résultat obtenu.

3. En déduire une durée caractéristique τ_c des variations de $e(t)$. Discuter la validité de l'approximation d'un régime quasi-stationnaire.

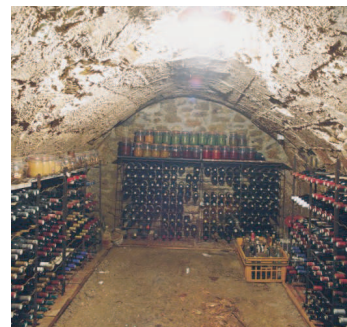
Réponses : 3. $\tau_c \simeq \frac{\mu l_f e^2}{2(T_f - T_a)\lambda}$ et $\tau_{diff} \simeq \frac{e^2 \mu c}{\lambda}$.

6 Cave à vin

Une cave à vin a été creusée profondément dans un sous-sol crayeux. On se propose ici d'étudier l'évolution annuelle de la température $T(z, t)$ dans le sol à une profondeur z et à une date t . On modélise la température de surface par :

$$T(0, t) = T_m + a \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

Données : $\lambda_{sol} = 1.1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $c_{V,sol} = 900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\mu_{sol} = 2300 \text{ kg.m}^{-3}$.



- Donner la valeur de la période τ et un ordre de grandeur de T_m et a , tout d'abord dans le cas des variations diurnes, puis saisonnières.
- Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion vérifiée par $T(z, t)$ et chercher une solution de la forme :

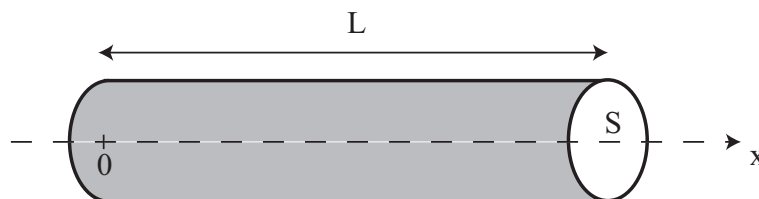
$$T(z, t) = T_m + a \text{Re} \left[e^{i(\omega t - kz)} \right]$$

- Mettre le résultat sous forme réelle, représenter la température en fonction de la profondeur z et commenter dans les deux cas précédents. A votre avis, la température des grottes en Afrique équatoriale est-elle la même que celle des grottes en France ?

Réponses : 3. $T(z, t) = T_m + a e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$ où $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$; $\delta_{diurne} = 12 \text{ cm}$ et $\delta_{annuel} = 2.3 \text{ m}$.

7 Bilan d'entropie dans une barre calorifugée parcourue par un courant

Une barre conductrice calorifugée de longueur L , de section S , de résistivité électrique ρ et de conductivité thermique λ_{th} , est parcourue par un courant d'intensité I (uniformément réparti). On se place en régime permanent.



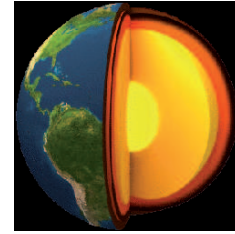
- Déterminer $T(x)$, sachant qu'on impose aux extrémités les températures T_1 et T_2 .
- Calculer l'entropie s_c créée par unité de temps et de volume dans la barre, à l'abscisse x . Conclure.

Réponse : 1. $T(x) = -\frac{\rho I^2 L^2}{2\lambda_{th} S^2} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L} \right] + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1$, 2. $s_c = \frac{\rho I^2}{T S^2} + \frac{\lambda_{th}}{T^2} \left(\frac{dT}{dx}\right)^2$.

8 Température à l'intérieur de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6400\text{km}$ de conductivité thermique homogène λ .

On suppose que la Terre est le siège de désintégrations radioactives dont la puissance volumique \mathcal{P}_V est uniforme. On fera l'hypothèse que le régime quasi-permanent est atteint.



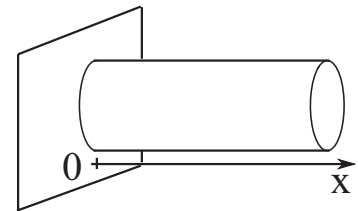
- Effectuer un bilan énergétique entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, et en déduire l'expression du vecteur densité de flux thermique, radial, noté $j(r)\vec{e}_r$ et de la température $T(r)$ en fonction de r , λ , R et \mathcal{P}_V (la température de surface T_s est supposée connue). On tiendra compte du fait que la température reste partout finie.
- Calculer dans ce modèle la température au centre de la Terre en fonction de T_s et $G_{th} = \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R}$.
- Dans les puits de mine, on constate que le gradient de température est en valeur absolue de l'ordre de 30 degrés par kilomètre. En déduire la température au centre de la Terre. Critiquer le modèle.

Réponses : 3. $T(r) = \frac{\mathcal{P}_V}{6\lambda}(R^2 - r^2) + T_s$.

9 Ailette de refroidissement

On se propose d'étudier un dispositif d'évacuation d'énergie sous forme de transfert thermique ("refroidissement" par rapport au cas où il n'existerait pas), mêlant des aspects conductif et conducto-convectif, en régime stationnaire.

On considère ainsi un élément (plaque sur la figure ci-contre) que l'on souhaite maintenir à une température constante T_0 (partie d'un moteur, d'un composant informatique...).



Pour cela, on place une barre cylindrique de rayon R , d'axe Ox , dont une extrémité est placée contre cet élément (on suppose le contact thermique parfait). On considère que le transfert thermique sur la surface latérale de cette barre avec l'atmosphère (de température constante $T_{ext} < T_0$) est de type conducto-convectif (il vérifie la loi de Newton, avec un coefficient $h = 8,4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$).



On suppose que la température dans la barre ne dépend que de x .

- En faisant un bilan énergétique pour une tranche de barre comprise entre les abscisses x et $x + dx$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température dans la barre, en faisant apparaître une distance caractéristique d dont on donnera l'ordre de grandeur.
- En considérant le cas où on peut raisonner avec une barre de longueur infinie ($L \gg d$), résoudre l'équation ainsi obtenue et tracer le graphe de la solution correspondante. Commenter.
- On cherche à mieux comprendre l'intérêt de l'ailette de refroidissement.
 - Toujours dans le cas où $L \gg d$, déterminer le flux thermique évacué par l'ailette de refroidissement vers l'atmosphère.
 - Quel aurait été le flux thermique évacué en l'absence d'ailette ?
 - En déduire le rapport entre les flux en présence et en l'absence d'ailette.

Données : $\lambda = 390 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (barre en cuivre), $R = 1 \text{ cm}$.

Réponse : 1. $d = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}} = 48 \text{ cm}$, 3.a) $\Phi_c = \frac{\lambda}{d}\pi R^2(T_0 - T_{ext})$, 3.b) $\Phi'_c = h(T_0 - T_{ext})\pi R^2$ et 3.c) $\frac{\Phi_c}{\Phi'_c} = \frac{\lambda}{hd} = 97$.