TD n°19 - Thermodynamique statistique

1 Hydrostatique - Pression au fond d'un verre d'eau

Quelle est la pression au fond d'un verre d'eau de hauteur $h = 10cm$. Cette pression dépend-t-elle de la forme du verre ?

2 Barrage

Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur un barrage droit, vertical, de hauteur h et de largeur L. Commenter.

Réponse : $\overrightarrow{R}_{pression \rightarrow barrage} = \frac{1}{2}\rho_0 g h^2 L \vec{u}_x$.

3 Le néon

Du néon (Ne, $M = 20\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) occupe un volume V sous une pression P à température uniforme $T = 273\,\mathrm{K}$.

1. Quelle est la pression si la densité moléculaire est de $1.34 \times 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}$?
2. Quelle est la vitesse quadratique moyenne u des atomes de néon ?
3. Quelle est l'énergie interne molaire ?

4 Largeur Doppler d'une lampe à vapeur de sodium

Dans une lampe à vapeur de sodium en régime permanent de fonctionnement, la température est de l'ordre de 1200 K et la longueur d'onde émise par sa raie la plus intense est $\lambda = 589nm$.

1. Quelle est la vitesse quadratique moyenne v^* des atomes de sodium ?
   On donne $M(\mathrm{Na}) = 23$ g.mol^{-1} .
2. Montrer qu'un émetteur en mouvement à une vitesse V très faible devant celle de la lumière c conduit à un décalage en fréquence $\Delta\nu$ de l'onde émise par rapport à un récepteur fixe donné par :
   $$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{V}{c}$$
   En déduire l'étalement Doppler en longueur d'onde $\Delta\lambda$ correspondant.
3. Comparer à la différence de longueur d'onde du doublet du sodium $\lambda_2 - \lambda_1 = 6.10^{-10}$ m.

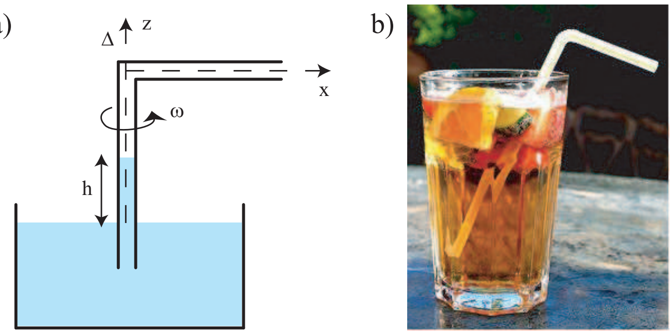
Réponses : 1. $v^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1100\ m.s^{-1}$, 3. $\Delta\lambda = \frac{2v^*}{\nu} = 4.10^{-12}\ m$.

5 Aspiration par un tube en rotation

Considérons un tube coudé de faible section S, plongeant dans un récipient contenant de l'eau, tournant autour de l'axe vertical Δ avec une vitesse angulaire ω. La partie horizontale du tube fait une longueur ℓ.

L'ensemble est placé dans l'atmosphère considérée comme un gaz parfait à la pression P_0 et la température T.

a) b)



1. Quelle est la dénivellation entre la surface libre de l'eau dans le récipient et son niveau dans le tube en régime permanent ? On négligera tout phénomène de capillarité.
2. A-t-on une chance de visualiser ce phénomène en faisant tourner une paille coudée dans un verre ?

Réponses : 1. $h = \frac{P_0}{\rho_e g}\left[1 - e^{-\frac{M_{air}\omega^2\ell^2}{2RT}}\right]$.

6 Centrifugation

Un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h, contient N molécules de masse m d'un gaz parfait. L'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire ω au sein d'une pièce à la température T. L'équilibre relatif dans le référentiel tournant est réalisé. Déterminer l'expression de la concentration moléculaire $n(r)$ en fonction de la distance r à l'axe.

Réponse : $n(r) = \frac{N m \omega^2 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}}}{2\pi h k_B T\left(e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T}} - 1\right)}$.

7 Modèles pour la pression atmosphérique

On considère deux modèles afin de reproduire les variations de pression et de température dans la troposphère, c'est à dire la partie basse de l'atmosphère :

- **Premier modèle** : l'atmosphère est supposée isotherme de température $T_0 = 293$ K et l'air est considéré comme un gaz parfait diatomique en équilibre hydrostatique.
- **Second modèle** : l'atmosphère est supposée adiabatique et l'air est considéré comme un gaz parfait diatomique en équilibre hydrostatique vérifiant la loi de Laplace.

Donnée : $M_{\text{air}} = 29$ g.mol^{-1}.

1. Déterminer l'évolution de la pression et de la température dans chacun des deux modèles. On montrera en particulier que le second modèle est compatible avec la loi de variation de température suivante : $T(z) = T_0(1 - az)$, où z est l'altitude et où $a = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\dfrac{Mg}{RT_0}$.
2. Quel modèle vous semble le plus réaliste ? On calculera la valeur numérique de a pour répondre précisément à la question.

Réponses : 1. $P_2 = P_0(1 - az)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$, 2. $a = 3,3.10^{-5} m^{-1}$.

8 Système à trois niveaux

On considère un système en équilibre avec un thermostat à la température T. Les N atomes indépendants le constituant peuvent occuper trois niveaux d'énergie, $E_1 = -E$, $E_2 = 0$ et $E_3 = E$ $\left(E = C^{te} > 0\right)$.

1. Calculer les nombres moyens $\overline{N_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ d'atomes dans les trois états.
   Commenter les limites de basse et haute températures.
2. Calculer l'énergie moyenne $\overline{\varepsilon}$ d'un atome.
   Tracer son évolution en fonction de la température et commenter le résultat.
3. Décrire qualitativement l'évolution de la capacité thermique à volume constant $C_V\,(T)$.

9 Modèle d'Einstein quantique

Afin d'expliquer l'écart entre la loi de Dulong et Petit et l'expérience à basse température (notamment le fait que $C_{v,m} \underset{T\to 0}{\to} 0$ pour un solide), il faut faire appel au modèle d'Einstein quantique. On associe aux N atomes du solide $3N$ oscillateurs quantiques afin de tenir compte des trois directions indépendantes de l'espace. On suppose ici que tous ces oscillateurs sont indépendants [1], ce qui n'est pas tout à fait exact dans un cristal réel.

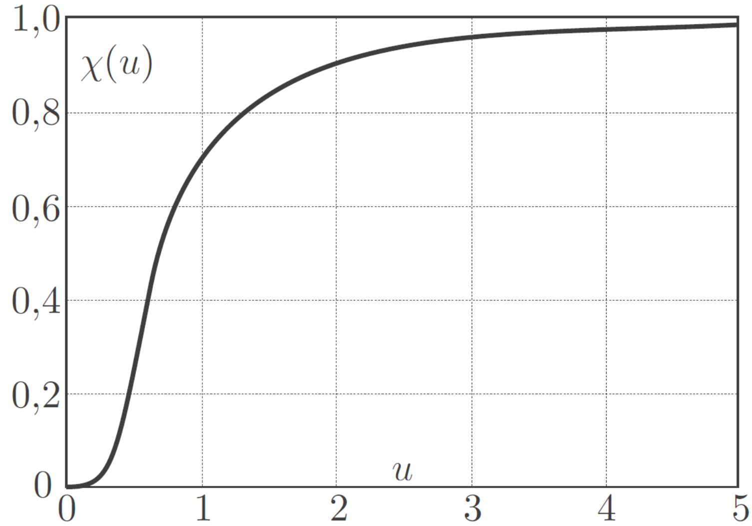
On montre en mécanique quantique que le spectre d'un oscillateur harmonique à une dimension peut être indexé par un nombre quantique n. Si ω est la pulsation de l'oscillateur, les énergies accessibles sont :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad , \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

1. Montrer que la probabilité d'occupation $p(E_n)$ de l'état d'énergie E_n s'écrit pour un oscillateur :
$$p(E_n) = 2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)e^{-\beta E_n} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{1}{k_BT}$$
2. En déduire que l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ de l'ensemble des N atomes du solide s'écrit :
$$\langle E\rangle = \frac{3N\hbar\omega}{2}\text{cotanh}(\frac{\beta\hbar\omega}{2})$$
3. Montrer que la capacité thermique molaire C_m de ce solide s'écrit :
$$C_m = 3R\frac{\xi^2}{sinh^2(\xi)} \qquad \text{avec} \qquad \xi = \frac{\beta\hbar\omega}{2}$$
4. On désigne par T_v la température dite de vibration qui est telle que $T_v = \dfrac{\hbar\omega}{k_B}$. Reformuler l'expression de C_m en fonction de T_v, T, et de la fonction χ représentée ci-dessous, et définie par
$$\chi(u) = \frac{u^{-2}}{\sinh^2\left(u^{-1}\right)}$$

1. Les particules sont indépendantes dans le sens où l'énergie d'interaction entre les particules est négligeable devant l'énergie des particules. Il y a tout de même des petites interactions entre particules qui permettent au système d'atteindre l'équilibre thermodynamique.



5. Commenter les valeurs de la capacité thermique du solide à haute et basse température.

10 Énergie moyenne d'une particule

On considère une particule dans un système comportant des énergies de valeurs E_i non dégénérées. En supposant que la probabilité d'occupation $p(E_i)$ des niveaux d'énergie suit une loi de Boltzmann, montrer que :

$$\langle E_{particule} \rangle = -\frac{\partial ln(Z)}{\partial \beta}$$

où Z est la fonction de partition du système et $\beta = \frac{1}{k_B T}$.