

## DM n°17 (libre) : Diffusion thermique - Physique statistique

### 1 Résolution numérique de l'équation de la chaleur

On se propose de retrouver les courbes de l'exercice du DM précédent à l'aide d'une résolution numérique de l'équation de la chaleur à l'aide de *Python*.

On se reportera au Jupyter Notebook **8373-1470714** dans Capytale.

### 2 De la cuisson des œufs (d'après Centrale-PSI-2016)

Cette partie a pour objet l'étude d'un cuiseur à œufs.



**Figure 4** Vue de profil, vue de dessus, vue de dessus sans la cloche (laissant voir la grille)

Cet appareil cuit des œufs (au nombre de 1 à 7) grâce à la vapeur d'eau qui se forme par ébullition de l'eau placée dans le fond du cuiseur.

Les œufs à cuire selon différents degrés de cuisson (coque, mollet, dur) sont placés sur une grille percée de 7 trous circulaires et de 6 trous périphériques permettant la circulation de la vapeur d'eau dans l'enceinte de cuisson.

Des orifices sont percés au sommet de la cloche métallique pour permettre à la vapeur de s'échapper.

La puissance électrique consommée par l'appareil est :  $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$ . On considèrera que cette puissance est intégralement consommée par la résistance chauffante.

La quantité d'eau placée dans le cuiseur est mesurée à l'aide d'un gobelet gradué selon le nombre d'œufs à cuire et le type de cuisson désirée (voir figure 6). Le fond est bombé à cause de la présence d'une pique sous la base du gobelet permettant le perçage du sommet de l'œuf lors de la cuisson afin d'éviter la rupture de la coquille.

#### Problématique

On voit sur les graduations du gobelet que la quantité d'eau nécessaire à la cuisson est d'autant plus grande que le nombre d'œufs à cuire est faible, ce qui est a priori étonnant. Les sous-parties qui suivent vont permettre d'analyser ce phénomène.

#### Données sur l'eau

masse volumique :  $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

conductivité thermique :  $0,6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

produit ionique :  $K_e = 10^{-14}$

capacité thermique massique :  $4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

chaleur latente massique de vaporisation :  $2,26 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$

température d'ébullition sous 1 bar :  $100 \text{ }^\circ\text{C}$

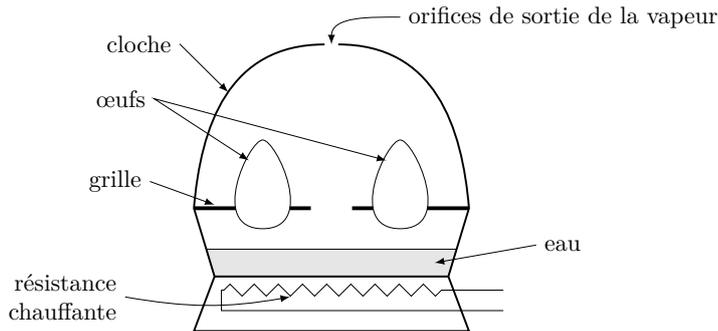


Figure 5 Schéma général du cuiseur

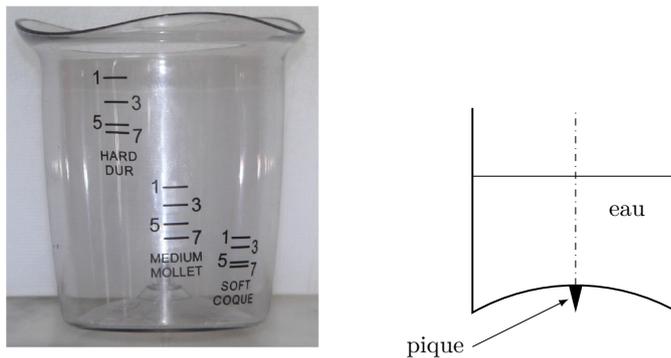


Figure 6 Photo et schéma du gobelet

**Fonctionnement du cuiseur**

Le volume d'eau nécessaire à la cuisson d'un seul œuf dur est de 120 mL. Les œufs à la température initiale  $T_0 = 20\text{ °C}$  sont placés dans le cuiseur et la masse d'eau  $m_0$  contenue dans le gobelet (à la même température initiale  $T_0$ ) est versée sous les œufs. Cette eau est portée à ébullition sous  $p = 1\text{ bar}$ , puis évaporée. Le cuiseur s'arrête quand toute l'eau s'est évaporée.

Notons  $c$  la capacité thermique massique de l'eau liquide,  $T_{\text{eb}}$  sa température d'ébullition dans les conditions de l'expérience,  $h \approx 1200\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$  le coefficient de transfert conducto-convectif (eau↔œuf) et  $m(t)$  la masse d'eau contenue dans le cuiseur à l'instant  $t$ .

Soient  $\Delta t_1$  la durée de chauffage de l'eau de  $T_0$  à  $T_{\text{eb}}$  et  $\Delta t_2$  la durée de la cuisson des œufs, qui correspond à l'évaporation totale de l'eau. Pendant cette deuxième phase, on supposera que la vapeur d'eau est à la température  $T_{\text{eb}}$  sous la pression  $p = 1\text{ bar}$ .

**II.A – Chauffage de l'eau**

**II.A.1)** Soit  $m_c$  la valeur en eau du cuiseur (on rappelle que la valeur en eau d'un objet est la masse d'eau ayant même capacité thermique que cet objet). En supposant la transformation adiabatique pendant le chauffage, exprimer  $\Delta t_1$  en fonction des données.

**II.A.2)** On place dans le cuiseur une masse d'eau  $m_0 = 125\text{ g}$ . On mesure alors une durée de chauffage  $\Delta t_0 = 150\text{ s}$  avant de parvenir à l'ébullition. En déduire la valeur en eau du cuiseur.

**II.B – Détermination de la durée de cuisson  $\Delta t_2$**

**II.B.1) Mécanisme de la cuisson des œufs**

Un œuf est composé de trois parties :

- une coquille très mince ;
- le blanc d'œuf constituant les deux tiers de l'œuf. C'est un liquide composé à environ 90% d'eau et 10% de protéines, sels minéraux et vitamines ;
- le jaune d'œuf est composé à moitié d'eau, de 15% de protéines et de 30% de lipides.

Lors de la cuisson (type œuf dur) les protéines se déroulent partiellement et se lient pour former un réseau qui piège l'eau : c'est un gel. Les œufs caoutchouteux sont ceux qui ont perdu trop d'eau ; c'est aussi la sur-cuisson du jaune qui le fait devenir sableux. Quand un œuf est cuit à  $100\text{ °C}$ , la masse diminue progressivement à mesure que l'eau est éliminée du gel formé. Quand un œuf est cuit à une température peu

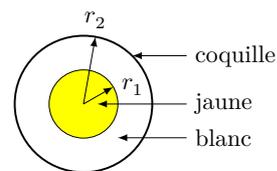


Figure 7 Structure interne d'un œuf

supérieure à la température de coagulation de ses protéines, il coagule en conservant son eau, gage de moelleux. Le jaune d'œuf commence à épaissir à 65 °C. Il coagule totalement à une température de 85 °C.

Justifier l'existence de la pique sous le fond du gobelet.

### II.B.2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

Pour déterminer le temps de cuisson, il est nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur en régime dépendant du temps. On modélise un œuf comme un ensemble de deux sphères concentriques de rayons  $r_1$  et  $r_2$  limitant le jaune et le blanc (figure 7).

Afin de simplifier l'étude, on va négliger l'influence de la coquille et considérer l'intérieur de l'œuf comme homogène et ayant les propriétés thermodynamiques de l'eau : masse volumique  $\mu$ , capacité thermique massique  $c$  et conductivité thermique  $\lambda$ .

a) Établir l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques, en faisant un bilan énergétique sur une couche sphérique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .

b) On introduit les variables réduites :  $\rho = r/r_2$  et  $\tau = t/\theta$ . Exprimer  $\theta$  en fonction de  $\mu$ ,  $c$ ,  $r_2$  et  $\lambda$  pour que l'équation de la chaleur s'écrive :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau} \quad (\text{II.1})$$

Commenter la dépendance de  $\theta$  par rapport à  $r_2$ .

### II.B.3) Résolution de l'équation de la chaleur

a) Afin de résoudre cette équation *en régime dépendant du temps*, on pose dans un premier temps

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + f(\rho)g(\tau)$$

En utilisant l'équation de la chaleur, montrer que la composante temporelle  $g(\tau)$  vérifie l'équation

$$\frac{1}{g(\tau)} \frac{dg(\tau)}{d\tau} = -A^2$$

où  $A$  est une constante réelle positive, inconnue à ce stade de la résolution.

Donner l'expression de  $g(\tau)$  à une constante multiplicative près et justifier le signe  $-$  figurant devant  $A^2$ .

b) Pour trouver la composante spatiale de  $T(\rho, \tau)$ , on pose  $f(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho}$ . Montrer alors que  $F(\rho)$  est solution de l'équation

$$\frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + A^2 F(\rho) = 0$$

En déduire l'expression de  $f(\rho)$ .

c) Montrer alors que la solution générale de l'équation II.1 peut s'écrire sous la forme

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \sum_i \frac{\beta_i \sin(A_i \rho)}{\rho} \exp(-A_i^2 \tau) \quad (\text{II.2})$$

Quelles sont les différentes conditions qui permettent théoriquement de calculer les coefficients  $\beta_i$  et  $A_i$  ?

### II.B.4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

Dans le cadre de l'approximation de Fourier, on ne conserve dans l'expression II.2 que le terme associé à la constante de temps la plus longue, donc celui correspondant au coefficient  $A_i$  le plus petit (qui sera noté  $A$  dans la suite), car les autres termes sont rapidement amortis au cours du temps :

$$T(\rho, \tau) \approx T_{\text{eb}} + \frac{\beta \sin(A\rho)}{\rho} \exp(-A^2 \tau)$$

a) On suppose que les échanges thermiques au niveau de la coquille sont donnés par la loi de Newton  $\vec{j}_{\text{th}} = h(T(\rho = 1, \tau) - T_{\text{eb}})\vec{u}_r$ . En écrivant deux expressions permettant d'exprimer le flux thermique entrant dans l'œuf, montrer que  $A$  est solution de l'équation

$$\frac{A}{1 - r_2 h / \lambda} = \tan A$$

b) Pour un œuf moyen, on a  $r_2 = 2,5$  cm. Montrer que dans ces conditions, on peut prendre  $A \approx \pi$  comme première solution de l'équation précédente dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . Évaluer l'erreur commise.

c) Exprimer alors  $T(\rho, \tau)$  avec la valeur de  $A$  précédente. Quelle conséquence peut-on en tirer sur la température à la surface de l'œuf ? Montrer que cela revient à considérer une des grandeurs caractéristiques du problème comme infinie.

d) Calculer  $\beta$  en exprimant la température au centre de l'œuf à  $t = 0$ .

### II.B.5) Calcul de la durée de cuisson $\Delta t_2$ pour un œuf dur

a) Exprimer en fonction de  $\theta$  et des autres données du problème la durée de cuisson  $\Delta t_2$  à l'état dur d'un œuf de rayon  $r_2$ , pour lequel la température au centre doit atteindre  $T_c = 80^\circ\text{C}$ .

b) Calculer  $\Delta t_2$  pour un œuf de rayon  $r_2 = 2,5$  cm. Commenter le résultat obtenu.

### II.C – Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

#### II.C.1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur $\mathcal{E}_d$

a) En faisant un bilan énergétique très simple entre l'état final et l'état initial, donner une borne inférieure  $\mathcal{E}_{d\min}$  de l'énergie de cuisson  $\mathcal{E}_d$  d'un œuf dur. Faire l'application numérique.

b) De la même façon, donner une borne supérieure  $\mathcal{E}_{d\max}$  de l'énergie  $\mathcal{E}_d$ . Faire l'application numérique.

c) Dans la suite, on adoptera comme valeur de l'énergie  $\mathcal{E}_d$  la moyenne arithmétique de  $\mathcal{E}_{d\min}$  et  $\mathcal{E}_{d\max}$ . Calculer numériquement cette valeur.

**II.C.2)** Pendant la phase de cuisson, on peut considérer l'eau contenue dans le cuiseur comme un système ouvert en écoulement permanent, admettant en entrée de l'eau liquide à la température  $T_{\text{eb}}$  et en sortie de la vapeur d'eau à  $T_{\text{eb}}$  (noter que, dans cette modélisation, les œufs font partie de l'extérieur du système).

Soit  $\mathcal{P}$  la puissance thermique fournie par la résistance chauffante,  $\mathcal{P}_f$  la puissance associée aux pertes thermiques dans les différentes parties du cuiseur (socle, cloche...).

On note :

- $D_m$  le débit massique de vapeur en sortie ;
- $n$  le nombre d'œufs dans le cuiseur ;
- $\ell_v$  la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau liquide à  $100^\circ\text{C}$ ,  $\ell_v = 2,26 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$  ;
- $\mathcal{E}(t)$  l'énergie cédée à un œuf entre le début de sa cuisson et l'instant  $t$  ;

–  $\mathcal{E}_X$  l'énergie nécessaire à la cuisson d'un œuf dans l'état  $X \equiv \begin{cases} d : & \text{dur} \\ m : & \text{mollet} \\ c : & \text{coque} \end{cases}$ .

En appliquant le premier principe au système ouvert en régime permanent pendant la durée  $dt$ , établir la relation entre  $D_m$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_f$ ,  $\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$  et le nombre d'œufs  $n$ .

**II.C.3)** On introduit dans le cuiseur une masse  $m_0$  d'eau liquide, qui va donc être vaporisée pendant la phase de cuisson de durée  $\Delta t_2$ . Montrer que

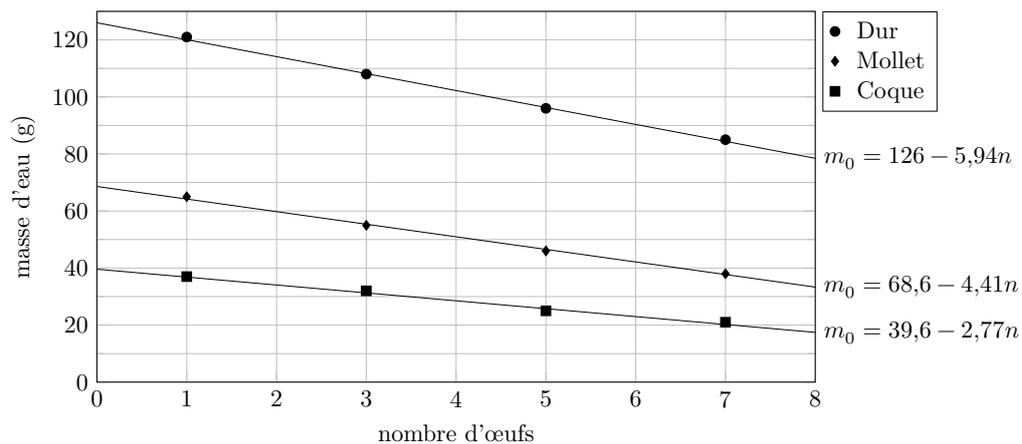
$$m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f)\Delta t_2 - n\mathcal{E}_X}{\ell_v}$$

Justifier alors les graduations du gobelet.

**II.C.4)** Exprimer la puissance thermique minimale que doit fournir la résistance électrique pour pouvoir cuire 7 œufs durs. Faire l'application numérique en considérant  $\mathcal{P}_f \approx 0$  et en prenant  $\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}$  pour un œuf de 2,5 cm de rayon dont le temps de cuisson est d'environ 10 minutes. Comparer à la puissance du cuiseur et commenter.

**II.C.5)** On donne figure 8 la représentation graphique de la masse d'eau  $m_0$  contenue dans le gobelet en fonction du nombre d'œufs pour les trois degrés de cuisson ( $d, m, c$ ). Analyser ces courbes à la lumière des résultats précédents. En particulier :

- déterminer la taille des œufs (c'est-à-dire leur rayon) qui ont servi à « étalonner » le gobelet ;
- le temps de cuisson d'un œuf dur vous semble-t-il conforme aux résultats obtenus plus haut ?



**Figure 8** Masse d'eau à introduire dans le cuiseur en fonction du nombre d'œufs, pour les différents choix de cuisson

## Données

### Données sur l'eau

masse volumique :  $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

conductivité thermique :  $0,6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

produit ionique :  $K_e = 10^{-14}$

capacité thermique massique :  $4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

chaleur latente massique de vaporisation :  $2,26 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$

température d'ébullition sous 1 bar :  $100 \text{ }^\circ\text{C}$

### 3 Température dans le tunnel de Fréjus (d'après Mines-PC-2016)

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

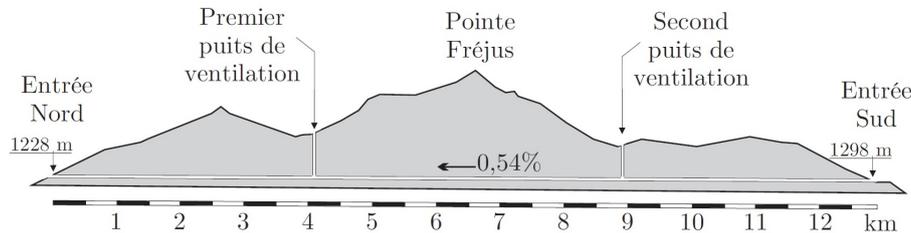


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ  $30^\circ\text{C}$ . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

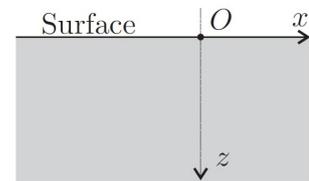


FIGURE 2 – Sol

#### I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique  $\kappa$ , de masse volumique  $\rho_s$  et de capacité thermique massique  $c_s$ . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure  $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$  avec  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ . (Voir figure 2).

- 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en  $z = 0$ . Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour  $T_0$  pour les évolutions annuelles de température.
- 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire  $d\mathcal{S}$  pendant  $dt$ , est noté  $d\phi_Q$ . Rappeler la définition du vecteur  $\vec{j}_Q$ , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique  $\kappa$ .
- 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre  $z$  et  $z + dz$  de surface  $\mathcal{S}$ . Quelle est l'énergie thermique  $\delta Q$  reçue par cette tranche entre  $t$  et  $t + dt$  ?

- ❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?
  - ❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne  $dU$  en fonction de  $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$  et  $\mathcal{S}$  puis en fonction de  $\rho_s, c_s, \mathcal{S}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .
  - ❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension  $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$  dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient  $D$  de diffusion thermique.
- On cherche des solutions de la forme  $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - kz)}$  vérifiant la condition aux limites  $T(z = 0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ .
- ❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de  $\underline{k}$  qu'on mettra sous la forme  $\underline{k} = k' + ik''$  avec  $k' > 0$ . Quelle est la signification physique de  $k'$  et  $k''$ . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle  $T(z,t)$ .
  - ❑ 9 — Calculer la profondeur  $z_e$  à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de  $\theta_0$  de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne  $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\kappa = 3,00 \text{ SI}$ .
  - ❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur  $z_e$  ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

### I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est  $L_c = 45,0 \text{ km}$ . Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$  avec  $H = 10,0 \text{ km}$ . On prendra  $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ . La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface  $\mathcal{I}_{c/m}$  entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant  $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$  avec  $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ .

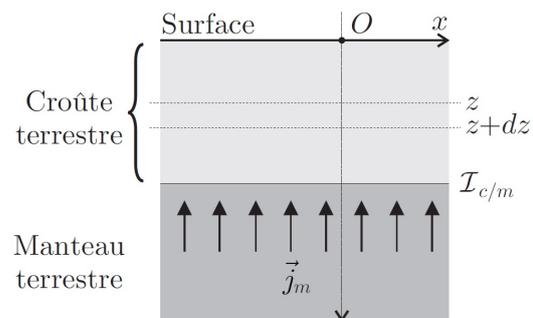


FIGURE 3 – Modèle géophysique

- ❑ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface  $\mathcal{S}$ , comprise entre  $z$  et  $z + dz$ .
- ❑ 12 — En déduire la température  $T(z)$  en fonction de :  $H, L_c, \mathcal{P}, j_m, \kappa$  et  $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$  la température moyenne de surface en  $z = 0$ .
- ❑ 13 — Exprimer le flux thermique total  $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$  au niveau de la surface en  $z = 0$ .
- ❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à  $z$  et simplifier l'expression de  $T(z)$ . Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ( $z = 1,70 \text{ km}$ ) puis  $j_S$ .

### I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane  $z = 0$  possède une dépendance spatiale en  $x$  que l'on modélise par la relation  $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra  $\lambda = 10,0$  km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par  $T(x, z)$  en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution  $T(x, z)$  qui respecte la condition aux limites  $T(x, z = 0)$  et qui demeure finie lorsque  $z \rightarrow +\infty$ . Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation  $z = 0$ , en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer  $T(x, z)$  en considérant les sources internes d'énergie thermique.

□ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation  $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . La température de la surface  $T_s = T(x, z = h)$  sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par  $T_s = \theta_0 + \beta z$ . En effectuant un développement limité en  $z$  à l'ordre 1, exprimer la température  $T(x, z = 0)$  en fonction de  $h$ ,  $T(x, z = h)$  et  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ .

Déterminer  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$  en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface  $j_S$ . En déduire que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $\delta$  en fonction des données du problème.

## 4 Physique statistique - d'après Centrale - MP - 2016

L'essentiel du rayonnement visible du Soleil provient de sa photosphère, que l'on désignera par « surface solaire ». Elle est entourée d'une fine couche appelée chromosphère, puis de la couronne, laquelle est observable en particulier lors des éclipses. La figure 1 (photographie de Luc Viatour <https://lucnix.be>) montre la couronne solaire observée en France lors de l'éclipse totale de 1999. La Lune, qui masque le Soleil, a un diamètre apparent presque identique à celui du Soleil.

La couronne est un milieu fortement variable et inhomogène. Sa structure est profondément influencée par le champ magnétique solaire. Dans tout ce problème, on ignore ces aspects et on étudie, sauf mention contraire, une « couronne moyenne », idéalisée et à symétrie sphérique. Dans un premier temps, on évalue sa température (partie I). On estime ensuite son contenu électronique (partie II). Le rayonnement radio qui provient du Soleil nous renseigne sur des propriétés physiques des régions d'émission (partie III).

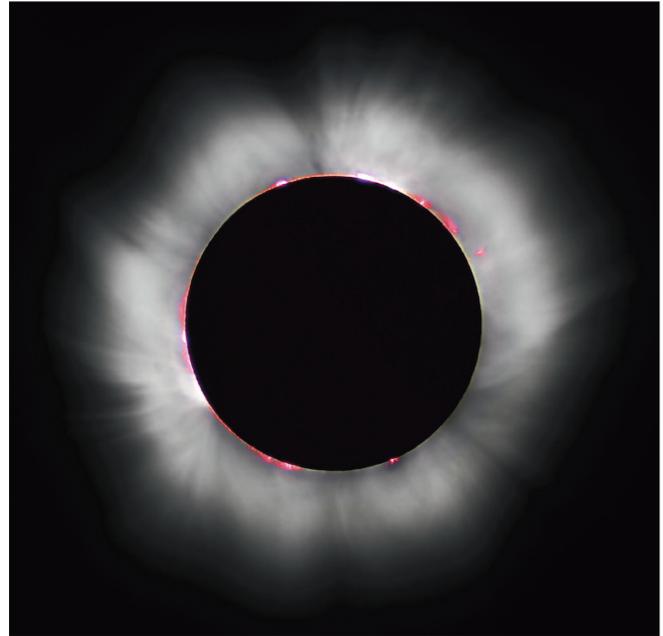


Figure 1

Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

### I Température dans la couronne solaire

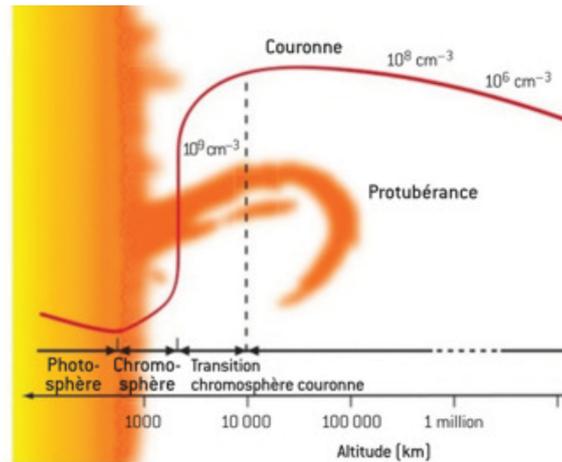
#### — La mesure des températures en astrophysique. Application au Soleil. —

*D'après « Panorama de la physique », sous la direction de Gilbert Pietryk, Belin Pour la Science, 2012.*

Le spectre de raies d'émission est la signature des éléments chimiques présents dans le corps qui émet. Il permet d'obtenir des informations sur la température, par la largeur de ces raies, mais renseigne aussi par la présence de formes ionisées. Cette propriété est utilisée pour étudier la couronne solaire et accéder à la température du plasma dans cette région. La couronne n'est pas observable en même temps que le disque solaire, parce que sa luminosité est à peu près un million de fois inférieure, mais en occultant le disque on peut la voir très nettement. Cette occultation peut être naturelle (lors des éclipses) ou artificielle en utilisant des coronographes. L'analyse des raies émises par la couronne met en évidence l'existence d'atomes ionisés un grand nombre de fois. Par exemple le FeX est un atome de fer ionisé 9 fois qui existe dans la couronne. Or, l'étude en laboratoire de la réaction de passage du FeIX à FeX a montré que cette réaction nécessite une température d'au moins  $1 \times 10^6$  K et que légèrement au-dessus apparaît l'ion FeXI. L'observation des raies de cet ion dans la couronne prouve donc d'une part qu'il y a du fer à cet endroit, mais aussi que la température qui y règne est d'environ  $1 \times 10^6$  K.

On constate grâce à ces observations que l'évolution de la température au voisinage du Soleil est complexe : partant de quelques milliers de degrés à la base de la photosphère, elle diminue d'abord comme on peut s'y attendre lorsqu'on s'éloigne d'un corps chaud, mais elle ré-augmente ensuite brutalement dans une région appelée région de transition (figure 2), pour atteindre un million de degrés. Cette température reste ensuite presque constante dans la haute couronne et dans le vent solaire, comme le montrent les mesures *in-situ*.

Aucune mesure n'a pu encore être faite directement dans la couronne elle-même, mais le vent solaire a fait l'objet de plusieurs missions spatiales comme Ulysse ou Wind. Le plasma du milieu interplanétaire étant extrêmement ténu, l'utilisation d'un thermomètre au sens classique (corps en équilibre thermodynamique avec le milieu) n'a pas de sens. En revanche, les sondes embarquent des détecteurs de particules qui les sélectionnent en fonction de leur énergie (en appliquant un champ électrostatique), les trient (en appliquant un champ magnétique) et enfin les comptent. Au final, la fonction de distribution obtenue donne l'énergie moyenne des particules et donc leur température.



**Figure 2** Profil de température dans la couronne solaire : l'échelle de distance, logarithmique, montre la faible épaisseur sur laquelle se fait la transition entre la basse température de la photosphère et la haute température de la couronne. Des ordres de grandeur de densités volumiques de particules sont aussi indiqués.

**I.A – Une atmosphère très étendue**

Observée en lumière blanche, la couronne s'étend assez loin du limbe solaire (figure 1). La couronne est constituée d'un plasma assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M_p$ . La masse moyenne d'une particule du milieu est notée  $m = M_p/\mathcal{N}_A$ , où  $\mathcal{N}_A$  est la constante d'Avogadro. On modélise la couronne par une atmosphère isotherme à la température  $T$  et à l'équilibre sous l'effet du champ de pesanteur solaire. Dans un premier temps, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme  $g_s$ . La densité volumique de particules  $n_1(z)$  à l'altitude  $z$ , mesurée par rapport à la base de la couronne, a alors pour expression  $n_1(z) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p(z)}{k_B T}\right)$  où  $E_p(z)$  est l'énergie potentielle d'une particule de masse  $m$  dans le champ de pesanteur et  $n_0$  la densité volumique de particules à l'altitude  $z = 0$ .

**Q 1.** Donner l'expression de  $E_p(z)$  et en déduire que  $n_1(z) = n_0 \exp(-z/H)$  où  $H$  est la hauteur d'échelle, dont on donnera l'expression en fonction de  $m$ ,  $k_B$ ,  $T$  et  $g_s$ .

**Q 2.** Le milieu est localement neutre et on le suppose constitué uniquement d'hydrogène totalement ionisé. Exprimer  $m$  en fonction de la masse d'un proton ( $m_p$ ) et de celle d'un électron ( $m_e$ ).

**Q 3.** Des mesures d'intensité lumineuse de la couronne conduisent à estimer une densité volumique de particules à l'altitude  $z_2 = R_s$ , où  $R_s$  est le rayon du Soleil, environ  $10^3$  fois plus faible qu'à l'altitude  $z_1 = 0$ . En déduire la valeur numérique de  $H$ , puis évaluer la température de la couronne.

On adopte un modèle à symétrie sphérique et on néglige l'effet de rotation du soleil. La densité volumique de particules  $n_2(r)$  ne dépend que de la distance  $r$  au centre du Soleil. À l'équilibre, la pression  $p$  vérifie l'équation  $\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r)$  où  $g(r)$  désigne la norme du champ gravitationnel solaire et  $\rho(r)$  la masse volumique.

**Q 4.** En négligeant la masse de la couronne et en supposant la distribution de masse du Soleil à symétrie sphérique, déterminer  $g(r)$  pour  $r \geq R_s$ , en fonction de  $g_s$ ,  $r$  et  $R_s$ .

**Q 5.** En déduire l'expression de  $n_2(r)$ . On notera  $n'_0 = n_2(R_s)$ .

**Q 6.** Des observations ont permis de déterminer en fonction de  $r$  la densité volumique d'électrons dans la couronne « calme » (tableau 1). Vérifier la pertinence du modèle précédent à l'aide de ces données puis estimer la température de la couronne.

$r/R_s$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$n_e$ (m <sup>-3</sup> )	$3,5 \times 10^{14}$	$2 \times 10^{14}$	$9 \times 10^{13}$	$5 \times 10^{13}$	$3 \times 10^{13}$

**Tableau 1**

**I.B – Présence de fer hautement ionisé**

Le spectre de la lumière provenant de la couronne solaire inclut une raie d'émission assez intense de longueur d'onde 530,3 nm. Cette raie a été attribuée à l'ion FeXIV, c'est-à-dire au fer ayant perdu 13 électrons. L'énergie d'ionisation permettant de passer de FeXIII à FeXIV est  $E_1 = 355$  eV.

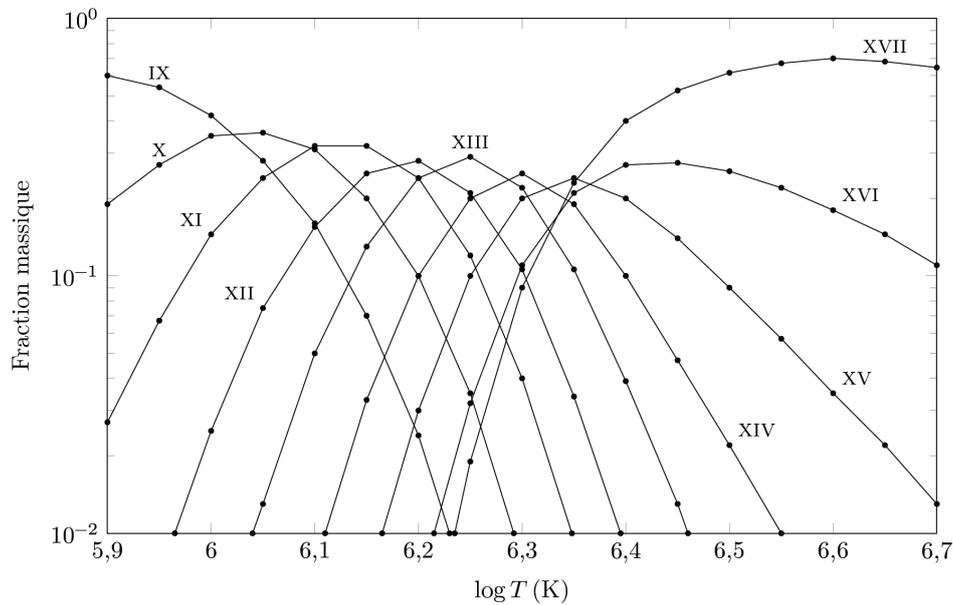
**Q 7.** Quelle est la condition sur la longueur d'onde d'un photon incident pour qu'il puisse provoquer l'ionisation de FeXIII en FeXIV ? À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-il ?

Le rayonnement provenant de la surface solaire est insuffisant dans ce domaine spectral. On explique l'ionisation par des chocs entre ions FeXIII et électrons libres du milieu.

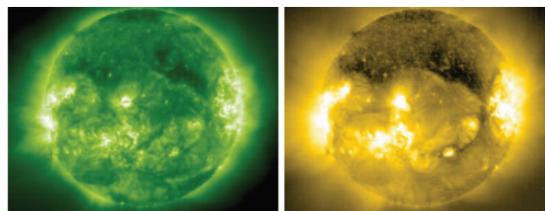
**Q 8.** Donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne des électrons libres en fonction de la température  $T$ .

**Q 9.** En considérant que l'ionisation est probable si la somme des énergies cinétiques moyennes des deux particules est supérieure à  $E_1$ , estimer la température de la couronne.

On déduit de simulations numériques les fractions massiques d'ions du fer en fonction de la température (figure 3). Le satellite SOHO a observé le Soleil à différentes longueurs d'onde (figure 4).



**Figure 3** Fraction massique de différents états d'ionisation du fer en fonction de la température exprimée en Kelvin. D'après Dere et al. (2009), *Astron. Astrophys.*, 498 (2009), p. 915



**Figure 4** Images obtenues par SOHO : à droite, à une longueur d'onde de 19,5 nm correspondant à une raie de FeXII ; à gauche, à une longueur d'onde de 28,4 nm correspondant à une raie de FeXV

**Q 10.** Évaluer la température des régions les plus émissives sur chacune de ces deux images.

**Q 11.** Expliquer l'intérêt d'observer à des longueurs d'onde de raies émises par le fer dans différents états d'ionisation.

**Q 12.** Pourquoi observe-t-on des raies d'émission d'ions du fer, élément peu abondant dans la couronne solaire, mais pratiquement aucune raie de l'hydrogène, principal constituant de la couronne ?

**I.C – Des raies d'émission très larges**

Un ion FeXIV excité rayonne une onde électromagnétique de fréquence  $\nu_0$  dans son référentiel propre. S'il a une vitesse  $\vec{v}$  par rapport à un observateur, ce dernier perçoit une fréquence  $\nu \approx \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c}\right) \nu_0$  où  $\vec{u}$  désigne le vecteur unitaire de la direction observateur – source orienté dans le sens observateur vers source et  $c$  désigne la célérité de la lumière dans le vide. Le rayonnement observé dans la direction définie par le vecteur  $\vec{u}$  provient d'un grand nombre d'ions FeXIV dont les vitesses suivent une distribution statistique, d'autant plus dispersée que la température du milieu émetteur est élevée. Il en résulte une raie spectrale élargie autour de la fréquence  $\nu_0$ .

**Q 13.** Nommer l'effet décrit ci-dessus.

On note  $\langle X \rangle_i$  la moyenne d'une grandeur  $X$  sur les ions dont on observe le rayonnement.

**Q 14.** Établir une relation entre  $\Delta\nu = \sqrt{\langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle_i}$  et  $\langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle_i$ .

**Q 15.** Exprimer  $\langle v^2 \rangle_i$  en fonction de la masse  $m_{Fe}$  d'un ion, de la température  $T$  du milieu et de la constante de Boltzmann  $k_B$ .

**Q 16.** La distribution des vitesses des ions étant supposée isotrope, quelle est la relation entre  $\langle(\vec{v} \cdot \vec{u})^2\rangle_i$  et  $\langle v^2\rangle_i$  ?

**Q 17.** En déduire  $\Delta\nu$  en fonction de  $m_{\text{Fe}}$ ,  $T$ ,  $c$ ,  $k_B$  et  $\nu_0$ , puis la largeur de la raie spectrale en longueur d'onde, notée  $\Delta\lambda$ , en fonction de  $m_{\text{Fe}}$ ,  $T$ ,  $c$ ,  $k_B$  et  $\lambda_0$  longueur d'onde de l'onde de fréquence  $\nu_0$ . On supposera  $\Delta\nu \ll \nu_0$ .

Pour la raie verte de FeXIV, centrée sur la longueur d'onde 530,3 nm, on observe  $\Delta\lambda \approx 0,03$  nm.

**Q 18.** En déduire la température du milieu dans lequel cette raie se forme.

**Q 19.** Vérifier la cohérence avec la figure 3.

## Données numériques

### Constantes

Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$

### Soleil

Rayon	$R_s = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Masse	$M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Champ de pesanteur à la surface solaire	$g_s = 274 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

### Données diverses

Électron-volt	$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge de l'électron	$-e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse molaire atomique du fer	$M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Numéro atomique du chlore	$Z = 17$
Énergie de l'atome d'hydrogène dans son niveau fondamental	$-13,6 \text{ eV}$