

**Correction - DM n°17 : Diffusion  
thermique - Physique statistique**

## 1 Résolution numérique de l'équation de la chaleur

On se reportera au Jupyter Notebook **b54b-1458988** dans Capytale.

## 2 De la cuisson des œufs. Centrale - Supelec PSI 2016

### II.A - chauffage de l'eau

#### II.A.1)

L'eau n'étant pas en contact avec les œufs, et la transformation étant adiabatique, on suppose que la puissance délivrée par la résistance ne sert qu'à chauffer le cuiseur, sans perte. Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système fermé en évolution adiabatique formé du cuiseur et de l'eau s'écrit sur la durée  $\Delta t_1$  :

$$(m_e + m_0)c(T_{\text{eb}} - T_0) = \mathcal{P}\Delta t_1$$

soit

$$\Delta t_1 = \frac{(m_e + m_0)c(T_{\text{eb}} - T_0)}{\mathcal{P}}$$

#### II.A.2)

D'après la relation précédente, pour  $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$ ,  $\Delta t_1 = 150 \text{ s}$ ,  $T_0 = 20 \text{ °C}$ ,  $m_0 = 125 \text{ g}$

$$m_e = \frac{\Delta t_1 \mathcal{P}}{c(T_{\text{eb}} - T_0)} - m_0 = 32 \text{ g}$$

### II.B - Détermination de la durée de cuisson $\Delta t_2$

#### II.B.1) mécanisme de cuisson des œufs

La raison de l'existence de la pique n'est malheureusement pas à chercher dans l'énoncé, qui omet de citer dans la description de l'œuf la présence d'une poche d'air : sous l'effet de la chaleur lors de la cuisson, elle tend à se dilater à volume constant, la coquille étant indéformable, ce qui entraîne une augmentation de pression qui peut conduire à la rupture de la coquille. La pique sert à percer la coquille au niveau de la poche à air, pour permettre à celle-ci de se vider au fur et à mesure de l'augmentation de température.

Pour une illustration :

<http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-eierpieker-karambolage>  
et aussi (avec la présentation d'un autre dispositif)

<http://www.arte.tv/magazine/karambolage/fr/lobjet-le-toqueur-oeuf-061912-000>

En l'absence d'indication de la présence d'une poche d'air, l'énoncé pourrait laisser supposer qu'il s'agit d'un problème de vaporisation de l'eau contenue dans l'œuf, mais comme la cuisson à lieu à  $100 \text{ °C}$ , la pression de la vapeur formée est de 1 bar, et ne peut donc pas causer la rupture de la coquille.

## II.B.2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

a) Bien que l'énoncé ne l'indique pas, on se place dans le cadre d'un modèle unidimensionnel où la température ne dépend que de la coordonnée radiale  $r$  en coordonnées sphériques, ce qui est cohérent avec le modèle de l'œuf sphérique soumis à des contraintes extérieures à symétrie sphérique. Les isothermes sont alors les sphères concentriques de centre  $O$ .

On considère la couche sphérique de centre  $O$  de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$ , de volume  $dV = 4\pi r^2 dr$ , de température uniforme  $T(r, t)$ . Sa capacité thermique vaut  $dC = \mu dV c$ , donc sa variation d'énergie interne (ou d'enthalpie, puisqu'il s'agit d'une phase condensée) pour une variation élémentaire de température a pour expression

$$d^2 E = dC dT = 4\pi r^2 \mu c dT dr$$

Dans le cadre de la conduction pure, sans terme de source, la couche est soumise aux seuls flux thermiques conductifs traversant les sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$  la limitant.

Le flux thermique traversant l'isotherme de rayon  $r$  dans le sens des  $r$  croissants a pour expression

$$\phi(r, t) = \iint_{r'=r} \vec{j}_{\text{th}}(r', t) \cdot d\vec{S} = j_{\text{th}, r}(r, t) S_{\text{sphère}} = 4\pi r^2 j_{\text{th}, r}(r, t)$$

où  $j_{\text{th}, r}$  est la composante radiale du flux thermique.

Le bilan thermique s'écrit sur une durée élémentaire  $dt$ , pour la transformation (supposée isochore si on ne perce pas la coquille ou isobare si on la perce, mais cela ne fait pas de différence puisqu'il s'agit d'une phase condensée)

$$d^2 E = \delta^2 Q = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)) dt = -\frac{\partial \phi}{\partial r} dr dt = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{\text{th}, r})}{\partial r} dr dt$$

soit après simplification des éléments différentiels

$$4\pi r^2 \mu c dT dr = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{\text{th}, r})}{\partial r} dr dt ; \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{\text{th}, r})}{\partial r}$$

En exprimant la loi de Fourier en symétrie sphérique (l'expression n'est pas donnée, même si elle n'est pas au programme, mais comme l'établissement de l'équation de la chaleur unidimensionnelle l'est, on peut supposer que les étudiants doivent la connaître pour toute géométrie unidimensionnelle)

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(r, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r ; j_{\text{th}, r} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

et en la reportant dans le bilan thermique, on obtient pour  $\lambda$  uniforme l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques avec symétrie sphérique

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

b) On exprime alors  $r = r_2 \rho$  et  $t = \theta \tau$ , où  $r_2$  et  $\theta$  sont des constantes

$$\frac{\mu c}{\theta} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{r_2^2 \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) ; \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda \theta} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

L'équation donnée dans l'énoncé est obtenue si la constante multiplicative  $\frac{\mu c r_2^2}{\lambda \theta}$  vaut 1, soit

$$\theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}$$

L'expression précédente est l'expression usuelle du temps caractéristique de diffusion sur une distance  $r_2$ , qui représente ici la taille caractéristique de l'œuf. En particulier  $\tau$  est proportionnel à  $r_2^2$ , ce qui traduit la perte d'efficacité des phénomènes diffusifs lorsque la taille du système augmente.

### II.B.3) résolution de l'équation de la chaleur

a) En reportant la solution proposée dans l'équation de la chaleur, on obtient,

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial (fg)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial (fg)}{\partial \tau} ; \quad \frac{g}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = f \frac{dg}{d\tau}$$

puis en divisant par le produit  $fg$  supposé non nul

$$\frac{1}{\rho^2 f} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = -A^2$$

Les deux termes sont égaux à une constante car le premier ne dépend que de la variable  $\rho$  tandis que le second ne dépend que de la variable  $\tau$  (principe de séparation des variables). La justification de l'écriture de la constante sous la forme  $-A^2$ , est donnée plus bas.

On obtient alors les deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dg}{d\tau} + A^2 g = 0 ; \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) + A^2 f = 0$$

L'équation en  $g(\tau)$  du premier ordre à coefficients constants admet à une constante multiplicative arbitraire près la solution générale

$$g(\tau) = e^{-A^2 \tau}$$

La conduction pure est un phénomène stable, donc la solution ne peut diverger dans le temps, ce qui justifie le signe  $-$  qui assure le caractère non divergent de l'évolution temporelle ( $A^2 > 0$  puisque  $A$  est réel).

b) Le changement de variable  $f = F/\rho$  conduit aux relations

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{F'\rho - F}{\rho^2} ; \quad \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \frac{d(F'\rho - F)}{d\rho} = \rho F''$$

en reportant cette expression dans l'équation différentielle vérifiée par  $f$ , on obtient

$$\frac{F''}{\rho} + A^2 \frac{F}{\rho} = 0 : \quad \frac{d^2 F}{d\rho^2} + A^2 F = 0$$

équation de l'oscillateur harmonique ( $A$  est réel), de solution générale

$$F(\rho) = \alpha \cos(A\rho) + \beta \sin(A\rho)$$

soit

$$f(\rho) = \alpha \frac{\cos(A\rho)}{\rho} + \beta \frac{\sin(A\rho)}{\rho}$$

Comme la solution ne peut pas physiquement diverger lorsque  $\rho$  tend vers 0, car alors la température divergerait, la constante  $\alpha$  doit être nulle. La solution physiquement acceptable pour  $f$  s'écrit donc

$$f(\rho) = \beta \frac{\sin(A\rho)}{\rho}$$

avec une limite  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = \beta A$  définie en  $\rho = 0$ .

c) L'équation de la chaleur est linéaire, donc on peut considérer une combinaison linéaire de solutions  $f(\rho)g(\tau)$  de la forme précédente (à l'exception de la constante  $T_{\text{eb}}$  qui est simplement introduite pour satisfaire les conditions aux limites étudiées plus loin). En indiquant les solutions correspondant aux différentes valeurs possibles de  $A_i$ , dénombrables car il y a quantification des modes propres à cause des conditions aux limites), on peut écrire

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \sum_i \beta_i \frac{\sin(A_i \rho)}{\rho} \exp(-A_i^2 \tau)$$

La solution générale doit vérifier :

- des conditions aux limites en  $\rho = 1$  ( $r = r_2$ ) traduisant pour toute valeur de  $\tau$  la continuité de la température et du flux thermique à la surface de l'œuf ;
- une condition initiale en  $\tau = 0$  traduisant le profil de température initial de l'œuf.

#### II.B.4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

a) Le flux entrant par convection dans l'œuf est donné par la loi de Newton

$$\phi = \iint_{\rho=1} \vec{j}_{\text{th}} \cdot dS(-\vec{e}_r) = h(T_{\text{eb}} - T(\rho = 1, \tau))4\pi r_2^2$$

où la loi de Newton donnée par l'énoncé tient compte de la continuité de la température à la surface de l'œuf.

Par continuité du flux, le flux entrant s'exprime également comme le flux conductif immédiatement sous la surface de l'œuf ( $\rho = 1^-$ ), exprimé en utilisant la loi de Fourier  $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$  :

$$\phi = \iint_{\rho=1} \vec{j}_{\text{th}} \cdot dS(-\vec{e}_r) = 4\pi r_2^2 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_2} = 4\pi r_2^2 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1}$$

la dernière relation découlant du changement de variable  $r = r_2 \rho$ .

L'égalité des deux expressions précédentes du flux, qui traduit sa continuité conduit à la relation

$$h(T_{\text{eb}} - T(\rho = 1, \tau))4\pi r_2^2 = 4\pi r_2^2 \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} : \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \frac{hr_2}{\lambda} (T_{\text{eb}} - T(\rho = 1, \tau))$$

On reporte l'expression donnée dans le cas de l'approximation de Fourier

$$\beta \left( \frac{A\rho \cos(A\rho) - \sin(A\rho)}{\rho^2} \right)_{\rho=1} \exp(-A^2 \tau) = \frac{hr_2}{\lambda} \left( \frac{-\beta \sin(A\rho)}{\rho} \right)_{\rho=1} \exp(-A^2 \tau)$$

soit après simplification par  $\beta \exp(-A^2 \tau)$

$$A \cos(A) - \sin(A) = -\frac{hr_2}{\lambda} \sin(A) ; A = \left( 1 - \frac{hr_2}{\lambda} \right) \tan(A)$$

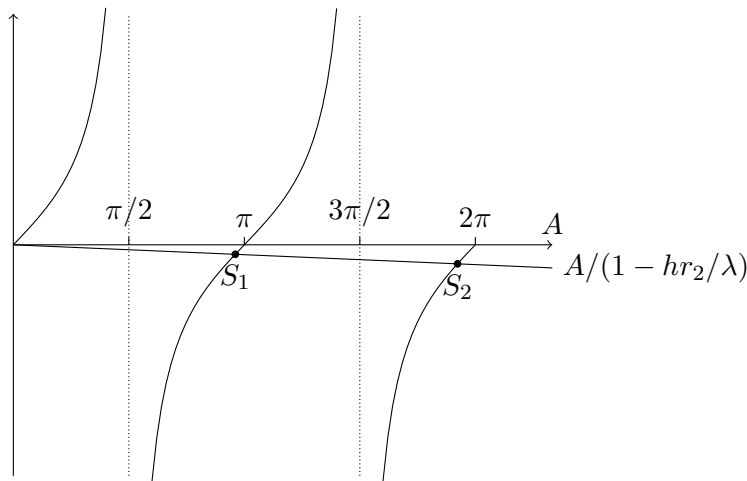
ce qui correspond à l'équation donnée par l'énoncé.

**b)** L'application numérique pour un œuf moyen ( $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $h = 1200 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ) donne

$$\frac{hr_2}{\lambda} = 50$$

soit l'équation  $\tan A = -A/49$ . Comme chaque branche de la fonction  $\tan$  varie entre  $\pm\infty$ , l'équation possède une solution par intervalle  $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ , en plus de la solution exclue  $A = 0$ , qui conduit à un profil uniforme et constant. La première solution est située dans l'intervalle  $]\pi/2, 3\pi/2[$ , et vérifie approximativement  $\tan A = -A/49 \ll 1$ , soit de manière approchée  $\tan A \approx 0$ , qui admet dans cet intervalle la solution  $A = \pi$ .

*Remarque :* Pour éviter des calculs stériles, l'énoncé aurait pu suggérer une recherche graphique des solutions par la superposition des tracés de la fonction tangente et de la droite  $A/(1 - hr_2/\lambda)$  qui montre que lorsque  $hr_2/\lambda$  augmente les solutions se rapprochent de  $k\pi$  où  $k$  est un entier.



recherche graphique des solutions ( $S_1$  et  $S_2$ )  
de l'équation  $\tan A = A/(1 - hr_2/\lambda)$

Les candidats possédant une calculette avec fonction solve pouvaient directement trouver  $A = 3,079 \text{ rad}$ , soit une erreur de  $0,063 \text{ rad}$ .

Sinon il faut effectuer un calcul approché en posant  $A = \pi - \epsilon$ , avec  $\epsilon \ll 1$ , soit  $\tan A \approx -\epsilon$  et  $A/49 \approx -\pi/49$ , d'où la valeur approchée de l'erreur

$$\epsilon = \frac{\pi}{49} = 0,064 \text{ rad}$$

proche de la valeur précédente.

**c)** On prend la valeur approchée  $A = \pi$ , soit

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \beta \frac{\sin(\pi\rho)}{\rho} \exp(-\pi^2\tau)$$

qui conduit à la valeur de la température à la surface de l'œuf ( $\rho = 1$ , donc  $\sin(\pi\rho) = 0$ )

$$T(\rho = 1, \tau) = T_{\text{eb}}$$

La température de surface de l'œuf est égale à la température de la vapeur d'eau hors couche limite, ce qui correspond au cas limite  $h \rightarrow \infty$  (transfert convectif non nul pour  $T(\rho = 1) = T_{\text{eb}}$ )

**d)** au centre de l'œuf ( $0 = r = r_2\rho$ ), en utilisant la relation  $\lim_{x \rightarrow 0}(\sin x/x) = 1$  (non fournie par l'énoncé)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \beta\pi \exp(-\pi^2\tau) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} = T_{\text{eb}} + \pi\beta \exp(-\pi^2\tau)$$

soit à l'instant initial

$$T(0, 0) = T_{\text{eb}} + \pi\beta = T_0$$

$$\beta = -\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{\pi}$$

D'où le profil approché de température

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} - (T_{\text{eb}} - T_0) \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} \exp(-\pi^2\tau)$$

### II.B.5) Calcul de la durée de cuisson $\Delta t_2$ pour un œuf dur

**a)** On utilise l'expression précédente, pour déterminer la valeur de  $\tau$  pour laquelle la température au centre ( $\rho = 0$ ) atteint  $T_c$

$$T_c = T(0, \tau) = T_{\text{eb}} - (T_{\text{eb}} - T_0) \exp(-\pi^2\tau)$$

$$\tau = \frac{1}{\pi^2} \ln \left( \frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right)$$

soit, comme  $t = \theta\tau$

$$\Delta t_2 = \frac{\theta}{\pi^2} \ln \left( \frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right) ; \theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}$$

**b)** Pour  $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ ,  $\mu = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\lambda = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $T_{\text{eb}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_c = 80 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\theta = 4,35 \times 10^3 \text{ s} ; \Delta t_2 = 612 \text{ s} \approx 10 \text{ min}$$

C'est l'ordre de grandeur du temps de cuisson d'un œuf dur.

*Remarque :* on peut vérifier qualitativement que la forme approchée du profil de température est utilisable à l'instant  $\Delta t_2$ , du fait de l'amortissement temporel de plus en plus rapide des modes propres. À l'instant  $\Delta t_2$ ,  $e^{-\pi^2\tau} \approx 0,25$ , alors que pour le terme suivant du développement,  $A_2 \approx 2\pi$  et  $e^{-4\pi^2\tau} \approx 4 \times 10^{-3}$ .

## II.C - Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

### II.C.1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur

L'énergie nécessaire à la cuisson d'un œuf dur correspond à l'élévation de température du profil initial  $T(r, 0) = T_0$  au profil déterminé dans la partie précédente, avec  $T_c < T(r, \Delta t_2) < T_{\text{eb}}$ . La variation d'énergie associée a pour expression

$$\mathcal{E}_d = \iiint_{0 \leq r \leq r_2} \mu c (T(r, \Delta t_2) - T(r, 0)) dV$$

Pour en estimer des bornes inférieure et supérieure, on considère des profils de température uniformes :

a) **borne inférieure**  $T(r, \Delta t_2) \geq T_c$ , donc

$$\mathcal{E}_d \geq \frac{4\pi r_2^3}{3} \mu c (T_c - T_0) = 16,4 \text{ kJ}$$

b) **borne supérieure** de même  $T(r, \Delta t_2) \leq T_{eb}$ , donc

$$\mathcal{E}_d \leq \frac{4\pi r_2^3}{3} \mu c (T_{eb} - T_0) = 21,9 \text{ kJ}$$

c) La moyenne des deux valeurs précédentes vaut

$$\mathcal{E} = 19,2 \text{ kJ}$$

proche de la valeur donnée plus loin dans l'énoncé.

### II.C.2)

Pour le système fermé associé au système ouvert considéré, pendant  $dt$  et en régime permanent

$$dH = D_m dt (h_s - h_e) = D_m dt \Delta h = D_m \ell_v dt$$

car la variation d'enthalpie massique  $\Delta h$  correspond à la vaporisation isobare de l'eau initialement à  $T_{eb}$  après la période de chauffe.

L'eau ne reçoit pas de travail dans le cuiseur. Les transferts thermiques *reçus* par l'eau sont :

- le transfert reçu de la résistance chauffante  $\mathcal{P} dt$  ;
- les transferts thermiques associés aux pertes  $-\mathcal{P}_f$ , où  $\mathcal{P}_f > 0$  est implicitement compté vers l'extérieur, comme le montre l'équation proposée par l'énoncé ;
- les transferts thermiques avec les œufs  $-n \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt$ .

Le premier principe s'écrit alors

$$D_m \ell_v dt = \left( \mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) dt$$

soit la relation

$$D_m \ell_v = \left( \mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)$$

### II.C.3)

En supposant les grandeurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_f$  constante dans le temps la relation intégrée par rapport au temps entre  $t = 0$  et  $\Delta t_2$  s'écrit

$$\ell_v \int_0^{\Delta t_2} D_m dt = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n (\mathcal{E}(\Delta t_2) - \mathcal{E}(0))$$

Or  $\Delta t_2$  représente le temps de cuisson de l'œuf dans le mode de cuisson choisi, et  $\int_0^{\Delta t_2} D_m dt$  représente la masse de vapeur ayant quitté le cuiseur pendant le temps de cuisson, donc la masse d'eau  $m_0$  vaporisée durant la cuisson, ce qui permet d'écrire le bilan précédent sous la forme

$$m_0 \ell_v = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n \mathcal{E}_X ; m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n \mathcal{E}_X}{\ell_v}$$

Le paradoxe apparent soulevé dans l'introduction du problème est contenu dans ce bilan : plus il y a d'œufs, plus le transfert thermique entre la vapeur et les œufs donc la liquéfaction d'une partie de cette vapeur sont importants, ce qui se traduit par un débit de vapeur plus faible en sortie du cuiseur. Le temps de cuisson étant inchangé, la masse d'eau nécessaire est plus faible.

**II.C.4)**

La masse d'eau à introduire est nécessairement positive, d'où

$$\mathcal{P} = \frac{m_0 \ell_v + n \mathcal{E}_d}{\Delta t_2} + \mathcal{P}_f > \frac{n \mathcal{E}_d}{\Delta t_2} + \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\min}$$

Pour  $n = 7$ ,  $\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}$ ,  $\Delta t_2 = 10 \text{ min}$  et  $\mathcal{P}_f \approx 0$

$$\mathcal{P}_{\min} = 222 \text{ W}$$

qui est effectivement inférieur à la puissance du cuiseur.

**II.C.5)**

La relation  $m_0(n)$  est la relation précédente

$$m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2}{\ell_v} - \frac{\mathcal{E}_d}{\ell_v} n$$

Il s'agit d'une relation affine, ce qui est confirmé par le graphique. Elle est caractérisée par :

- une pente  $-\mathcal{E}_d/\ell_v$ , qui dépend du type de cuisson par l'intermédiaire de  $\mathcal{E}_d$ .  $\mathcal{E}_d$  augmente quand on passe de la cuisson coque à la cuisson dur, ce qui correspond à une pente de plus en plus importante, caractéristique que l'on retrouve dans les graphiques.

Pour les œufs cuits dur, la pente vaut  $-5,94 \text{ g}$ , soit

$$\mathcal{E}'_d = 13,4 \text{ kJ}$$

valeur légèrement inférieure à celle donnée dans l'énoncé ( $\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}$ ) pour des œufs de rayon  $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ . L'énergie nécessaire à la cuisson est proportionnelle à la masse, donc au volume de l'œuf, et dans le modèle sphérique au cube de son rayon. Par conséquent

$$\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d} = \left(\frac{r'_2}{r_2}\right)^3 ; r'_2 = \left(\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d}\right)^{1/3} r_2 = 2,2 \text{ cm}$$

- d'ordonnée à l'origine  $\frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2}{\ell_v}$  fonction du mode de cuisson via  $\Delta t_2$ . Ce temps, donc l'ordonnée à l'origine augmente lorsqu'on passe d'une cuisson coque à une cuisson dur, ce qui apparaît également sur le graphique. Pour les œufs cuits dur, on trouve  $126 \text{ g}$ . En négligeant les pertes ( $\mathcal{P}_f \approx 0$ ,  $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$ ) on obtient pour les œufs cuits dur

$$\Delta t'_2 = 814 \text{ s} = 13,5 \text{ min}$$

Le temps est donc sensiblement plus élevé que la valeur théorique. Ceci n'est pas dû à la taille de l'œuf utilisé pour le calibrage, puisque celui-ci est plus petit que celui donné en référence dans l'énoncé, donc cuit plus rapidement. Une partie de l'eau reste sous forme liquide sur les parois du cuiseur et des œufs en fin de cuisson, donc la masse d'eau nécessaire est supérieure à celle calculée avec l'expression précédente, mais cela ne suffit certainement pas à expliquer l'écart.



### 3 Température dans le tunnel de Fréjus (d'après Mines-PC-2016)

#### I.A) Evolutions saisonnières

1) La température moyenne est  $\Theta_0$ .

La température max est  $\Theta_0 + T_0$   
 min  $\Theta_0 - T_0$ .

Proposition de valeur pour  $T_0$  :  $15^\circ\text{C}$ .

2)  $d\Phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{m} dS dt$  où  $\vec{m}$  est la normale à la surface élémentaire, orientée dans le sens où le flux est compté positivement.

$$[j_Q] = \frac{\text{énergie}}{\text{surface} \times T} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T} = MT^{-3}$$

3) Loi de Fourier :  $\vec{j}_Q = -K \vec{\text{grad}} T$ , valable dans un milieu isotrope et pour des variations de température pas trop brutales.

$$[K] = \frac{MT^{-3}}{^\circ L^{-1}} = MLT^{-3}^\circ^{-1}$$

4) 
$$\int_{z+d_3}^z \downarrow d\Phi_Q(z) \quad \delta Q = d\Phi_Q(z) - d\Phi_Q(z+d_3)$$

5) Dans une tranche mésoscopique, il y a beaucoup d'atomes, la notion de température y a donc un sens. Comme elle est fine, on peut supposer la température uniforme à l'intérieur.

6) 1<sup>er</sup> principe appliqué à la tranche:

$$dU = \delta Q = -j_Q(z+d_3) \delta dt + j_Q(z) \delta dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz \delta dt$$

Par ailleurs  $dU = \underbrace{\rho_s \delta dz c_s}_{\substack{\text{capacité} \\ \text{th de la} \\ \text{tranche}}} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} dt}_{\substack{\text{variation} \\ \text{de temp de} \\ \text{la tranche en } z}}$

$$7) \dot{Q} = -K \frac{\partial T}{\partial z} \text{ donc } dU = +K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \delta dt$$

$$d'au \quad \rho_s \delta dz c_s \frac{\partial T}{\partial t} dt = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \delta dt$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{K}{\rho_s c_s}}_D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad D = \frac{K}{\rho_s c_s} \quad [D] = L^2 T^{-1}$$

8) La forme de solution  $T = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$  est ondulatoire :  
la variation de température au sommet se propage dans la roche.

On la remplace dans l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$i\omega = D(-i\underline{k})^2 = -D\underline{k}^2$$

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D} \Rightarrow \underline{k} = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1-i) = \underline{k}' + i\underline{k}''$$

$\underline{k}' \rightarrow$  propagation, vitesse de phase

$\underline{k}'' \rightarrow$  absorption

$$T(z,t) = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}' z) - \underline{k}'' z}$$

$$T(z,t) = \Theta_0 + T_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z}$$

$$9) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z_c} = 0,01$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z_c = \ln(0,01) \Rightarrow z_c = -\sqrt{\frac{2D}{\omega}} \ln(0,01)$$

$$AN: D = \frac{K}{\rho_s c_s} = \frac{3,00}{2,65 \cdot 10^3 \times 8,50 \cdot 10^3} = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = \frac{2\pi}{86400 \times 365} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$z_c = -\sqrt{\frac{2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-7}}{1,99 \cdot 10^{-7}}} \ln(0,01) = 5,32 \text{ m}$$

$z \ll$  altitude de Fréjus, donc la température dans le tunnel est constante.

10) Pour des variations quotidiennes de température,  $\omega = \frac{2\pi}{24h} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ .

$$e^{-\sqrt{\frac{2\omega}{\alpha}} z} = e^{-\sqrt{\frac{2 \cdot 7,27 \cdot 10^{-5}}{1,33 \cdot 10^{-7}}} \cdot 5,32} = 4 \cdot 10^{-77} !$$

Les variations de basse fréquence se propagent plus profondément : le sol se comporte comme un filtre passe-bas.

### I. B) Température d'origine géophysique.

11) Bilan thermique en régime stationnaire sur la tranche  $[z, z+dz]$

$$\frac{dU}{dt} = 0 = j_Q(z)S - j_Q(z+dz)S + P(z)S dz$$

12) On en déduit  $\frac{dj_Q}{dz} = P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$

$$j_Q(z) = -H P_0 e^{-\frac{z}{H}} + cte$$

$$\text{On } j_Q(z=L_c) = -j_m = -H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}} + cte$$

$$\Rightarrow j_Q(z) = H P_0 \left( e^{-\frac{L_c}{H}} - e^{-\frac{z}{H}} \right) - j_m$$

$$j_Q(z) = -K \frac{dT}{dz} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{H P_0}{K} \left( e^{-\frac{z}{H}} - e^{-\frac{L_c}{H}} \right) + \frac{j_m}{K}$$

$$T(z) = \frac{j_m - H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}}}{K} z - \frac{H^2 P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}} + cte.$$

$$T(0) = -\frac{H^2 P_0}{K} + cte = \Theta_0$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{j_m - H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}}}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K} \left( 1 - e^{-\frac{z}{H}} \right) + \Theta_0$$

$$13) j_S = j_Q(z=0) = H P_0 \left( e^{-\frac{L_c}{H}} - 1 \right) - j_m.$$

14) Comparons  $j_m$  et  $HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}}$

$$HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}} = 10 \cdot 10^3 \cdot 2,50 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-\frac{45}{10}} = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$j_m = 0,035 \text{ W/m}^2 \text{ domine}$$

$$\text{Donc } T(z) = \frac{j_m}{k} z + \frac{H^2 P_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + \Theta_0$$

$$T(z=1,7 \text{ km}) = \frac{0,035}{3,00} \cdot 1,7 \cdot 10^3 + \frac{(10^4)^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}}{3,00} \left(1 - e^{-\frac{1,7}{10}}\right) + 0^\circ \text{C}$$

$$= 19,8 + 13,0 + 0 = 32,8^\circ \text{C}$$

$$j_s = HP_0 \left(e^{-\frac{L_c}{H}} - 1\right) - j_m$$

$$= 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \left(e^{-\frac{45}{10}} - 1\right) - 0,035 = -0,060 \text{ W/m}^2$$

Le sol émet de l'énergie thermique.

I. c.) Prise en compte du relief.

15) Si on ne prend pas en compte la source d'énergie thermique dans la roche, l'équation de la chaleur 2D est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T = 0 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \text{ en régime stationnaire}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Supposons que  $T$  est à variables séparables :  $T(x, z) = \beta(x) g(z) + \text{cte}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \beta''(x) g(z) \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \beta(x) g''(z)$$

$$\beta''(x) g(z) = -\beta(x) g''(z) \Rightarrow \underbrace{\frac{\beta''}{\beta}}_{\text{fonction de } x} = -\underbrace{\frac{g''}{g}}_{\text{fonction de } z} = \text{cte}$$

$$\beta'' = \text{cte } f \text{ et } g'' + \text{cte } g = 0$$

Or on veut une solution oscillante en  $x$  et exponentielle en  $z$ , donc  $\text{cte} < 0$

On note  $ct_0 = -h^2$

$$\beta''(x) + h^2 \beta(x) = 0$$

$$g''(z) - h^2 g(z) = 0$$

$$\beta(x) = A \cos hx + B \sin hx$$

$$g(z) = C e^{-hz} + D e^{hz}$$

A, B, C, D constantes

Les conditions aux limites permettent d'avoir  $D=0$  et  $B=0$

$$T(x, z) = K \cos hx e^{-hz} + ct_0, \quad K \text{ constante}$$

$$T(x, z=0) = T_1 \cos hx + T_5 \Rightarrow K = T_1 \text{ et } ct_0 = T_5$$

$$T(x, z) = T_1 \cos(hx) e^{-hz} + T_5$$

La présence de la montagne fait que l'invariance par translation  $x$  supposée dans les parties précédentes n'est pas une hypothèse correcte.

Ici la montagne est encore absente, mais la température de surface est cohérente avec le relief.

16) En présence des sources internes d'énergie thermiques on avait

$$\frac{dj_Q}{dz} = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$\text{à 2D on obtient} \quad \text{div}(\vec{j}_Q) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$-K \Delta T = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}}$$

On cherche une solution sous la forme  $T(x, z) = T_1 \cos(hx) e^{-hz} + \beta(z) + T_5$

$\beta(z)$  s'identifie à la solution étudiée au I.B : elle vérifie

$$\beta''(z) = -\frac{P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}}$$

$$\text{Ainsi bien, } T(x, z) = T_1 \cos hx e^{-hz} + \frac{j_m}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + T_5$$

$$17) T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

En surface on a  $j_s = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$

d'où  $T(x, z=0) = T(x, z=h) + \frac{j_s}{k} h$

$$= T_s + \frac{j_s}{k} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \Theta_0 + \beta z + \underbrace{\frac{j_s h_0}{k}}_{T_1} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$T(x, z) = \underbrace{\Theta_0}_{c_1} + \underbrace{\left(\beta + \frac{\gamma m}{k}\right) z}_{c_2} + \underbrace{\frac{H^2 \rho_0}{k} (1 - e^{-\beta H})}_{c_3} + \underbrace{\frac{j_s}{k} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\beta z}}_{c_3}$$

$\beta = \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$

rem: l'ajout de  $\beta z$  ne perturbe pas car sa dérivée seconde est nulle.

## 4 Physique statistique - d'après Centrale - MP - 2016 - Température dans la couronne solaire

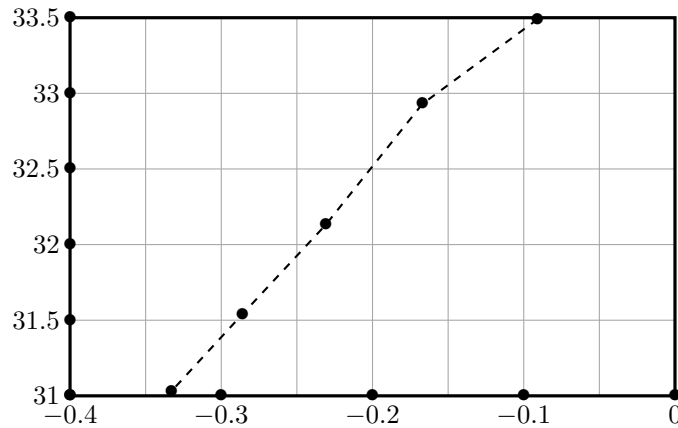
### 4.1 Une atmosphère très étendue

- Dans un champ uniforme  $\vec{g}_s = -g_s \vec{e}_z$ ,  $E_p = mg_s z$  donc  $n_1(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  avec  $H = \frac{k_B T}{mg_s}$ .
- La masse moyenne d'une particule est  $m = \frac{m_e + m_p}{2}$  puisque le milieu, totalement isolé et neutre, contient autant de protons que d'électrons. On prendra  $m \simeq \frac{m_p}{2}$  dans la suite par  $m_p \gg m_e$ .
- $\frac{n_1(R_s)}{n_1(0)} = 10^{-3} = \exp\left(-\frac{R_s}{H}\right)$  donc  $H = \frac{R_s}{3 \ln(10)} = 1,01 \cdot 10^8 \text{ m}$  (l'atmosphère, c'est à dire la couronne solaire, est donc bien étendue, d'une taille d'environ 100 000 K, conformément au graphique) donc  $T = \frac{mg_s H}{k_B} = 1,67 \cdot 10^6 \text{ K}$  (c'est bien l'ordre de grandeur annoncé en introduction).
- On propose maintenant un second modèle plus réaliste pour déterminer la température de la couronne solaire. Pour  $r \geq R_s$  on peut appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$ , conduisant à  $4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM_s$  indépendant de  $r$ , donc en particulier  $r^2 g(r) = R_s^2 g_s$  et  $g(r) = g_s \frac{R_s^2}{r^2}$ .
- Dans un gaz parfait,  $p = n_2 k_B T$  et  $\rho = n_2 m$  d'où l'équation d'équilibre hydrostatique  $\frac{dn_2}{dr} + \frac{mg_s}{k_B T} \frac{R_s^2}{r^2} n_2$  qu'on écrit aussi  $\frac{dn_2}{n_2} = -\frac{R_s^2}{H} \frac{dr}{r^2}$  qui s'intègre en  $\ln \frac{n_2}{n_0} = \frac{R_s^2}{H} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right)$  on  $n_2(r) = n_0' \exp\left(\frac{R_s^2}{H} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right]\right)$ .

6. On recopie le résultat ci-dessus sous la forme  $y = \ln \frac{n_2}{n_0} = \frac{R_s}{H} \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$  où  $x = \frac{r}{R_s}$  ; on complète alors le tableau modifié, en remarquant que  $n_2 = 2n_e$  donc  $y = \ln(n_e) + \text{cte}$  :

$1/x - 1$	$-0,91 \cdot 10^{-1}$	$-1,67 \cdot 10^{-1}$	$-2,31 \cdot 10^{-1}$	$-2,86 \cdot 10^{-1}$	$-3,33 \cdot 10^{-1}$
$\ln(n_e)$	33,49	32,93	32,13	31,54	31,03

et un tracé graphique confirme le modèle ci-dessus :



La pente de la droite tracée est  $q = \frac{2,5}{0,22} \simeq 11,3$  et elle s'identifie à  $\frac{R_s}{H}$  donc  $H \simeq 6,2 \cdot 10^7$  m et on en déduit la température de la couronne,  $T = \frac{mgsH}{k_B} = 1,02 \cdot 10^6$  K. Ce second modèle est donc plus réaliste, et conduit à une température d'environ un million de degrés. On notera que le premier modèle, bien que plus simple, conduit à des résultats tout à fait corrects, comme dans le cas de l'atmosphère terrestre.

## 4.2 Présence de fer hautement ionisé

- L'énergie  $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  du photon incident doit être supérieure à  $E_1$  donc  $\lambda < \lambda_1 = \frac{hc}{E_1} = 3,5$  nm, longueur d'onde au delà du domaine de l'ultraviolet : ce sont des rayons X.
- Les électrons sont monoatomiques dont le théorème d'équipartition associé  $\frac{1}{2}k_B T$  à chacun des trois degrés de liberté de translation donc  $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}k_B T$ .
- L'énergie des ions FEXIII étant estimée à la même température que les électrons, la condition d'ionisation s'écrit  $3k_B T > E_1$  donc  $T > T_1 = \frac{E_1}{3k_B} = 1,4 \cdot 10^6$  K.
- Pour l'image prise à la longueur d'onde de 19,5 nm, les régions les plus émissives sont riches en FEXII donc  $\log(T) \simeq 6,20$  ou  $T \simeq 1,6 \cdot 10^6$  K ; pour l'image prise à la longueur d'onde de 28,4 nm, les régions les plus émissives sont riches en FEXV donc  $\log(T) \simeq 6,35$  ou  $T \simeq 2,2 \cdot 10^6$  K.
- Comme le montre la question précédente, l'étude de l'émission du fer à différents états d'ionisation permet d'estimer la répartition de la température de la surface solaire.
- Le spectre d'émission de l'hydrogène comporte des raies peu intenses (car associées à l'émission par des atomes isolés) et essentiellement un spectre continu, thermique (dû justement au grand nombre d'atomes d'hydrogène). Il est également possible que l'hydrogène n'ait pas de raies pour ces températures.

## 4.3 Des raies d'émission très larges

- C'est l'effet Doppler-Fizeau.
- $\nu - \nu_0 = -\frac{v_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{u}$  donc  $\langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle_i = \frac{v_0^2}{c^2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle_i$  ou enfin  $\Delta\nu = \frac{v_0}{c} \sqrt{\langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle_i}$ .

15. Pour le système monoatomique étudié, l'énergie cinétique moyenne  $\frac{1}{2}m_{\text{Fe}} \langle \vec{v}^2 \rangle_i$  s'identifie à  $\frac{3}{2}k_B T$  (encore à cause du théorème d'équipartition) donc  $\langle \vec{v}^2 \rangle_i = \frac{3k_B T}{m_{\text{Fe}}}$ .
16. Puisque la distribution est isotrope,  $\langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle_i$  ne dépend pas du vecteur unitaire  $\vec{u}$  et vaut par exemple  $\langle (\vec{v} \cdot \vec{e}_x)^2 \rangle_i = \langle v_x^2 \rangle_i$  tandis que  $\langle \vec{v}^2 \rangle_i = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle_i$ , ces trois contributions étant égales. Il reste donc  $\langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle_i = \frac{1}{3} \langle \vec{v}^2 \rangle_i$ .
17. De ce qui précède on déduit  $\Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\text{Fe}}}}$ . Comme pour  $\Delta\nu \ll \nu_0$  on peut déduire de  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  la relation  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ , il vient  $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\text{Fe}}}}$ .
18.  $T = \frac{m_{\text{Fe}} c^2}{k_B} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2 = 1,9 \cdot 10^6 \text{ K}$  avec  $m_{\text{Fe}} = \frac{M_{\text{Fe}}}{N_A}$ .
19. Le FEXIV est prépondérant pour  $\log(T) = 6,3$  donc  $T = 2,0 \cdot 10^6 \text{ K}$ , ordre de grandeur compatible avec l'évaluation de l'effet Doppler-Fizeau ci-dessus.