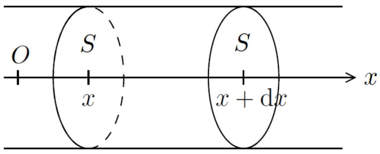
TD n°18 - Transferts thermiques Correction Ex 8

1 Ailette de refroidissement

A savoir...

Exercice très proche de l'exercice-type de la fin du cours. L'application est ici différente du banc Kofler. Il est néanmoins intéressant car très classique et la fin (question 3) mérite d'être traitée.

1. On considère comme système fermé une tranche de barre située entre x et $x + \mathrm{d}x$.



Pendant une durée $\mathrm{d}t$, son énergie interne varie de

$$d(\delta U) = \delta^2 Q$$

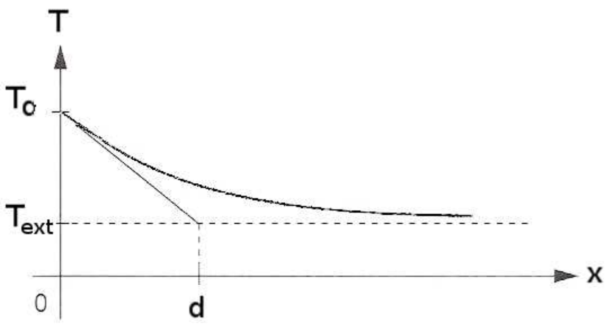
d'après le premier principe, car le volume ne varie pas et $\delta^2 W = 0$.
En régime stationnaire, $d(\delta U) = \delta U(t + dt) - \delta U(t) = 0$.
De plus, $\delta^2 Q = \Phi(x)dt - \Phi(x+dx)dt - 2\pi Rh(T(x) - T_{ext})dxdt = \frac{\mathrm{d}j_{th}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,\pi R^2 + h\,(T\,(x) - T_{ext})\;2\pi R\,\mathrm{d}x dt$
La loi de Fourier donne $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}} T = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e}_x$ (car T ne dépend que de x) d'où $\frac{\mathrm{d}j_{th}}{\mathrm{d}x} = -\lambda \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}$.
Ainsi, $0 = +\lambda \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} R - 2h\,(T\,(x) - T_{ext})$, soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{d^2}T = -\frac{1}{d^2}T_{ext}}$ avec $\boxed{d = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}}$ $= 48\,\mathrm{cm}$.

2. On résout alors l'équation différentielle gérant l'évolution spatiale de T :

$$T(x) = A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{d}} + B\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} + T_{ext}$$

Déterminons les constantes d'intégration en utilisant les conditions aux limites.
En considérant une tige infinie, T doit rester bornée quand $x \to \infty$ donc $A = 0$.

D'autre part, $T(x = 0) = B + T_{ext}$ et $T(x = 0) = T_0$ d'où $\boxed{T(x) = (T_0 - T_{ext})\;\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} + T_{ext}}$.



La température de l'ailette tend vers celle du milieu environnant lorsque la distance x par rapport au dispositif à "refroidir" est très grande devant la distance caractéristique d.

Remarque

En pratique, la longueur L de la barre n'est pas telle que $L \gg d$ donc on ne peut pas la considérer comme infinie. Il faut alors revenir sur la détermination des constantes d'intégration, avec comme nouvelle condition aux limites $\Phi\left(x = L^-\right) = \Phi\left(x = L^+\right)$ d'où $j_{th}(x = L) = h\left(T(x = L) - T_{ext}\right)$ avec $j_{th}(x = L) = -\lambda \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L}$ soit $\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L} = -\frac{h}{\lambda}\left(T(x = L) - T_{ext}\right)$...

3. (a) Le flux thermique évacué par l'ailette de refroidissement vers l'atmosphère s'obtient en intégrant le flux conducto-convectif sur toute la surface latérale de la barre :

$$\Phi_c = \int_0^\infty h\left(T(x) - T_{ext}\right) 2\pi R \,\mathrm{d}x = 2\pi R h\left(T_0 - T_{ext}\right) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} \,\mathrm{d}x = 2\pi R h d\left(T_0 - T_{ext}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_c = \frac{\lambda}{d}\pi R^2 \left(T_0 - T_{ext}\right)} \text{ car } d = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$$

Remarque

On peut aussi utiliser la loi de Fourier en $x = 0$. En effet, en régime stationnaire, les deux flux thermiques sont identiques puisque l'ailette cède à l'air ambiant tout ce qu'elle reçoit $\Phi_c(x = 0) = -\lambda \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} T\right)_{x=0} . \pi R^2 \vec{e}_x = -\lambda \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} \pi R^2 = \frac{\lambda}{d}\left(T_0 - T_{ext}\right) \pi R^2$.

(b) En l'absence d'ailette, le flux aurait été : $\boxed{\Phi'_c = h\left(T_0 - T_{ext}\right) \pi R^2}$.

(c) On en déduit $\boxed{\frac{\Phi_c}{\Phi'_c} = \frac{\lambda}{hd}} = 97$ d'où l'intérêt des ailettes de refroidissement !

(utilisées notamment dans les moteurs ou dans les composants informatiques, plus souvent sous la forme de plaques que de barres).