14

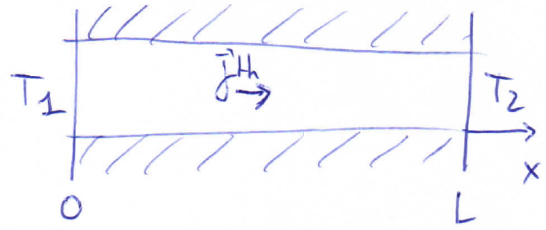
Interrogation de cours n°19

1 Diffusion thermique

• On s'intéresse à une barre cylindrique de section S et de longueur L, calorifugée latéralement. On suppose que depuis un temps très long, la température des deux extrémités est maintenue aux valeurs suivantes : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$, avec $T_1 > T_2$.

Démontrer l'expression de la température $T(x)$ dans la barre en régime stationnaire.

Calculer le flux thermique dans la barre et montrer qu'on peut définir une résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique.



En régime stationnaire : $\Delta T = 0$ (en l'absence de sources et puits.)

$\Rightarrow T = ax + b$ et avec les conditions aux limites : $T = \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + T_1$.

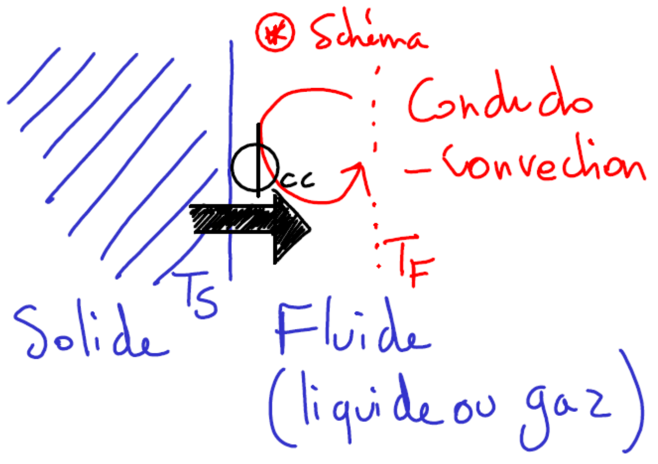
$\Phi_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -\lambda_{th} \frac{dT}{dx} S = \lambda_{th} \frac{(T_1 - T_2)S}{L}$

2

$\Rightarrow \Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$ avec $\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda_{th} S}}$

Analogie $I = \frac{V_1 - V_2}{R}$ avec $R = \frac{L}{\gamma S}$

• Énoncer la loi de Newton de la conducto-convection. On fera un schéma et on précisera l'ordre de grandeur et l'unité de la grandeur h introduite.



2

loi de Newton :

$\Phi_{cc} = j_{cc} S$
$= hS(T_S - T_F)$

avec

$h_{gaz} \simeq 10 \ W.m^{-2}.K^{-1}$ valeurs

$h_{liq} \simeq 100 \ \underbrace{W.m^{-2}.K^{-1}}_{\text{unité}}$

2 Thermodynamique statistique

- Énoncer sans démonstration la loi de l'hydrostatique avec un axe vertical ascendant.

0,5

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

- Retrouver par le calcul l'expression de la variation de pression avec l'altitude dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

Modèle de l'atmosphère isotherme : $\begin{cases} T = \text{cste} \\ \text{gaz parfait de masse molaire } M \end{cases}$

Le gaz parfait est compressible et :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT}g \xrightarrow{T=\text{cste}} \boxed{P = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}}$$

P_0 : pression en $z=0$

1,5

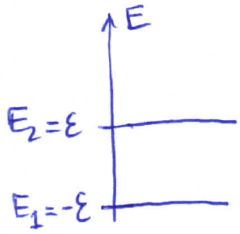
(sachant que $R = \mathcal{N}_A k_B$, on peut aussi écrire pour 1 particule $P = P_0 e^{-\frac{m^* g z}{k_B T}}$ où $M = \mathcal{N}_A m^*$, m^* : masse d'une particule.)

• Qu'appelle-t-on le facteur de Boltzmann et dans quel cadre peut-on l'utiliser ? Citer un exemple concret.

1,5

A $T = \text{cste}$ et pour des particules indépendantes (sans interaction), la probabilité de trouver une particule à l'état d'énergie E est proportionnelle à $\boxed{\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)}$

• On s'intéresse au cas particulier d'un système ne présentant que deux niveaux quantiques non dégénérés. Afin de simplifier les notations, nous poserons $E_1 = -\mathcal{E}$ et $E_2 = +\mathcal{E}$ et $\Delta = E_2 - E_1 = 2\mathcal{E}$.
Calculer les probabilités d'occupation et les populations moyennes des deux états. Tracer et commenter les variations des pourcentages d'occupation en fonction de la température T.



$$p(E_1) = \frac{e^{\varepsilon/k_BT}}{Z} \; ; \; p(E_2) = \frac{e^{-\varepsilon/k_BT}}{Z} \quad \text{avec } Z = e^{\varepsilon/k_BT} + e^{-\varepsilon/k_BT} = 2\cosh(\varepsilon/k_BT).$$

$$\langle N_1 \rangle = \frac{N e^{\varepsilon/k_BT}}{Z} \quad \text{et} \quad \langle N_2 \rangle = \frac{N e^{-\varepsilon/kT}}{Z}$$

2,5

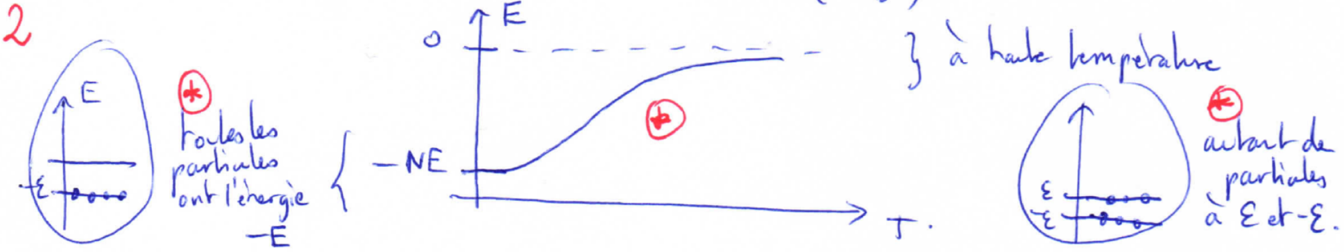
toutes les particules sont dans le niveau E_1.

↳ les 2 niveaux ont autant de particules.

• Calculer l'énergie moyenne du système à deux niveaux dans le cas de N particules présentes. Tracer et commenter les variations de l'énergie E en fonction de la température T.

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\varepsilon N e^{\varepsilon/k_BT}}{Z} + \frac{\varepsilon N e^{-\varepsilon/k_BT}}{Z} = -\frac{N\varepsilon 2\sinh(\varepsilon/k_BT)}{2\cosh(\varepsilon/k_BT)} = \boxed{-N\varepsilon \tanh\left(\varepsilon/k_BT\right)}$$

2



• Calculer la capacité thermique dans le cas du système à deux niveaux et tracer et commenter les variations de la capacité C en fonction de la température T.

$$C = \frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dT}$$

$$C = -N\varepsilon\left(\frac{-\varepsilon}{k_BT^2}\right)\left[1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)\right]$$

$$\boxed{C = \frac{N\varepsilon^2}{k_BT^2}\left[1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)\right]}$$

2