

MP2 – DS n°6bis (CCS-Mines)
Samedi 2 mars 2024

1 Etude d'une installation nucléaire (REP)

Ce sujet comporte un document réponse à rendre avec la copie. Les données numériques utiles sont fournies en fin d'énoncé.

La France compte 19 centrales nucléaires en exploitation, dans lesquelles tous les réacteurs (58 au total) sont des réacteurs à eau pressurisée. Actuellement, ces installations produisent près de 80% de l'électricité produite en France. Chaque centrale est soumise à un référentiel de normes de sûreté et de sécurité évoluant en fonction des enseignements des incidents passés nationaux ou internationaux.

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects liés au fonctionnement d'une centrale nucléaire REP, ainsi que plusieurs dispositions prises en matière de sûreté nucléaire : contrôle des rejets de la centrale et surveillance sismique d'un site nucléaire.

I Circuit secondaire et enrichissement de l'uranium

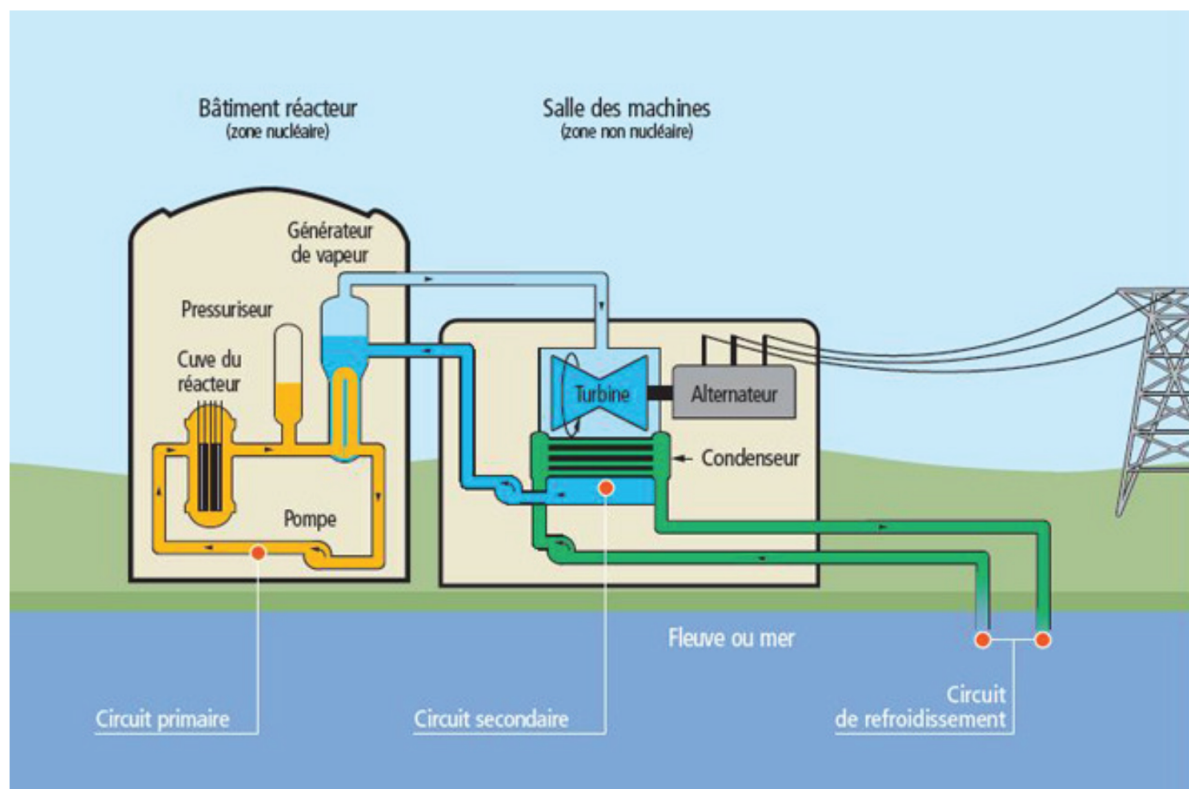


Figure 1 Schéma global d'une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir figure 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert

d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de 5000 m^2 (réseau de tubulures).

I.A – Description du circuit secondaire de la centrale

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique $P_e = 900 \text{ MW}$. Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau.

I.A.1) Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température T_{ch} et T_{fr} ($T_{\text{fr}} < T_{\text{ch}}$).

- Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement de Carnot associé à ce cycle.
- Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant $T_{\text{ch}} = 543 \text{ K}$ et $T_{\text{fr}} = 303 \text{ K}$, les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.
- Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique $P_t = 2785 \text{ MW}$, que vaut le rendement thermodynamique réel de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

I.A.2) Cycle de Rankine

L'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la figure 2)

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55 \text{ bar}$ jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état B) ;
- de B à C : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression P_2 à la pression $P_1 = 43 \text{ mbar}$;
- en C , le fluide est diphasé ;
- de C à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

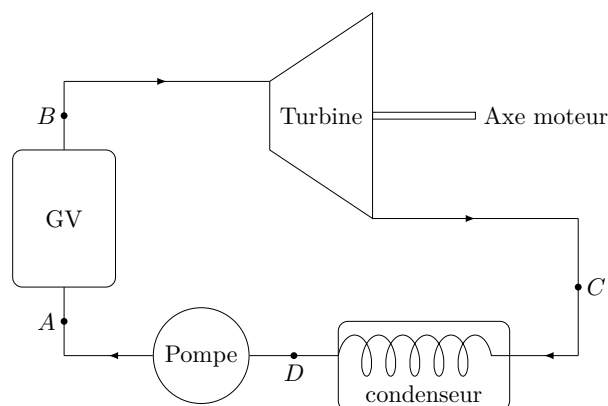


Figure 2 Cycle de Rankine

- Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P, v) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes T_B , T_D et T_{critique} , cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points A , A' , B , C et D .
- D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points A' , B et D ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.
- Dans le document réponse figure le diagramme enthalpique (P, h) de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points A' , B , C , D du cycle. On explicitera la méthode.
- Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques. Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q .
- Exprimer le travail massique w_{BC} reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique, en s'aidant du diagramme enthalpique.

f) Exprimer le transfert thermique massique $q_{AA'}$ reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température T_A à la température $T_{A'}$ dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique : on considèrera $T_A \approx T_D$.

g) Exprimer le transfert thermique massique $q_{A'B}$ reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.

h) Calculer alors le rendement de Rankine de l'installation. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.

i) Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente de la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

I.A.3) Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir figure 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine « haute pression » puis dans une turbine « basse pression ». D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un « surchauffeur ». Les transformations sont maintenant modélisées par

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55$ bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B) ;
- de B à C' : détente adiabatique réversible dans la turbine « haute pression », de la pression P_2 à la pression $P_3 = 10$ bar ;
- de C' à B' : échauffement isobare à la pression P_3 , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B') ;
- de B' à C'' : détente adiabatique réversible dans la turbine « basse pression », de la pression P_3 à la pression $P_1 = 43$ mbar ;
- de C'' à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

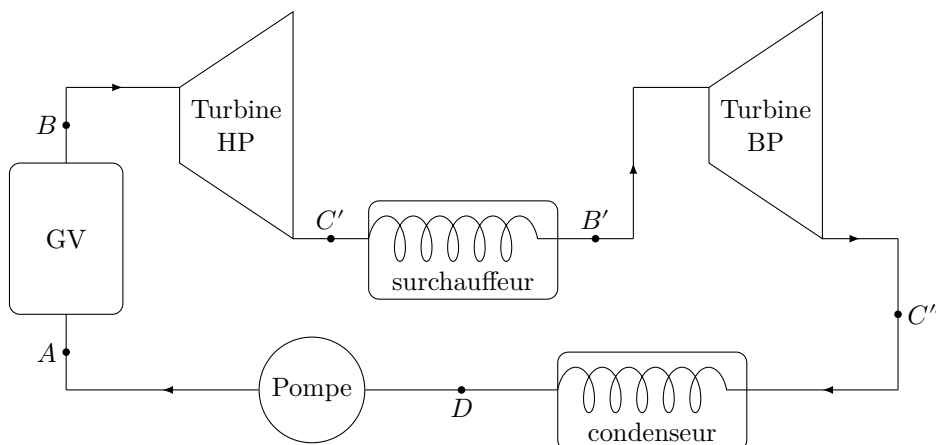


Figure 3 Cycle de Rankine avec une détente étagée

- a) Placer les nouveaux points C' , B' , C'' sur le diagramme enthalpique du document réponse.
- b) Comparer les titres massiques en vapeur des points C' et C'' au titre massique en vapeur du point C . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- c) À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer le nouveau rendement du cycle. Commenter.

I.B – Enrichissement de l'uranium par centrifugation

Certains noyaux sont susceptibles de fissionner sous l'effet d'un bombardement de neutrons « lents » (vitesse de $2,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$) : on parle alors de noyaux fissiles. Le seul isotope fissile naturel est l'uranium-235. Dans les réacteurs REP, on privilégie cette fission par neutrons lents. Or l'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore alors le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel avec de l'uranium-235.

Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium UF_6 . Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir en jusqu'à la teneur souhaitée (de 3 à 5%). Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous forme de pastilles.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon $R = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $h = 5 \text{ cm}$, tournant autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = 50\,000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Le gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On note \mathcal{R}_0 un référentiel lié au laboratoire, d'axe vertical (Oz). On suppose que \mathcal{R}_0 est galiléen. On considère, dans un premier temps, que le cylindre est rempli d'un gaz, supposé parfait, constitué de molécules identiques de masse m . L'ensemble est à la température $T = 353 \text{ K}$.

Soit un volume élémentaire de gaz $d^3\tau$ autour d'un point M situé à la distance r de l'axe (Oz) de la centrifugeuse. On note $P(M) = P(r)$ le champ de pression dans le gaz, $\rho(r)$ la masse volumique du gaz et $n^*(r)$ sa densité particulaire.

I.B.1) Soit \mathcal{R}_1 le référentiel lié au cylindre en rotation. Est-il galiléen ? Pourquoi ?

I.B.2) Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en équilibre dans le référentiel \mathcal{R}_1 . On exprimera la résultante élémentaire des forces de pression sous la forme de son équivalent volumique (sans démonstration): $d^3\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}P}d^3\tau$

I.B.3) Évaluer numériquement l'accélération d'entraînement subie par la particule de fluide en rotation. Justifier que, par la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.

I.B.4) Dédire de la condition d'équilibre relatif de la particule de fluide la répartition $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On notera $n^*(0)$ la densité particulaire sur l'axe de rotation et on donnera l'expression de $n^*(r)$ en fonction de $n^*(0)$, m , T , k_B , r et ω .

I.B.5) Montrer que la répartition $n^*(r)$ ainsi trouvée obéit à une statistique de Maxwell-Boltzmann, avec une énergie potentielle E_p dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

I.B.6) On donne, en figure 4, l'allure des densités particulières $n_1^*(r)$ et $n_2^*(r)$ des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r . En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium : on explicitera le protocole qui permet d'obtenir le gaz enrichi en ^{235}U .

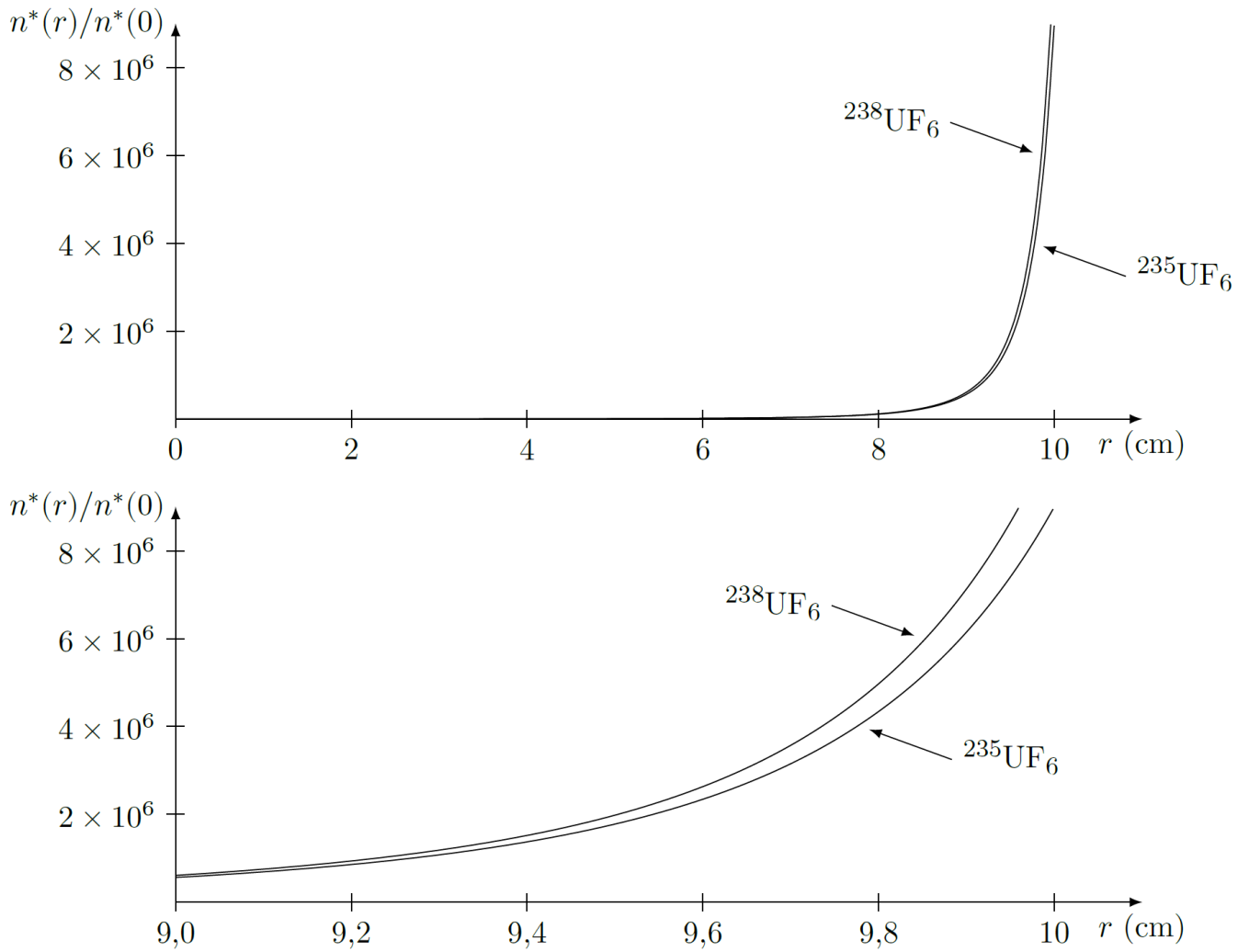


Figure 4 Densités particulières des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r

Données

Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau

θ (°C)	P_{sat} (bar)	Liquide saturant			Vapeur saturante sèche		
		v_l (m ³ ·kg ⁻¹)	h_l (kJ·kg ⁻¹)	s_l (J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)	v_v (m ³ ·kg ⁻¹)	h_v (kJ·kg ⁻¹)	s_v (J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,03505	2788,46	5,9226

θ température

s_l entropie massique du liquide saturant

P_{sat} pression de vapeur saturante

v_v volume massique de la vapeur saturante sèche

v_l volume massique du liquide saturant

h_v enthalpie massique de la vapeur saturante sèche

h_l enthalpie massique du liquide saturant

s_v entropie massique de la vapeur saturante sèche

Capacité thermique massique isobare de l'eau

$$c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Masses atomiques

Atome	F	²³⁵ U	²³⁸ U
Masses atomiques (u)	19,0	235,0	238,0

Constantes diverses

Unité de masse atomique unifiée

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$F = 96500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$$

On prendra

$$0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$$

Formulaire

Expression du gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

• • • FIN • • •

2 Agitation thermique - Formule de Nyquist

I.A – L'agitation thermique dans l'atmosphère

I.A.1) On décrit le champ de pression d'une atmosphère isotherme de température T dans un champ de pesanteur uniforme \vec{g} . Le modèle de fluide est celui du gaz parfait ; la masse molaire du gaz est M . À l'altitude nulle $z = 0$, la pression est P_0 , la densité volumique de molécules est N_0 .

a) Établir, à partir de l'équilibre d'un domaine d'atmosphère, l'expression de la pression $P(z)$.

b) En déduire l'expression de la densité volumique $n_v(z) = N_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ en fonction de l'altitude, où m est la masse d'une molécule. Que représente le terme mgz pour une molécule ?

I.A.2) Déduire de la loi précédente une hauteur caractéristique H de l'atmosphère, en fonction de k_B , T , m et g . Quelle vitesse v_ℓ atteindrait une molécule en chute libre tombant de la hauteur H sans vitesse initiale ? Comparer v_ℓ à la vitesse quadratique moyenne v_q donnée par $v_q^2 = \frac{3k_B T}{m}$ de cette molécule dans un gaz à la température T .

I.A.3) Les molécules de l'atmosphère gardent une agitation incessante. Pourtant, l'expérience de la vie courante montre qu'une balle qu'on lance finit par s'immobiliser, après éventuellement quelques rebonds.

Y a-t-il vraiment immobilisation absolue de la balle ?

I.B – L'agitation thermique dans un circuit électrique

I.B.1) Dans un métal à la température T , les électrons libres forment un gaz circulant dans le réseau cristallin des cations. Peut-on utiliser la physique non relativiste pour décrire les électrons libres à température ambiante ?

L'agitation thermique des électrons libres est responsable de fluctuations de l'intensité électrique traversant un circuit, appelées bruit thermique. Ainsi, même en l'absence de générateur, il apparaît dans un circuit fermé comportant une résistance, à toute température T non nulle, une intensité $i(t)$ et une tension $u(t)$ fluctuantes. Il s'agit ici d'établir l'expression, appelée formule de NYQUIST, de la valeur efficace de cette tension d'origine thermique.

I.B.2) Soit le circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L (figure 2).

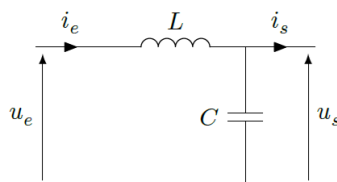


Figure 2 Circuit LC

Établir deux relations indépendantes entre les grandeurs temporelles u_e , u_s , i_e , i_s et leurs dérivées.

I.B.3) Pour étudier les fluctuations de tension et d'intensité liées au bruit thermique d'une résistance, on place à la suite de celle-ci une ligne électrique bifilaire constituée de deux fils parallèles. Cette ligne est repérée par l'axe Ox . On considère dans cette question une portion de ligne de longueur infinitésimale dx et on note respectivement λ et γ les inductance et capacité linéiques de cette ligne (figure 3).

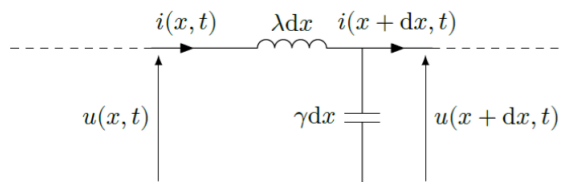


Figure 3 Schéma électrique d'une portion de ligne de longueur dx

- a) Établir deux équations aux dérivées partielles indépendantes reliant les fonctions $u(x, t)$ et $i(x, t)$, λ et γ .
- b) En déduire l'équation de propagation pour la seule fonction $u(x, t)$. Donner l'expression de la célérité c_e des ondes en fonction de λ et γ .
- c) Soient $\underline{u}(x, t) = \underline{U} \exp i(\omega t - kx)$ et $\underline{i}(x, t) = \underline{I} \exp i(\omega t - kx)$ les solutions harmoniques en notation complexe. Établir l'équation de dispersion de la ligne. On appelle résistance caractéristique de la ligne le rapport $R_c = \underline{U}/\underline{I}$. Exprimer λ et γ en fonction de la célérité c_e et de R_c .

I.B.4) La ligne précédente a pour longueur D . Elle est fermée à ses deux extrémités par un court-circuit (figure 4) après avoir été alimentée par un générateur de tension.

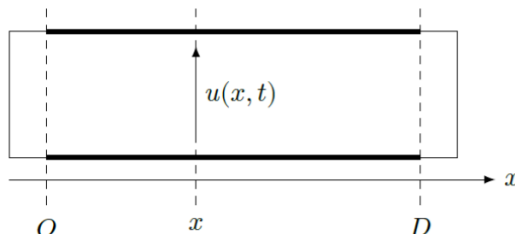


Figure 4 Ligne court-circuitée

- a) On cherche les solutions $u(x, t)$ pouvant exister sur la ligne fermée sous forme de modes propres

$$u(x, t) = U(x) \cos(\omega t)$$

Établir l'équation différentielle régissant $U(x)$.

Montrer, en précisant les conditions aux limites, que les solutions s'écrivent

$$U(x) = U_{0n} \sin(K_n x)$$

où K_n est proportionnel à un entier n appelé l'ordre du mode et U_{0n} une constante quelconque. En déduire les pulsations ω_n des modes propres en fonction de n , D et c_e .

b) Dans un intervalle de fréquence de largeur Δf , quel est le nombre N de modes propres ? On supposera que Δf est suffisamment grand pour que N soit grand devant 1 ($N \gg 1$).

c) Soit $u_n(x, t)$ le mode propre d'ordre n d'amplitude U_{0n} . Quelle est l'expression de l'intensité $i_n(x, t)$ du mode d'ordre n , en fonction de U_{0n} , n , R_c , D et ω_n ? On prendra l'intensité nulle pour $U_{0n} = 0$.

I.B.5)

a) Donner l'expression de l'énergie $de_n(x, t)$ emmagasinée dans le tronçon de ligne entre les abscisses x et $x + dx$ pour le mode d'ordre n , en fonction de U_{0n} , γ , λ , K_n et ω_n . Exprimer sa moyenne temporelle $\langle de_n \rangle(x)$. Commenter.

b) En déduire l'énergie moyenne $\langle E_n \rangle$ du mode d'ordre n dans la ligne entière en fonction de U_{0n} , R_c , c_e et D .

I.B.6) Les modes propres sont générés par l'agitation thermique dans la résistance branchée à l'entrée de la ligne, qui est ensuite remplacée instantanément par un court-circuit. Le transfert d'énergie entre la résistance et la ligne est réalisé lorsque la résistance caractéristique R_c de la ligne est égale à la résistance R . Dans ce cas, on montre qu'en moyenne, l'énergie du mode d'ordre n est $\langle E_n \rangle = k_B T$.

a) En déduire l'expression du carré de la valeur efficace $u_{\text{eff}n}^2(x)$ de la tension du mode d'ordre n au point x , en fonction de R , D , c_e , k_B et T . Montrer que $u_{\text{eff}n}^2(x) = U_{\text{eff}n}^2 \sin^2(K_n x)$ où $U_{\text{eff}n}$ est une constante, appelée valeur efficace du mode n , qu'on déterminera.

b) Les carrés des valeurs efficaces des différents modes s'ajoutent. En déduire que la valeur efficace U_{eff} correspondant aux modes dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle de fréquence de largeur Δf est donnée par la formule de NYQUIST

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{4 k_B T R \Delta f}$$

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602\,176\,621 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022\,140\,86 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626\,070\,040 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
	$\hbar = h/2\pi = 1,054\,571\,800 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109\,383\,56 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse de l'atome d'hydrogène	$m_H = 1,673\,72 \times 10^{-27} \text{ kg}$

La constante des gaz parfaits R est liée à la constante de Boltzmann k_B et à la constante d'Avogadro \mathcal{N}_A par $R = \mathcal{N}_A k_B$.

Formulaire

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$$

Moyenne d'une fonction

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) dt$$

Moyenne quadratique (ou valeur efficace)

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

Composition des incertitudes

$$\text{Si } f = g^\alpha h^\beta \text{ et } g \text{ et } h \text{ sont indépendants, alors } \frac{\delta f}{f} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

• • • FIN • • •

3 Etude des performances thermiques d'un isolant

II.1 - Étude analytique du régime permanent

On s'intéresse tout d'abord aux transferts thermiques dans le composite (**figure 2**) lorsque la température intérieure $T(t, x = 0) = T_{int} = 20 \text{ °C}$ et la température extérieure $T(t, x = L) = T_{ext} = 5 \text{ °C}$. On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$.

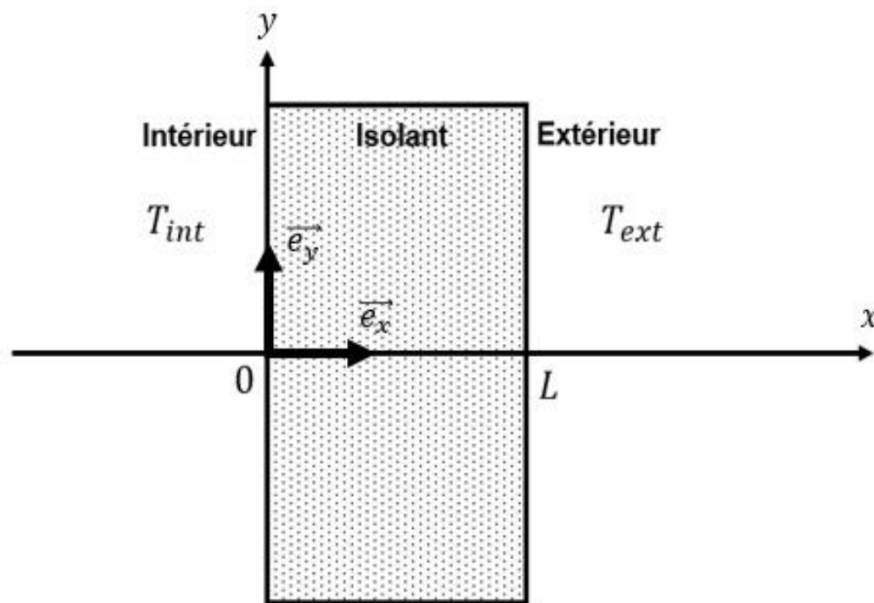


Figure 2 - Schématisation du problème

- Q1.** Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant x ?
- Q2.** Donner, sans démontrer, l'équation de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera T la température, $\lambda_{isolant}$ la conductivité thermique de l'isolant, ρ la masse volumique et c_p la chaleur spécifique à pression constante, i.e. la capacité thermique massique. La simplifier en prenant en compte l'hypothèse de la **question Q1**.
- Q3.** Donner les conditions aux limites, $T(t > 0, x = 0)$ et $T(t, x = L)$, et les conditions initiales $T(t = 0, x > 0)$ et $T(t = 0, x = 0)$ de la fonction $T(t, x)$.
- Q4.** Déterminer l'expression de la température en régime permanent $T(x)$ en fonction des variables x , T_{ext} , T_{int} et L .
- Q5.** Proposer une définition de la résistance thermique et en donner la formule. En déduire l'expression de la résistance thermique surfacique r_{th} de l'isolant en fonction de l'épaisseur L de la plaque et de la conductivité thermique de l'isolant $\lambda_{isolant}$.

- Q6.** Quelle doit être la valeur de l'épaisseur du composite pour obtenir une résistance thermique surfacique de $r_{th} = 3,15 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$? On prendra $\lambda_{isolant} = 0,037 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.2 - Étude numérique du régime transitoire

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \text{ où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

- Q7.** Exprimer la diffusivité thermique k_{th} en fonction de la conductivité thermique $\lambda_{isolant}$, de la masse volumique ρ et de la chaleur spécifique massique à pression constante c_p .

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, représentant l'épaisseur de l'isolant, en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial dx (**figure 3**). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

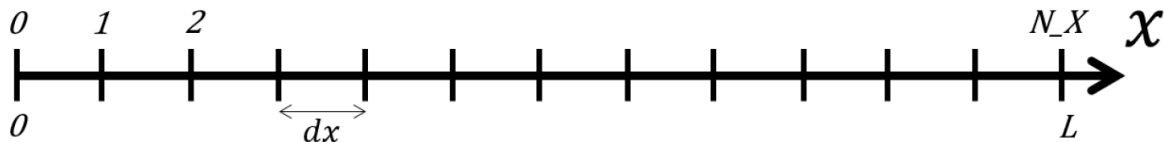


Figure 3 - Discretisation de l'isolant selon x

- Q8.** Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du (i) -ème point.
- Q9.** À l'aide de la formule de Taylor-Young, **équation (1)**, exprimer :
- $T(t + dt, x)$, au premier ordre par rapport à t , dt étant l'incrément temporel ;
 - $T(t, x - dx)$, au second ordre par rapport à x ;
 - $T(t, x + dx)$, au second ordre par rapport à x .

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + o((x - a)^2) \quad (1)$$

- Q10.** En déduire une expression de $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$ en fonction de dx , $T(t, x)$, $T(t, x - dx)$ et $T(t, x + dx)$.

La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée : T_i^n .

- Q11.** En reformulant le résultat des **questions Q9** et **Q10**, déterminer une relation entre :

- T_i^{n+1} , T_i^n , $\frac{\partial T(t, x)}{\partial t}$ et dt ;
- T_{i+1}^n , T_{i-1}^n , T_i^n , $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$ et dx .

- Q12.** À partir des **questions Q2** et **Q11**, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt \cdot k_{th} \left(\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n. \quad (2)$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

- Q13.** Donner l'**Instruction 1** permettant de définir la diffusivité thermique k_{th} .

- Q14.** L'équation (2) est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \dots N_X\}$?
- Q15.** Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les Instruction 2.1 et Instruction 2.2. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0; t_{max}]$.
- Q16.** Dédurre de la question Q3 les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.
- Q17.** À partir de la question Q12, compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1          #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000  #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100      #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5        #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]      #Diffusivité thermique

#Discretisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]

#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]

```

Algorithme 1 - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

On donne en **figure 4** le profil de température dans le composite à plusieurs instants.

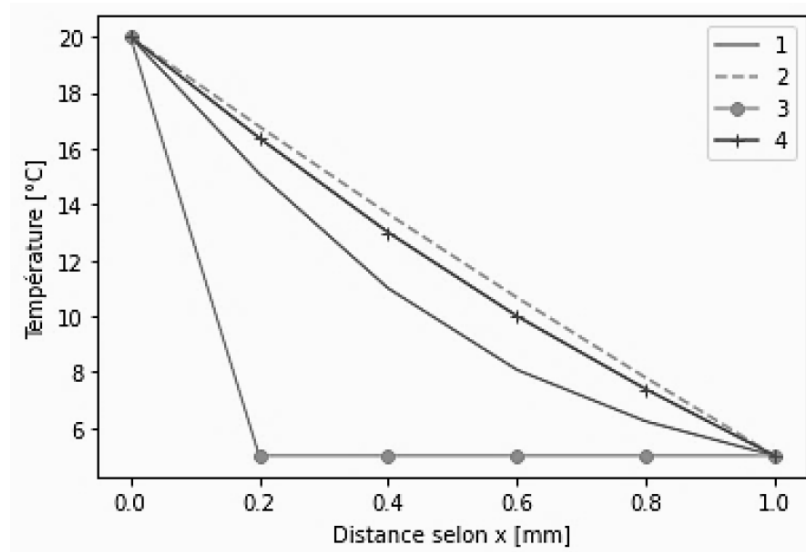


Figure 4 - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

Q18. Associer à chaque courbe de la **figure 4** les instants de la liste suivante :

$$t = [0 \text{ s}, 6 \text{ 000 s}, 12 \text{ 000 s}, 18 \text{ 000 s}].$$

Q19. Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

ANNEXE

Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- `np.linspace(start, stop, N point)` :
 - description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
 - argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
 - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.linspace(1, 4, 5)</code>	<code>[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]</code>

- `np.zeros(i)` :
 - description : renvoie un tableau de taille `i` rempli de zéros.
 - argument d'entrée : un scalaire
 - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.zeros(5)</code>	<code>[0, 0, 0, 0, 0]</code>

- `np.array(liste)` :
 - description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
 - argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
 - argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
<code>np.array([4, 3, 5])</code>	<code>[4, 3, 5]</code>

- `A[i, j]` :
 - description : retourne l'élément $(i + 1, j + 1)$ de la matrice `A`. Pour accéder à l'intégralité de la ligne $i + 1$ de la matrice `A`, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne $j + 1$ de la matrice `A`, on utilise la syntaxe `A[:, j]`
 - argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau `A`
 - argument de sortie : l'élément $(i + 1, j + 1)$ de la matrice `A`

Commande	Résultat
<code>A = np.array([[1, 2, 1], [4, 6, 3], [1, 3, 8]])</code> <code>A[1, 2]</code>	3

- chaîne.split(motif) :

- description : divise une chaîne de caractères en une liste ordonnée de sous-chaînes, place ces sous-chaînes dans un tableau et retourne le tableau. La division est effectuée en recherchant un motif
- argument d'entrée : motif
- argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
A = 'azert yuiop' A.split(' ')	['azert', 'yuiop']

II. - Bibliothèque MATPLOTLIB.PYLOT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande :
`import matplotlib.pyplot as plt.`

- description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y. Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché
- argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :

Description	Ligne continue	Ligne traitillée	Marqueur rond	Marqueur plus
Symbole S	-	--	o	+

Valeurs possibles pour C (couleur) :

Description	bleu	rouge	vert	noir
Symbole C	b	r	g	k

- argument de sortie : un graphique

```
x= np.linspace(3,25,5)
y=sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```

FIN