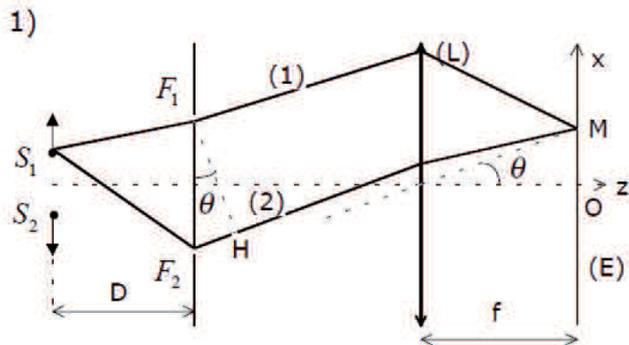


## Correction - DM n°19 : Optique ondulatoire

### 1 Fentes d'Young avec sources en mouvement



Les 2 sources étant différentes, il y a incohérence spatiale : on peut donc se contenter de sommer les éclaircements donnés par chaque source. Pour chacune d'elles, il y a interférence à travers les 2 fentes : nous allons calculer la différence de marche entre les rayons (2) et (1), et en déduire le résultat correspondant à la deuxième source.

• On a :

$$\delta_{2/1} = (S_1F_2M) - (S_1F_1M) = (S_1F_2) - (S_1F_1) + (F_2H) = (S_1F_2) - (S_1F_1) + a \sin \theta = (S_1F_2) - (S_1F_1) + \frac{ax}{f}$$

(ceci d'après le théorème de Malus, H étant la projection orthogonale de F<sub>1</sub> sur le rayon (2))

Puisque  $D \gg a$  et  $D \gg d$ , un développement limité (cf. cours 30) conduit à :

$$(S_1F_2) - (S_1F_1) \approx \frac{a}{D} \times \frac{d}{2} \Rightarrow \delta_{2/1} = \frac{ad}{2D} + \frac{ax}{f}; \quad \text{pour la source } (S_2) : \delta'_{2/1} = -\frac{ad}{2D} + \frac{ax}{f}$$

• L'éclairement est donc donné par :

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x) = 2E_0 \times \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_{2/1}}{\lambda}\right) + 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta'_{2/1}}{\lambda}\right) \right] = 4E_0 \times \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi ad}{\lambda D}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f}\right) \right]$$

(E<sub>0</sub> serait l'éclairement obtenu pour **une** source avec **une** fente ouverte)

2) L'expression précédente fait apparaître un facteur de visibilité :

$$V(t) = \cos\left(\frac{\pi ad(t)}{\lambda D}\right) = \cos\left(\frac{2\pi avt}{\lambda D}\right) \quad (\text{chaque source a la vitesse } v)$$

• Il y a brouillage du système de franges chaque fois que V(t) s'annule, donc pour :

$$\frac{2\pi avt}{\lambda D} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad (p \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda D}{2av}$$

## 2 Trous d'Young éclairés par une source polychromatique

1. La source est caractérisée par une densité spectrale  $J(\sigma)$  telle que l'intensité  $dI$  correspondant à une largeur spectrale  $d\sigma$  soit

$$dI_0 = J(\sigma) d\sigma$$

Pour simplifier, on supposera que le spectre d'émission présente un profil rectangulaire en nombre d'onde compris entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 > \sigma_1$  de sorte que

$$J(\sigma) = \begin{cases} J_0 & \text{si } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

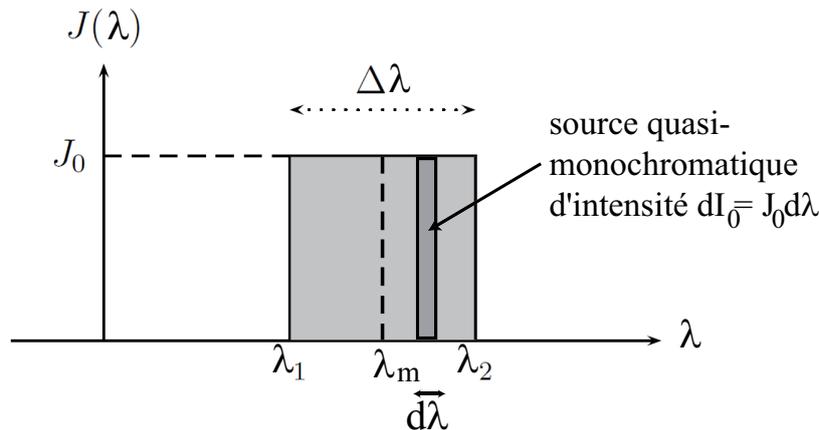


FIGURE 1 – Densité spectrale de la source polychromatique considérée.

On posera

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & \text{nombre d'onde moyen} \\ \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 & \text{largeur spectrale (en nombre d'onde) avec } \delta\sigma \ll \bar{\sigma} \\ I_0 = J_0(\sigma_2 - \sigma_1) & \text{intensité totale de la source} \end{cases}$$

Chaque émission monochromatique donne lieu à un système d'interférences qui lui est propre car les radiations de longueurs d'onde différentes sont incohérentes entre elles. L'intensité totale est donc la somme des intensités associées à chaque longueur d'onde ou, de façon équivalente, à chaque nombre d'onde.

La radiation de nombre d'onde  $\sigma = 1/\lambda$  et de largeur  $d\sigma$ , d'intensité  $dI_0 = J_0 d\sigma$  au niveau de la source, donne lieu à des interférences dont l'intensité est donnée par

$$dI_\lambda(M) = 2dI_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right] = 2J_0 [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] d\sigma$$

L'intensité totale est obtenue par sommation des intensités correspondant à chaque longueur d'onde incohérente :

$$I(M) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dI_\lambda(M) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} 2J_0 [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] d\sigma = 2J_0 \left[ (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{\sin(2\pi\delta\sigma_2) - \sin(2\pi\delta\sigma_1)}{2\pi\delta} \right]$$

où l'on a supposé que  $\delta$  était indépendant de la longueur d'onde dans le vide ; on a donc négligé tout phénomène dispersif. En utilisant la relation de trigonométrie suivante :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \sin \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

on trouve

$$I(M) = 2J_0(\sigma_2 - \sigma_1) \left[ 1 + \frac{\sin(\pi\delta\Delta\sigma)}{\pi\delta\Delta\sigma} \cos(2\pi\delta\bar{\sigma}) \right]$$

$$I(M) = 2I_0 \left[ \underbrace{1 + \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)}_{\text{variation lente}} \underbrace{\cos(2\pi\delta\bar{\sigma})}_{\text{variation rapide}} \right]$$

La fonction  $\text{sinc}$ , appelée sinus cardinal, est représentée ci-dessous :

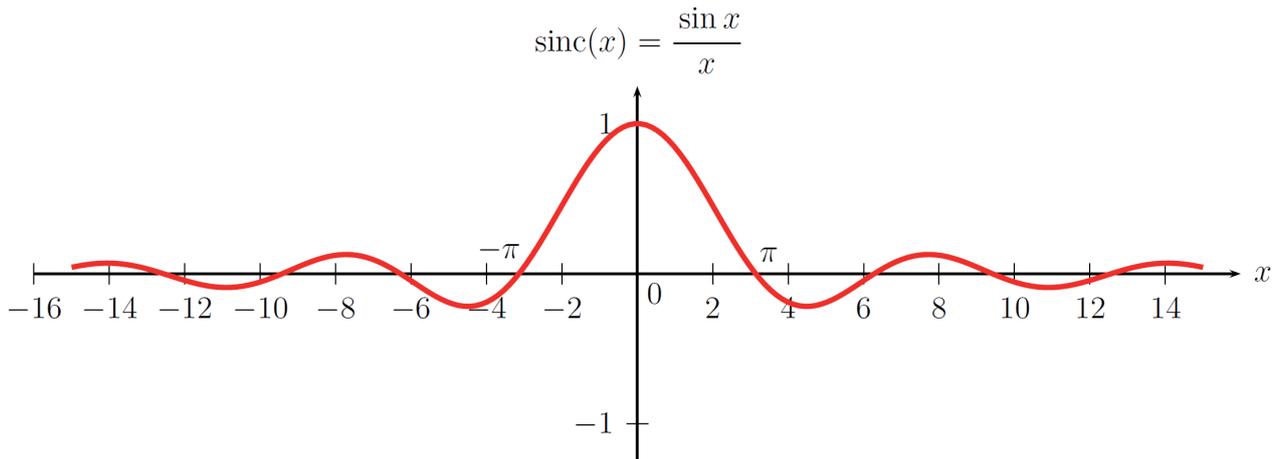


FIGURE 2 – Fonction sinus cardinal.

La fonction sinus cardinal est une fonction oscillante d'amplitude décroissante. Elle est maximale en 0 et s'annule en  $x = \pm\pi$ . La fonction  $\sin(x)$  a donc une largeur à mi-hauteur de l'ordre de  $\Delta x = \pi$ .

On cherche à faire intervenir un terme de variation rapide et un terme de variation lente correspondant à la visibilité.

L'ordre de grandeur sur lequel le sinus cardinal varie correspond donc à  $\delta$  tel que  $\pi\delta\Delta\sigma = \pi$ , soit  $\delta = 1/\Delta\sigma$ , alors que le cosinus varie sur une échelle de  $\delta$  telle que  $2\pi\delta\bar{\sigma} = 2\pi$ , soit  $\delta = 1/\bar{\sigma}$ . Comme  $\Delta\sigma \ll \bar{\sigma}$ , le sinus cardinal a une variation plus lente et correspond donc à l'enveloppe du signal.

La visibilité du système d'interférence vaut donc

$$V(\delta) = \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)$$

d'où l'on tire l'expression du contraste, défini localement autour d'une valeur de  $\delta$  pour laquelle la visibilité est pratiquement constante, de sorte qu'on obtient simplement

$$C(\delta) = |V(\delta)| = |\text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)|$$

Le contraste est donc maximal en  $\delta = 0$ , c'est-à-dire au centre du système d'interférences. La figure d'interférences est bien contrastée tant que  $\text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)$  prend des valeurs non négligeables, c'est-à-dire tant que

$$\pi\delta\Delta\sigma < \pi \quad \text{soit} \quad \delta < \frac{1}{\Delta\sigma}$$

Plus le spectre est large, plus la zone dans laquelle les franges sont visibles est réduite. On notera que ce résultat reste valable qualitativement pour tout type de profil spectral en remplaçant  $\Delta\sigma$  par la largeur à mi-hauteur.

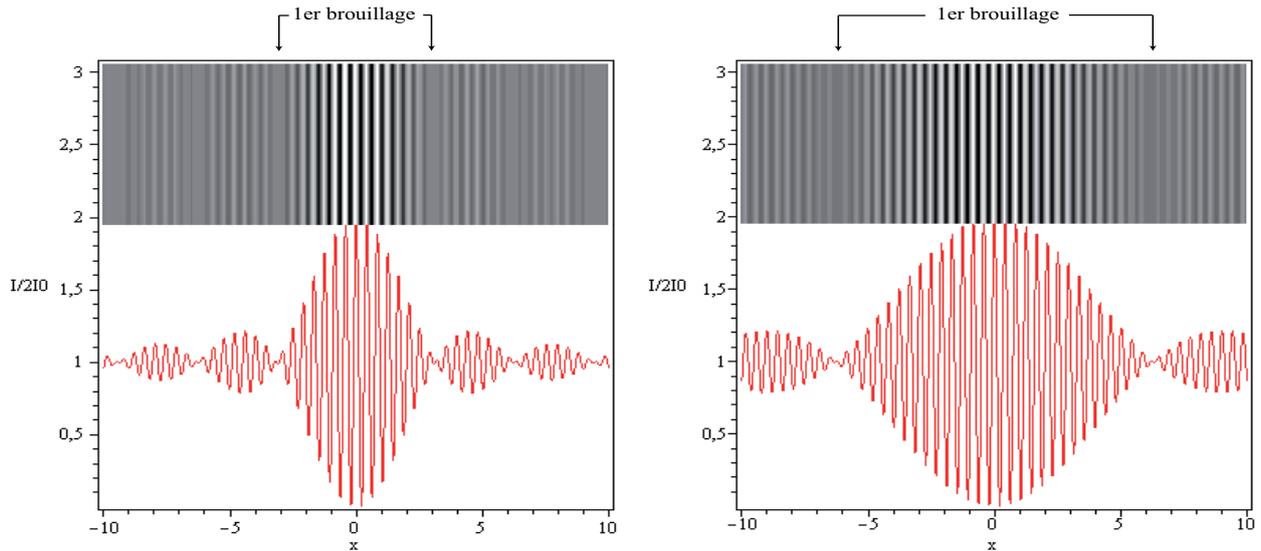


FIGURE 3 – Allure de la figure d’interférence et de l’intensité associée dans le cas d’un profil spectral rectangulaire. À gauche,  $\Delta\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{15}$  tandis qu’à droite  $\Delta\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{30}$ . Plus la largeur spectrale est faible, plus le nombre de franges visibles est grand.

- D’après le modèle des trains d’onde, si le déphasage au point  $M$  entre les rayons issus des sources secondaires est trop important, les trains d’onde ne se recouvrent plus et il n’y a plus d’interférences. Il y a brouillage des franges si la différence de marche est supérieure à la longueur de cohérence de la source :

$$\delta > L_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu} \quad \text{or} \quad \Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = c\Delta\sigma \quad \text{et donc lorsque} \quad \boxed{\delta > \frac{1}{\Delta\sigma}}$$

On retrouve bien que la figure d’interférence est brouillée lorsque la différence de marche excède une certaine valeur, correspondant à un brouillage des franges sur les côtés de la figure d’interférence.

- On peut aussi retrouver ce résultat en utilisant le critère de brouillage sur la demi-étendue spectrale de la source. On s’attend ainsi à un brouillage lorsque :

$$\Delta p(M) = p(\sigma) - p(\sigma + \Delta\sigma/2) > \frac{1}{2}$$

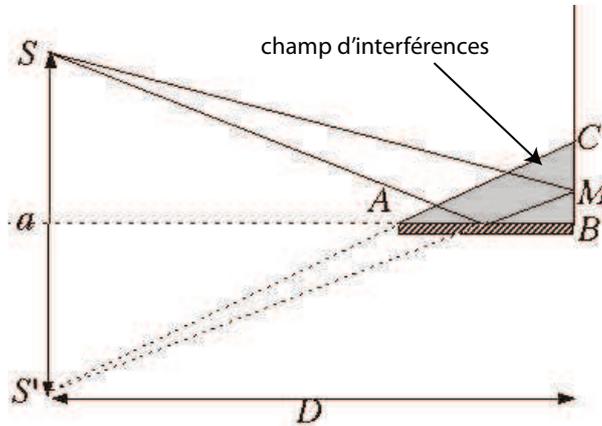
Comme  $p = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \sigma\delta(M)$ , on en déduit :

$$\delta [\sigma - (\sigma + \Delta\sigma/2)] > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta > \frac{1}{\Delta\sigma}}$$

On retrouve bien à nouveau le même résultat.

### 3 Miroir de Lloyd

1. Ce dispositif est à division du front d'onde car il n'y a pas de lame séparatrice. Les sources secondaires à considérer sont la source  $S$  elle-même et son image  $S'$  par le miroir plan horizontal.



Les sources secondaires sont donc évidemment mutuellement cohérentes, synchrones et en phase (ou en opposition de phase si on ramène le déphasage à la réflexion au niveau de la source). Le champ d'interférences est représenté sur la figure ci-dessus.

2. On se ramène donc au cas des trous d'Young, avec  $a = 2h$  et  $D = \ell_1 + \ell_2$ . Il faut cependant prendre en compte le déphasage de  $\pi$  à la réflexion du faisceau se réfléchissant sur le miroir horizontal. Un tel déphasage correspond à une différence de marche supplémentaire égale à  $\frac{\lambda}{2}$ . On en déduit donc :

$$\delta = \frac{2hx}{\ell_1 + \ell_2} + \frac{\lambda}{2}$$

La différence de phase correspondante est :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi hx}{\lambda(\ell_1 + \ell_2)} + \pi$$

3. L'éclairement est donc donné par :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \cos\Delta\varphi] = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi hx}{\lambda(\ell_1 + \ell_2)} + \pi \right) \right]$$

On obtient donc des franges horizontales.

Au centre de la figure d'interférences, en  $x = 0$ , on obtient  $\mathcal{E} = 0$ . Cela correspond donc à une frange sombre.

L'interfrange est déterminé par :

$$i = \frac{\lambda(\ell_1 + \ell_2)}{2h}$$

4. Oui, on peut tout à fait remplacer la source ponctuelle par une fente fine horizontale pour augmenter la luminosité, puisque la différence de marche ne dépend pas de  $Y_S$  (position du point source selon la direction  $y$ ).

5.

L'émetteur est la source  $S$  avec  $h = 10$  m, la mer est le miroir\* et le bateau, à une distance  $D = 12$  km fait office d'écran. Ici la longueur d'onde est  $\lambda = 2$  m. L'interfrange vaut ici :

$$i = \frac{\lambda D}{2h} = \frac{2 \times 12000}{20} = 1200 \text{ m}$$

La taille du bateau est négligeable devant cet interfrange et placé en  $x \approx 0$ , sur la frange «sombre», il ne capte qu'un signal faible.

Par contre avec  $h = 500$  m, l'interfrange devient égal à 24 m et l'antenne du bateau placée en haut du mat, à quelques mètres de la surface, est, par comparaison avec l'interfrange, notablement écarté du minimum d'intensité, la réception est bien meilleure.

\* La mer joue bien le rôle d'un miroir qui ajoute un déphasage de  $\pi$  puisqu'il y a réflexion sur un milieu plus réfringent, et on rappelle que le coefficient de réflexion en amplitude sous incidence normale entre deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$  :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

6. On élargit maintenant la fente verticalement. Il peut se produire un brouillage dans ce cas car la position des franges dépend de la hauteur de la source par rapport au miroir. Les éclairissements de chaque point de la source vont simplement s'additionner car ils sont non cohérents entre eux.

On peut alors utiliser le critère de brouillage sur la demi-étendue spatiale de la source<sup>1</sup>.

Ainsi, au niveau du point  $M$  de l'écran, l'ordre d'interférence provenant des deux rayons issus d'un point d'abscisse  $x_S$  dans la fente source s'écrit :

$$p_S = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{2x_S x}{\lambda D}$$

L'ordre d'interférence en  $M$  pour un point source  $S'$  décalé de la demi-étendue spatiale de la source, en  $x'_S = x_S + \frac{b}{2}$ , s'écrit :

$$p_{S'} = \frac{\delta'(M)}{\lambda} = \frac{2(x_S + b/2)x}{\lambda D}$$

Il y aura donc brouillage en  $M$  à partir du moment où, si  $\forall x_S \in [h - b/2, h]$ ,  $b > b_{lim}$  tq :

$$\Delta p = p_{S'} - p_S = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{b_{lim} x}{\lambda D} = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{b_{lim} = \frac{\lambda D}{2x}}$$

Le calcul complet redonne le même résultat en annulant le contraste (voir ci-dessous).

A une largeur  $dx_s$ , élémentaire de la fente source, on associe l'éclairement infinitésimal  $d\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_0 \frac{dx_s}{b}$ , et on superpose les éclairissements en  $M$  donnés par les éléments incohérents de la source :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \int_{x_s = a/2 - b/2}^{a/2 + b/2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi(2x_s)x}{\lambda_0 D} \right) \right) \frac{dx_s}{b}$$

Après le calcul de l'intégral et en notant  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ , on a :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[ 1 - \text{sinc} \left( \frac{2\pi b x}{\lambda_0 D} \right) \cos \left( \frac{2\pi a x}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

On retrouve l'aspect habituel des franges mais le contraste est modulé à l'écran par le sinus cardinal. Le contraste reste bon au voisinage de 0 mais décroît rapidement.

1. Il y aura brouillage sur l'écran si, pour chaque couple de points de la source, l'un correspond à des interférences constructives et l'autre à des interférences destructives au niveau de la position du point  $M$  d'abscisse  $x$ . Dans ce cas, le contraste est proche de 0 au niveau du point  $M$ .

En effet, le contraste s'annule pour la première fois lorsque l'argument du sinus cardinal est égal à  $\pi$ ,

lorsque  $b_{lim} = \frac{\lambda D}{2x}$ .

On peut remarquer que la valeur de  $b_{lim}$  dépend ici de la position  $x$  sur l'écran au niveau de laquelle on souhaite (ou non) avoir brouillage. Cette situation est différente du cas des trous d'Young pour lesquels on élargirait la fente source, car on a ici simultanément élargissement de la source et de la taille des trous.

Dans le cas du bateau, on constate que proche de  $x = 0$ , c'est à dire au niveau de la mer, il n'y aura jamais brouillage sous l'effet de l'étendue spatiale de la source car  $b_{lim} \rightarrow \infty$ . Si le récepteur est en haut du mât par exemple, à 10m de haut, on a alors :

$$b_{lim} = \frac{2 \times 12 \cdot 10^3}{2 \times 10} = 1200 \text{ m}$$

Même si la source a une étendue de l'ordre du mètre,  $b \ll b_{lim}$ , et il n'y a donc aucun problème de mauvaise réception dû à l'étendue de la source !