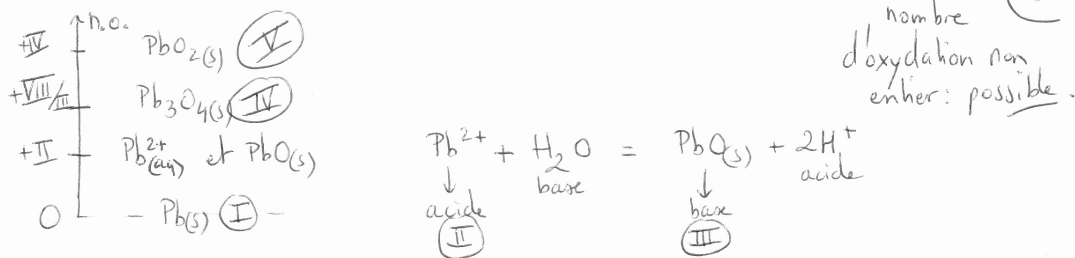


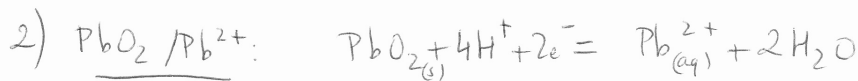
Correction - DM n°20 - Optique ondulatoire et chimie

1 Diagramme E-pH du plomb

1) Nombre d'oxydation:
 $Pb^{2+}_{(aq)}$: +II ; $Pb(s)$: 0 ; $PbO(s)$: +II ; $PbO_2(s)$: +IV ; $Pb_3O_4(s)$: $\frac{+VIII}{III}$



Les domaines d'existence concernent les solides $Pb(s)$, $Pb_3O_4(s)$ et $PbO_2(s)$ de prédominance espèces en solution aqueuse: $Pb^{2+}_{(aq)}$



$$E(PbO_2 / Pb^{2+}) = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[H^+]^4}{[Pb^{2+}_{(aq)}]} \right) \quad (1)$$

On peut utiliser n'importe quel point de la frontière (II)/(IV), et donc en particulier à $pH=0$ ($[H^+] = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$), sachant que dans ce cas, $[Pb^{2+}_{(aq)}] = C_0 = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ à la frontière.
 ↳ convention de trace.

$$E^\circ(PbO_2 / Pb^{2+}) = E(PbO_2 / Pb^{2+}) + 0,03 \log C_0$$

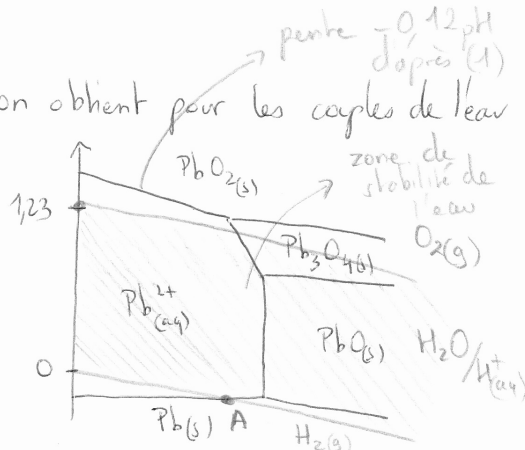
↳ on lit à $pH=0$: 1,45 V.

$$\Rightarrow \boxed{E^\circ(PbO_2 / Pb^{2+}) = 1,45 \text{ V}}$$

3) Avec $P^\circ = 1 \text{ bar}$ pour le trace, on obtient pour les couples de l'eau (à savoir bien retrouver):

$$E(H^+ / H_2) = -0,06 \text{ pH}$$

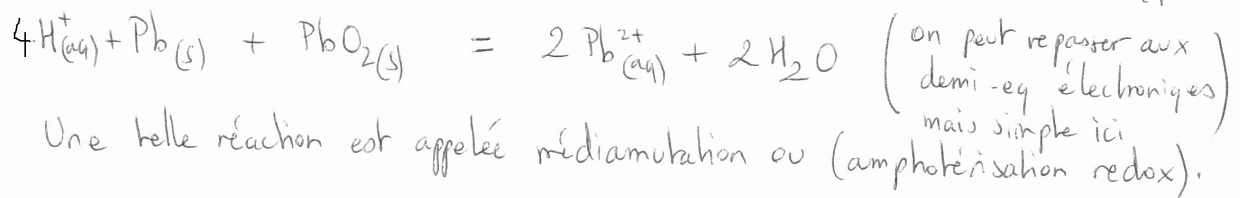
$$E(O_2 / H_2O) = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$



4) Le plomb est a priori instable pour un $\text{pH} < \text{pH}$ du point A, et stable ensuite (on notera que ceci ne prend pas en compte d'éventuelles surtensions dues aux facteurs cinétiques).

Le point A est l'intersection de $-0,06 \text{ pH}$ avec $E = -0,13 \text{ V}$
 donc $\text{pH}_A \approx \frac{0,13}{0,06} = 2,2 \rightarrow$ cohérent avec la valeur de $\text{pH} = 6$ notée après.

5) Entre $\text{Pb}(s)$ et $\text{PbO}_2(s)$, en milieu acide, il y a réaction totale puisque les domaines sont disjoints, et il y a formation de $\text{Pb}^{2+}_{(aq)}$:



Une telle réaction est appelée médiamutation ou (amphotérisation redox).

2 Anneaux d'égalé inclinaison

1. La source étant étendue, les anneaux sont localisés à l'infini. On doit placer l'écran à grande distance ou dans le plan focal image d'une lentille convergente.
2. L'ordre d'interférence au centre de la figure vaut :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} = 4028,6$$

Cette valeur est proche d'un demi-entier, et le centre de la figure est donc plutôt sombre.

3. En utilisant le même raisonnement que dans le cours, on obtient, pour le $k^{\text{ième}}$ rayons à partir du centre :

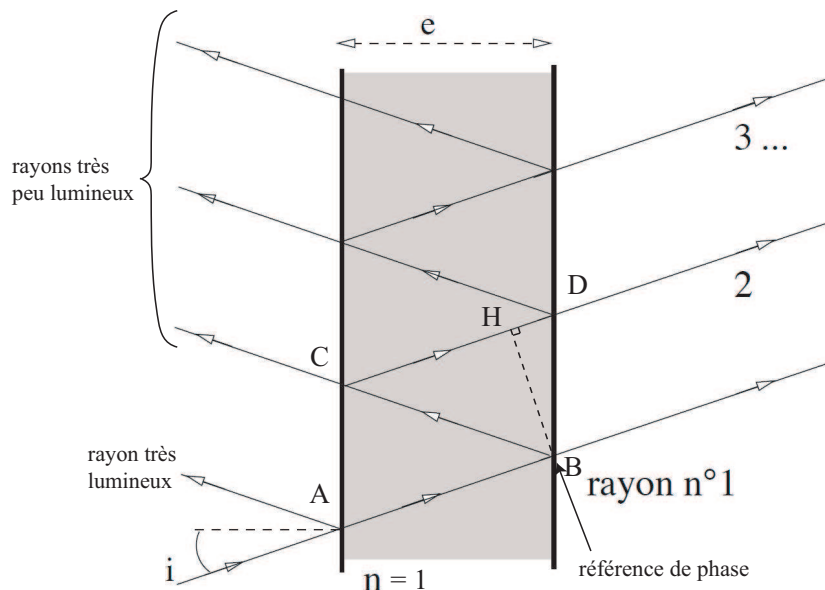
$$p_k = \frac{2e \cos(i_k)}{\lambda} = p_0 \left(1 - \frac{i_k^2}{2}\right) = p_0 \left(1 - \frac{\rho_k^2}{2f'^2}\right)$$

Finalement, les rayons du premier et du second anneaux brillants, dont les ordres d'interférences correspondent respectivement à $p_1 = \lfloor p_0 \rfloor = 4028$ et $p_2 = \lfloor p_0 \rfloor - 1 = 4027$, sont donnés par :

$$\rho_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)} \simeq 17 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \rho_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right)} \simeq 28 \text{ mm}$$

3 Interféromètre de Fabry-Pérot

1. (a) Les trajets des rayons dans l'interféromètre sont représentés dans la figure ci-dessous.



- (b) Un seul rayon donne naissance à plusieurs rayons mutuellement cohérents (car issus de la même source) au niveau de chaque lame. C'est donc un dispositif à division d'amplitude car la lame joue un rôle analogue à celui d'une lame partiellement réfléchissante.
- (c) Chacun des rayons transmis subit 2 transmissions identiques à l'entrée et à la sortie de la lame. En revanche, le second rayon transmis a subi 2 réflexions supplémentaires à l'intérieur de l'interféromètre par rapport au premier rayon transmis. Chaque réflexion correspond à multiplier l'amplitude du rayon par r , multipliant ainsi l'amplitude du second rayon par $R = r^2$. De plus, le second rayon est déphasé à cause du chemin optique supplémentaire parcouru, de sorte que l'amplitude complexe du $n^{i\text{ème}}$ rayon transmis s'écrit

$$\underline{s}_n(M, t) = \underline{s}_1(M, t)r^{2(n-1)}e^{j(n-1)\Phi} = \underline{s}_1(M, t)R^{(n-1)}e^{j(n-1)\Phi}$$

où \underline{s}_1 est l'amplitude complexe du premier rayon transmis et où Φ est le déphasage entre deux rayons successifs à cause de l'aller-retour dans l'interféromètre. La référence des phases est donc prise au niveau du point B sur la figure précédente.

Si R est proche de 1, les amplitudes de chacun des rayons dessinés sont donc similaires. Il faut donc tenir compte d'un très grand nombre de rayons pour le calcul de l'intensité transmise. On parle alors d'interférences à grand nombre d'ondes cohérentes, contrairement au cas des trous d'Young et du Michelson qui ne correspondaient qu'à des interférences à 2 ondes.

- (d) Les rayons ressortant de l'interféromètre sont parallèles et vont donc converger en un même point du plan focal de la lentille sur l'écran. De plus, les rayons sont cohérents entre eux car issus d'une même source ; on peut donc sommer l'amplitude complexe de chacun des rayons qui vont interférer¹ en M . En notant Φ le déphasage entre deux rayons successifs, on obtient en prenant comme référence de phase l'onde arrivant en M et provenant de B :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{s}_1 + \underline{s}_0 R e^{j\Phi} + \underline{s}_1 R^2 e^{j2\Phi} + \underline{s}_1 R^3 e^{j3\Phi} + \dots \\ &= \underline{s}_1 \left[1 + R e^{j\Phi} + (R e^{j\Phi})^2 + (R e^{j\Phi})^3 + \dots \right] \\ &= \underline{s}_1 \frac{1}{1 - R e^{j\Phi}} \end{aligned}$$

1. On notera qu'on ne retrouve pas le même résultat ici qu'avec les interférences à N dans le cas d'un réseau, car les ondes ne sont pas de même amplitude à cause des coefficients de réflexion et de transmission.

où l'on a utilisé le fait que la somme infinie (on prend en compte tous les rayons transmis) correspondait aux termes d'une suite géométrique de raison $Re^{j\Phi}$ de module inférieur à 1.

On en déduit donc l'intensité résultante, en posant :

$$I = |\underline{ss}^*| = |\underline{s_1s_1}^*| \frac{1}{|1 - Re^{j\Phi}|^2} = \frac{|s_1s_1^*|}{[(1 - R\cos\Phi)^2 + R^2\sin^2\Phi]}$$

En utilisant le fait que $\cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1$ et que $\cos(\Phi) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)$, on obtient finalement :

$$I = \frac{|s_1s_1^*|}{\left[(1 - R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi}{2}\right]} = \frac{I_M}{\left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2}\sin^2\frac{\Phi}{2}\right]}$$

On obtient donc l'expression proposée avec :

$$\boxed{I_M = \frac{|s_1s_1^*|}{(1 - R)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{m = \frac{4R}{(1 - R)^2}}$$

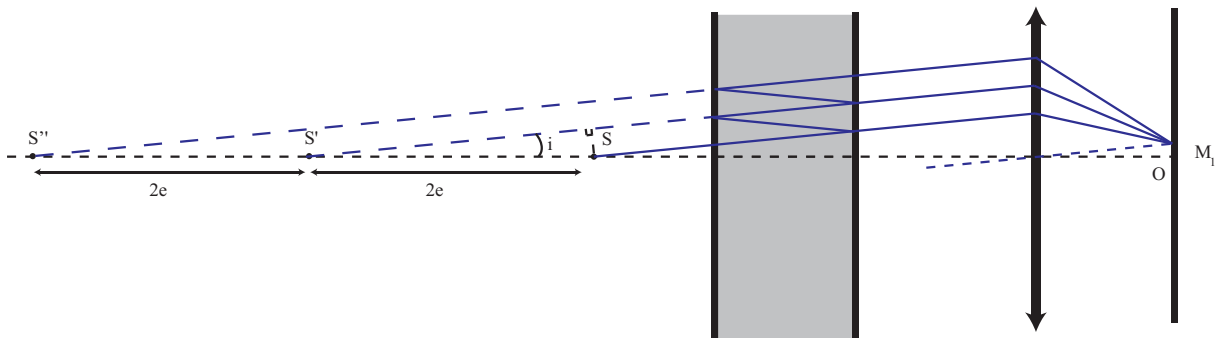
Calculons maintenant le déphasage entre deux rayons successifs. D'après le théorème Malus et le principe de retour inverse de la lumière, la différence de marche entre deux rayons successifs est égale à (on notera que l'intérieur de l'interféromètre est composé d'air, ce qui justifie que $(BM) = (HM)$) :

$$\delta = (BC) + (CH) = \frac{e}{\cos i} + (BC)\cos(2i) = \frac{e}{\cos i} [1 + \cos(2i)] = 2e\cos i$$

On en déduit donc le déphasage :

$$\boxed{\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi e\cos i}{\lambda}}$$

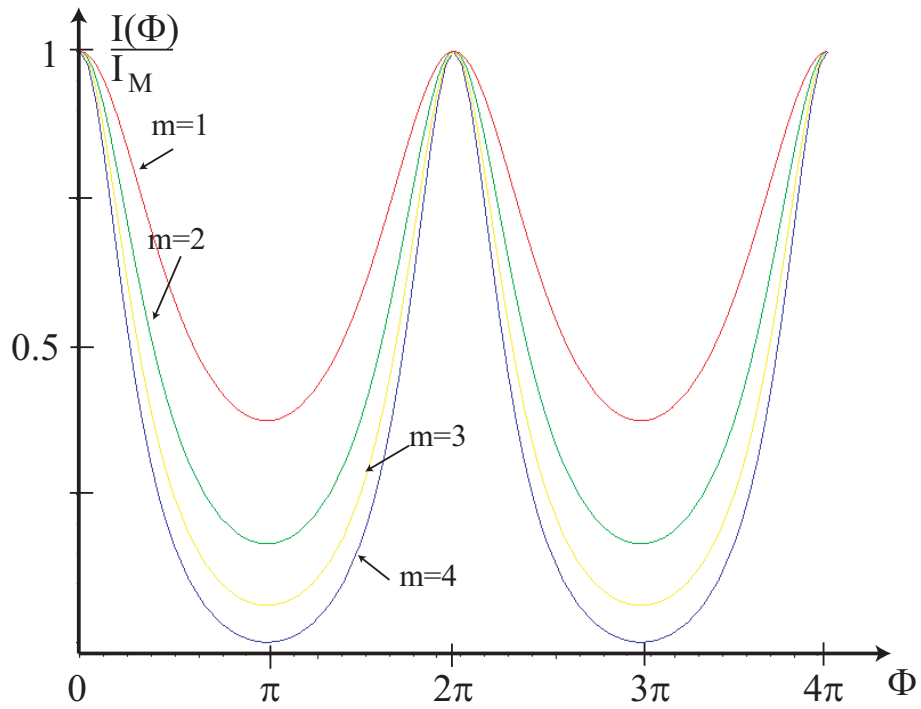
On peut retrouver ce résultat de la même façon que pour le Michelson, en utilisant la construction ci-dessous. En effet, on obtient : $\delta = 2e\cos i$.



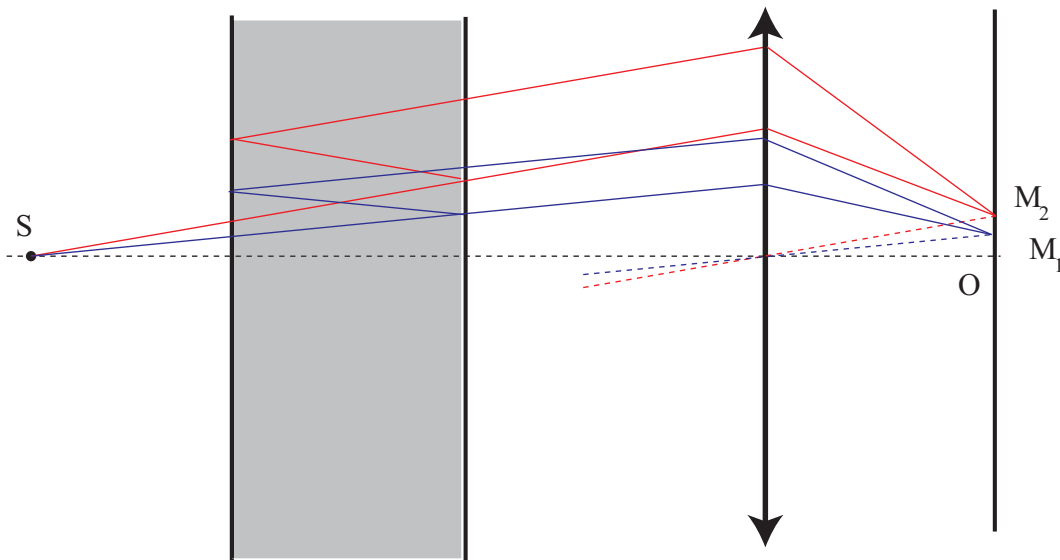
- (e) L'intensité normalisée par I_M est donnée ci-dessous pour différentes valeurs de m ($I_{max} = I_M$ et $I_{min} = \frac{I_M}{m}$) :
- (f) L'éclairement est maximal et vaut I_M lorsque $\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) = 0$, soit lorsque $\frac{\Phi}{2} = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, soit encore :

$$p = \frac{\Phi}{2\pi} = k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

On retrouve une généralisation au cas des interférences à N ondes du résultat classique pour des interférences à 2 ondes, selon lequel les interférences sont constructives lorsque l'ordre d'interférence est un entier (nous l'avons également retrouvé pour le cas du réseau, aussi pour le cas d'interférences à N ondes).



2. (a) Il y a invariance du problème par rotation autour de l'axe déterminé par la source et la normale aux deux lames, comme le montre la figure ci-dessous. La figure d'interférence est donc constituée d'anneaux centrés sur cet axe, en O . On notera que chaque point de l'écran correspond à l'interférence de rayons ayant des directions initiales différentes (on a tracé les rayons interférant en deux points M_1 et M_2 de l'écran).



(b) L'ordre d'interférence au centre de la figure d'interférence correspond au cas où $i = 0$, soit :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda}$$

L'anneau d'ordre k est défini par l'angle i_k tel que (on suppose ici que p_0 est entier) :

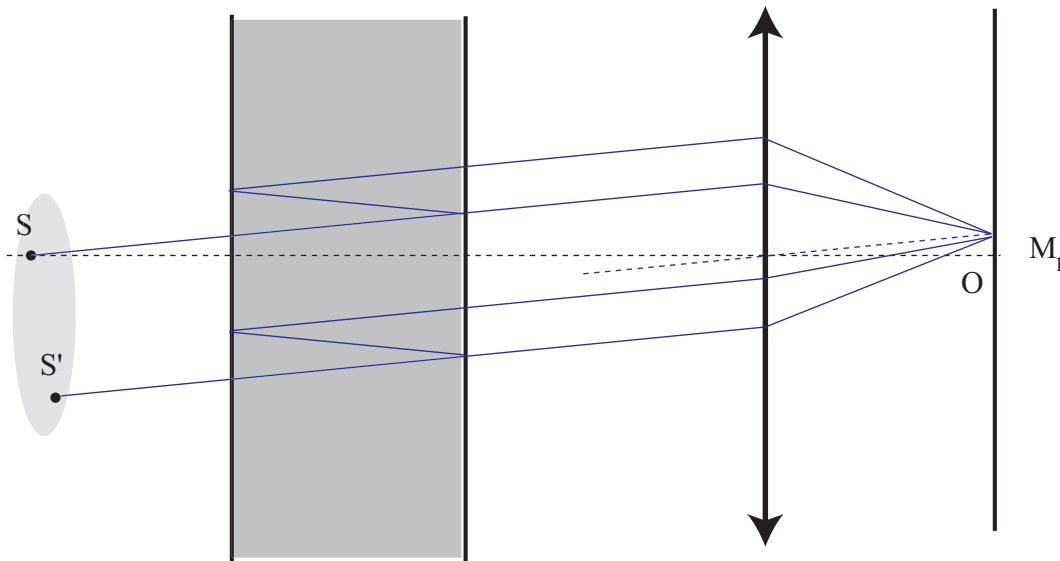
$$p_0 - k = \frac{2e \cos i_k}{\lambda}$$

Sachant que i_k est faible, on peut écrire $\cos i_k \simeq 1 - \frac{i_k^2}{2}$. De plus, $\tan i_k = \frac{\rho_k}{f'} \simeq i_k$, donc :

$$\rho_k = \sqrt{k} \times f' \sqrt{\frac{\lambda}{e}}$$

Le rayon de l'anneau d'ordre k est donc proportionnel à \sqrt{k} . Les anneaux se resserrent donc vers l'extérieur de la figure.

- (c) Les rayons sont identiques par rapport au cas du Michelson, cependant, d'après la répartition d'intensité précédente, on voit que lorsque m est très grand, c'est à dire lorsque R est proche de 1, les pics d'intensité maximale sont très fins. Dans le cas du Michelson, le rayon des anneaux brillants est toujours identique au rayon des anneaux sombres.
3. On peut utiliser une source étendue d'après la figure ci-dessous. En effet, deux points sources incohérentes de la source, S et S' , vont donner naissance à des interférences au point M_1 avec les mêmes conditions car tous les rayons interférant en M_1 ont tous la même inclinaison par rapport à l'axe dans l'interféromètre, et donc le même déphasage.



Avec une source étendue, on observera donc des anneaux bien contrastés² car les figures d'interférences des différents points sources sont superposables et vont d'additionner.

4. Les minima d'intensités sont obtenus pour $\phi = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et correspondent à :

$$I_m = \frac{I_M}{1 + m}$$

Le contraste des anneaux est donc donné par :

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{m}{2 + m} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

2. On notera que même si le réglage n'est pas parfait, le contraste restera meilleur qu'avec un Michelson car les anneaux sont beaucoup plus fins, et conduisent plus difficilement à un brouillage.

Les valeurs du contraste en fonction du pouvoir réflecteur des miroirs sont données dans le tableau ci-dessous :

R	0.5	0.7	0.9	0.95
$m = \frac{4R}{(1-R)^2}$	8	31	360	1520
$C = \frac{m}{2+m}$	0.8	0.94	0.99	0.999

On peut donc en déduire que les anneaux sont d'autant plus contrastés que le pouvoir réflecteur se rapproche de $R = 1$ par valeur inférieure.

5. Avec une lame de verre à faces parallèles, la situation est analogue à celle étudiée ici, et le coefficient de réflexion en intensité est donné, sous incidence quasi-normale (car le faisceau a une faible divergence par rapport à la normale à la lame), par $R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$ où $n_2 = 1.5$ correspond à l'indice du verre, et $n_1 = 1$ correspond à l'indice de l'air. On en déduit que $R = 1/25 = 4\%$, et la valeur du contraste correspondant est 0.17, ce qui est très faible. La figure sera très brillante avec des anneaux très peu visibles. On comprend ainsi l'intérêt du traitement de surface des lames du Fabry-Pérot.

On notera qu'on aurait exactement le même contraste en réflexion, mais les anneaux seraient très peu visibles sur un fond sombre cette fois.

2) On observe un spectre annelé - dans le spectroscopie car l'intensité sur l'écran est la superposition - de réseaux de franges d'interférences $i = \frac{\lambda D}{a}$ différents et pour lesquels on sélectionne soit des raies sombres, soit des raies brillantes en fonction de λ pour une position donnée de la fente.

3)

q raies noires

$$p\lambda_1 = n + \frac{1}{2} = \frac{d}{\lambda_1} = \frac{2a \sin \theta}{\lambda_1} + \frac{2e \cos \theta}{\lambda_1} = 0 + \frac{2e \cos \theta}{\lambda_1}$$
 cas raie sombre Cohérence d'air incidence quasi normale ordre d'air

$$p\lambda_1 = \frac{2e}{\lambda_1}$$

$$p\lambda_2 = \frac{2e}{\lambda_2} < p\lambda_1$$

$$= n + \frac{1}{2} - (q + 1)$$

$$= p\lambda_2 - (q + 1)$$

$$\frac{2e}{\lambda_2} = \frac{2e}{\lambda_1} - (q + 1)$$

$$= e \left[\frac{2}{\lambda_1} - \frac{2}{\lambda_2} \right] = q + 1$$

$$e = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (q + 1)}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$