

|   |
|---|
| <b>TD n°25bis - Bases de la mécanique quantique</b> |
|---|

## 1 Repères historiques sur les débuts de la mécanique quantique

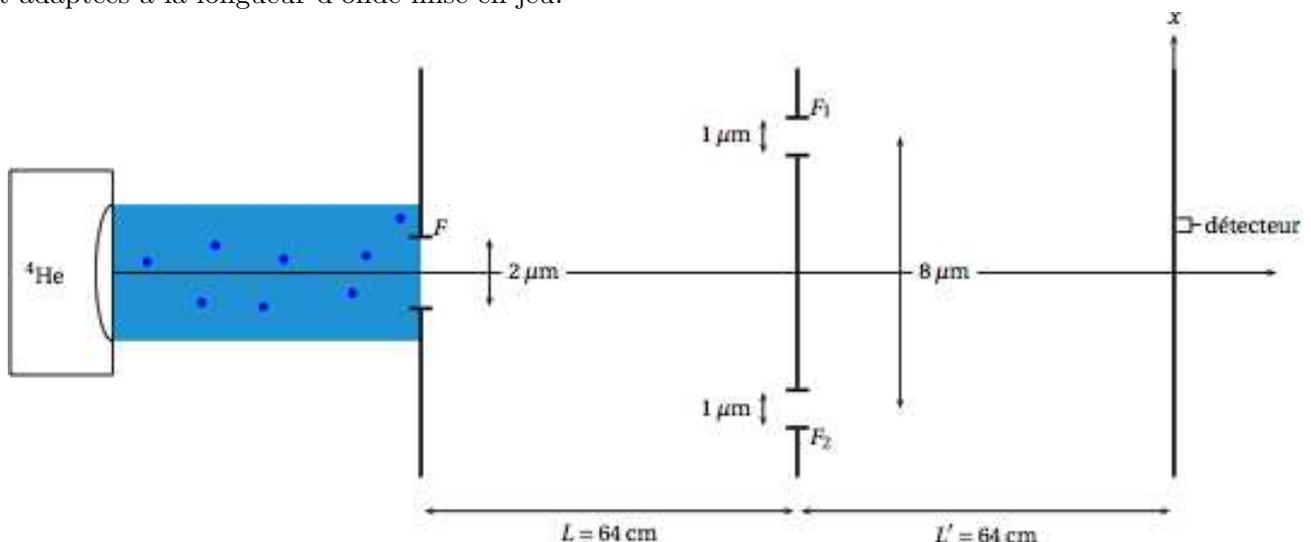
Commenter les découvertes marquées d'une étoile dans l'historique ci-dessous :

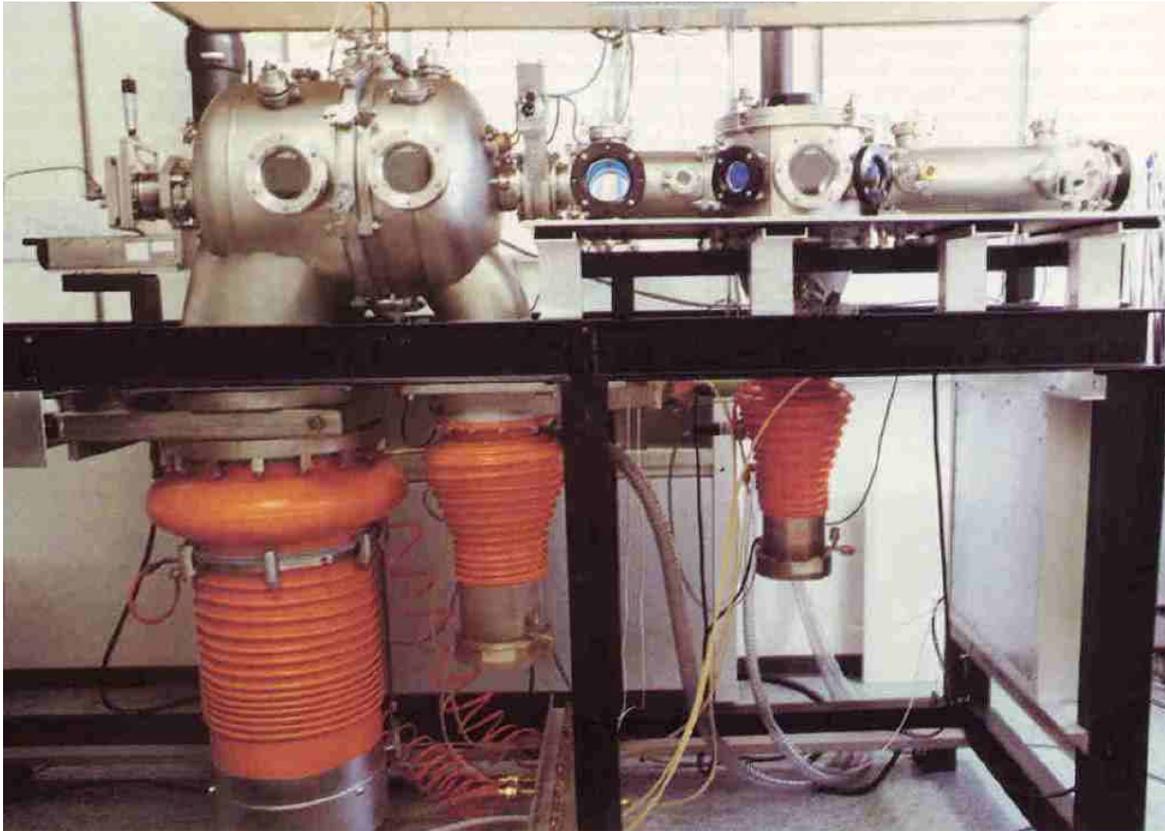
- 1900\* Première quantification de PLANCK, qui introduit la grandeur d'aide  $h$  (appelée ensuite constante de Planck) à l'occasion de l'explication théorique du rayonnement du corps noir.
- 1905\* EINSTEIN explique l'effet photoélectrique en s'appuyant sur les quanta d'énergie lumineuse et ouvre la voie de la dualité onde-corpuscule pour la lumière.
- 1906\* EINSTEIN propose un modèle pour la capacité calorifique des solides en quantifiant les modes de vibration de ceux-ci.
- 1911\* RUTHERFORD introduit le modèle planétaire de l'atome en accord avec ses expériences de diffusion, mais qui pose un problème de stabilité.
- 1913 EHRENFEST découvre empiriquement une règle de quantification du moment cinétique.
- 1913\* BOHR introduit son modèle semi-quantique stable de l'atome pour essayer de décrire les spectres atomiques de raies.
- 1914 Les expériences de FRANCK et HERTZ apportent une validation directe de la quantification de l'énergie dans l'atome.
- 1916 MILLIKAN termine ses travaux expérimentaux qui renforcent la proposition d'EINSTEIN des quanta d'énergie lumineuse(mesure de la charge de l'électron)
- 1916-1917 EINSTEIN discute les phénomènes d'émission spontanée et stimulée dans les molécules.
- 1921\* Les expériences de STERN et GERLACH montrent que la quantification peut concerner les trajectoires des particules et conduisent ensuite à la découverte du moment magnétique de l'électron (spin).
- 1923\* L'aspect corpusculaire de la lumière est renforcé par l'expérience de diffusion X de COMPTON.
- 1923\* BOHR énonce un principe de correspondance entre les résultats de la physique classique et ceux de la physique quantique.
- 1923\* DE BROGLIE affirme que la matière présente la même dualité onde-corpuscule que la lumière.
- 1924 Le principe d'exclusion est énoncé par PAULI et il propose un nombre quantique de spin pour l'électron.
- 1926\* L'équation de la dynamique de la fonction d'onde est proposée par SCHRÖDINGER qui est un fondement de la version ondulatoire de la nouvelle mécanique quantique.

- 1926\* BORN propose l'interprétation orthodoxe de l'école de Copenhague de la fonction d'onde qui est une interprétation probabiliste.
- 1927 Le caractère ondulatoire de la matière est confirmé expérimentalement par DAVISSON et GERMER (diffraction des électrons).
- 1927\* Le principe de complémentarité, relatif à la dualité onde-corpuscule, est énoncé par BOHR.
- 1927\* HEISENBERG propose les relations d'indétermination posant une limite aux interprétations classiques.
- 1928\* GAMOW propose une explication de l'existence de la désintégration  $\alpha$  en exploitant la découverte de l'effet tunnel quantique.
- 1932 Découverte du neutron par CHADWICK mais on n'a pas de modèle acceptable du noyau atomique. On sait qu'il contient des neutrons et des protons mais on ne sait pas ce qui les tient ensemble.
- 1935 YUKAWA montre que la cohésion du noyau atomique est assurée par l'interaction forte.
- 1960 TOWNES propose le principe du LASER.
- 1976 L'expérience d'interférences de type YOUNG avec une source atténuée d'électrons et avec film montrant la construction de la figure est effectuée par MERLI, MISSIROLI et POZZI.
- 1980\* EKIMOV découvre les boîtes quantiques.
- 1981 Le premier microscope à effet tunnel (STM) est inventé par BINNIG et ROHRER.

## 2 Interférences d'atomes d'Hélium (Carnal et Mlynek, 1991)

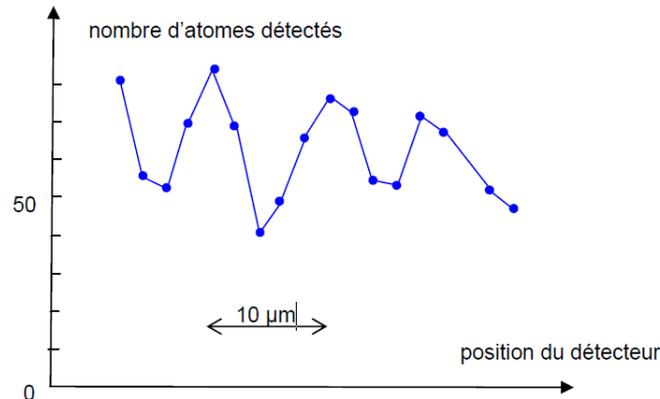
En 1991, O. Carnal et J. Mlynek ont réalisé une véritable expérience de fentes d'Young avec des atomes d'Hélium. La très grande difficulté de cette expérience tient, entre autres, à la très faible valeur de la longueur d'onde de de Broglie. Les fentes d'Young ont une largeur de  $s_2 = 1 \mu\text{m}$  et leurs centres sont séparés de  $a = 8 \mu\text{m}$ . Dans le cas d'une expérience d'interférences lumineuses, la longueur d'onde est  $10^3$  à  $10^4$  fois plus grande et l'écartement des fentes  $10^3$  fois plus grand. Les dimensions de l'expérience (voir figures ci-dessous) sont adaptées à la longueur d'onde mise en jeu.





Dans l'expérience, le faisceau incident d'atomes d'Hélium est diffracté par une première fente unique  $F$  de largeur  $s_1 = 2 \mu\text{m}$ , puis rencontre deux fentes  $F_1$  et  $F_2$  parallèles, placées à une distance  $L = 64 \text{ cm}$  de la première fente  $F$ . On détecte les atomes d'hélium dans un plan situé à une distance  $L' = 64 \text{ cm}$  derrière la fente double  $F_1 - F_2$ , avec un détecteur de largeur  $\delta = 2 \mu\text{m}$  placé dans la zone de recouvrement des faisceaux issus de  $F_1$  et  $F_2$ .

On obtient les résultats suivants :



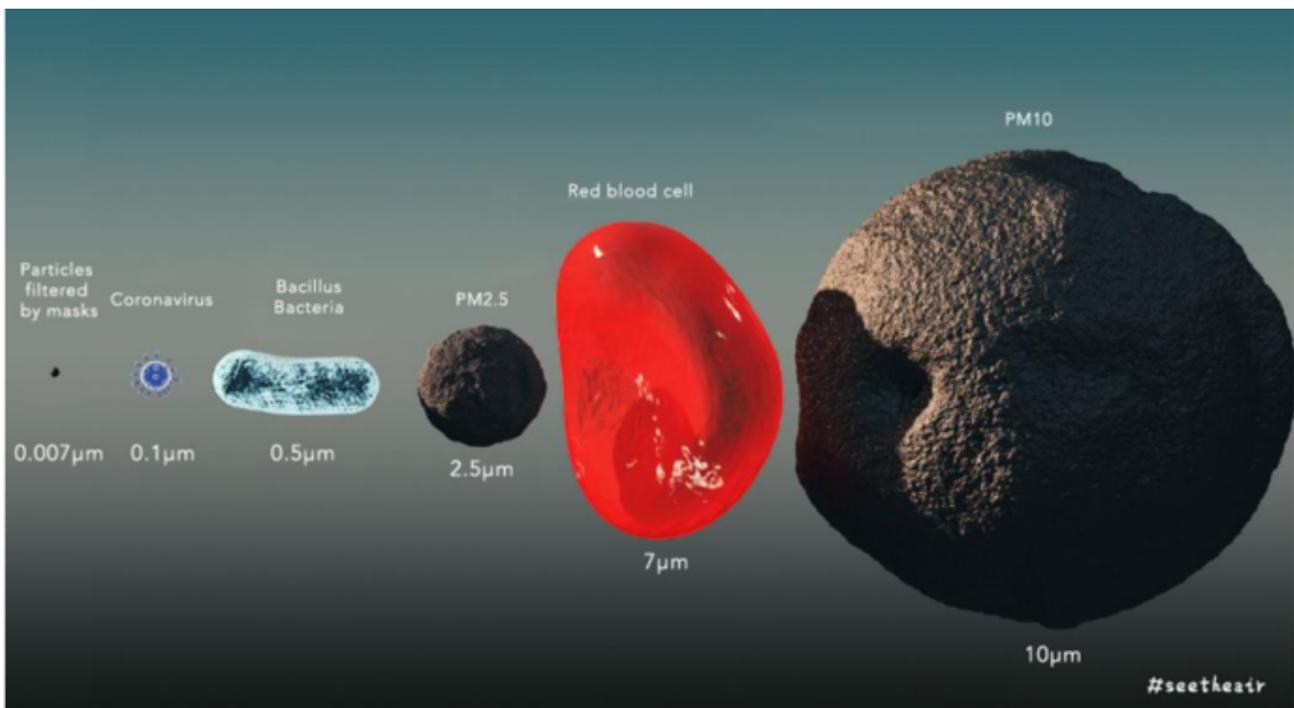
L'interfrange observé est estimé à  $i = 8.4 \mu\text{m} \pm 0.8 \mu\text{m}$ .

1. Expliquer comment on peut retrouver la valeur de la longueur d'onde de de Broglie à partir des données expérimentales.
2. La masse d'un atome d'hélium est  $m_{\text{He}} = 6,70 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Quelle est la vitesse des atomes d'Hélium dans cette expérience? Estimer le temps mis par un atome pour aller de la fente  $F$  au détecteur.
3. Estimer la température moyenne des atomes à l'intérieur du réservoir d'Hélium. Pourquoi utiliser une telle température?
4. Calculer l'angle  $\theta$  de diffraction de l'onde de matière par la fente  $F$ . Vérifier que les fentes  $F_1$  et  $F_2$  reçoivent bien cette onde.

5. Calculer l'angle  $\theta'$  de diffraction de l'onde de matière par la fente  $F_1$  ou  $F_2$ . Calculer la largeur de la zone de recouvrement des deux ondes diffractées par les deux fentes, dans le plan de détection.
6. On détecte en moyenne 65 atomes en 10 minutes, mais une vingtaine correspond au bruit de fond (obtenu en occultant le faisceau incident). Calculer le temps moyen entre deux impacts d'atomes sur tout l'écran. Comparer avec le temps trouvé à la question 2. Commenter.

### 3 Applications directes du cours

1. La lumière d'un faisceau laser est émise par des atomes effectuant une transition entre deux niveaux d'énergie distants de  $2,28 \text{ eV}$ . Quelle est la couleur de ce laser ?
2. (a) Calculer la longueur d'onde de De Broglie d'un homme de  $75 \text{ kg}$  marchant à la vitesse de  $5,0 \text{ km.h}^{-1}$ . Comparer à la largeur d'une porte et conclure.  
(b) Calculer les longueurs d'onde de De Broglie pour un électron et un proton, de masse  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  et  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , dont les énergies cinétiques valent  $100 \text{ eV}$ .
3. Quelle est l'indétermination quantique minimale sur la vitesse d'un coronavirus dont la masse est égale à  $2,4 \cdot 10^{-19} \text{ g}$  et dont l'indétermination quantique sur sa position, obtenue après un très grand nombre de détections de la même particule, vaut  $\Delta x = 10 \text{ nm}$  (soit un dixième de sa taille) ? Qu'en est-il pour un électron dont l'indétermination quantique sur la position est de  $\Delta x = 10 \text{ nm}$  ?



### 4 Interprétation du modèle de Bohr à l'aide de la longueur d'onde de De Broglie

En assimilant l'électron de l'atome de Bohr à une onde de de Broglie suivant son orbite et en considérant des états stationnaires, retrouver la condition de quantification de Bohr.

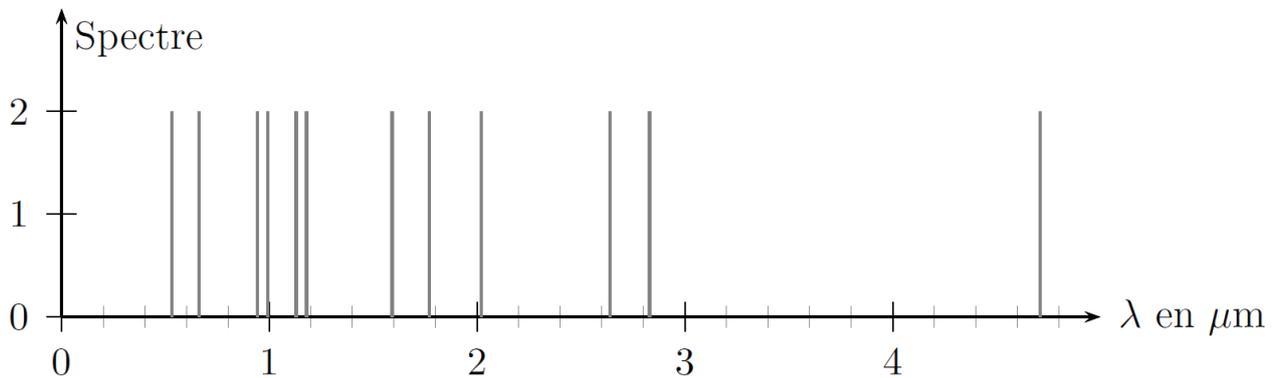
On pourra donner une représentation du profil de l'onde de de Broglie des états quantiques  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  et  $n = 4$ .

## 5 Puits quantique

On s'intéresse dans ce problème aux diodes laser à puits quantique de profondeur infinie et d'épaisseur fixe que l'on cherche à caractériser à partir de leur spectre d'émission.

On dispose pour cela de deux diodes à puits quantiques distinctes, numérotées 1 et 2, obtenues grâce à un même alliage à base d'arséniure de gallium. Ces diodes ne diffèrent que par leur épaisseur respective  $L_1$  et  $L_2$ . On peut modéliser chacune des diodes par un puits quantique dont l'extension suivant l'axe  $Ox$  est comprise entre  $x = 0$  et  $x = L$ . Le spectre d'émission correspond dans ces conditions aux transitions énergétiques possibles d'une particule libre confinée à l'intérieur de ce puits, c'est-à-dire sujette à une énergie potentielle nulle au sein du puits et infinie en dehors. Cette particule libre confinée, appelée "trou", possède une masse  $m = \alpha m_e$  avec  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg et  $\alpha > 0$  inconnu.

On observe le spectre suivant sur l'intervalle compris entre 0 et 5  $\mu\text{m}$ .



| $\lambda$ (en $\mu\text{m}$ ) | 0,530 | 0,662 | 0,942 | 0,993 | 1,13 | 1,18 | 1,59 | 1,77 | 2,02 | 2,64 | 2,83 | 4,71 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|

- À quel domaine de longueur d'onde correspondent les différentes transitions ?
- Citer deux types d'émission de photons. Les décrire succinctement. Comment s'appelle le processus inverse à l'émission ?
- Qu'entraîne le confinement de la particule matérielle de masse  $m$  dans le puits quantique ?
- Donner l'équation reliant la différence d'énergie mise en jeu lors d'une transition et la longueur d'onde du rayonnement correspondant à cette émission.

On souhaite déterminer l'épaisseur du puits quantique ainsi que la valeur du paramètre  $\alpha$  à partir des données fournies dans le spectre ci-dessus.

- À l'aide de quelle analogie peut-on obtenir la répartition des niveaux d'énergie dans le puits quantique ?
- Quelle caractéristique de la matière cette analogie met elle en avant ? Donner la relation traduisant cette dualité de la description de la particule matérielle. À qui doit on cette relation ?
- Citer une expérience ayant mis en évidence cette caractéristique de la matière et décrire cette expérience en quelques lignes.
- Établir dans ces conditions l'expression  $E_n$  de l'énergie du niveau  $n$  que peut prendre la particule matérielle au sein du puits quantique.

Les raies d'émission représentées ci-dessus correspondent en fait aux transitions entre les quatre premiers niveaux du diagramme énergétique pour les deux valeurs d'épaisseur du puits. Une valeur  $L_1 = 60 \text{ \AA}$  et une longueur  $L_2 > L_1$  inconnue.

- Déterminer les valeurs de  $L_2$  et de  $\alpha$ .

L'état d'un trou d'énergie  $E$  à l'intérieur du puits quantique est en réalité obtenue à partir de la résolution de l'équation suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{et} \quad E > 0$$

10. Que représente  $\varphi$ ? Comment s'appelle cette grandeur?
11. Justifier que  $\varphi(x)$  est nulle en dehors du segment compris entre  $x = 0$  et  $x = L$ .
12. On pose  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(L) = 0$ . Quelles sont les expressions possibles de  $\varphi$ ? On résoudra pour cela l'équation précédente.
13. En déduire les longueurs d'onde possibles associées à un trou.
14. Pourquoi la valeur  $n = 0$  n'est-elle pas physiquement acceptable?