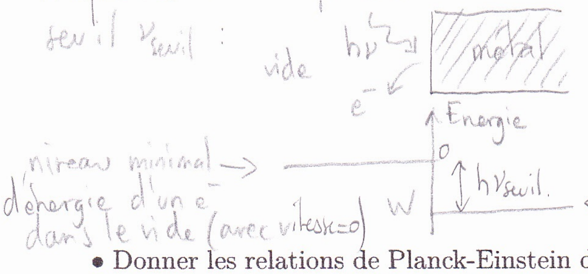
NOM : Prénom :

Interrogation de cours n°25

1 Mécanique quantique

- Expliquer en quoi consiste l'effet photoélectrique.

L'effet photoélectrique permet d'expliquer le fait qu'un rayonnement de fréquence ν ne puisse arracher un électron d'un métal qu'à partir d'un seuil ν_{seuil} :



$h\nu_{seuil} = -W$ ↳ travail d'extraction

← niveau d'énergie maximal pour un e^- dans le métal ($W<0$ dans un métal)

- Donner les relations de Planck-Einstein définissant l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon en fonction de sa longueur d'onde. Quelle relation lie E et p pour un photon ?

Pour un photon : $\begin{cases} E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} \\ p = \dfrac{h}{\lambda} \end{cases}$ donc pour un photon : $\boxed{E = pc}$

- Pour une particule quantique de masse m, donner l'expression de son énergie cinétique E_c et sa quantité de mouvement (relation de De Broglie) ? On donnera à nouveau l'énergie cinétique et la quantité de mouvement du quanton en fonction de sa longueur d'onde de De Broglie. Quelle relation lie E_c et p dans ce cas ?

Pour une particule quantique de masse m $\begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 \\ p = \dfrac{h}{\lambda_{DB}} = mv \end{cases}$ $E_c = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{h^2}{2m\lambda_{DB}^2}$

- Quand un problème doit-il être traité de manière quantique ?

Si $\lambda_{DB} \gtrsim L_{\text{caractéristique du système}}$, alors il faut utiliser un traitement quantique.

- Rappeler l'expression de l'inégalité spatiale d'Heisenberg à une dimension. On précisera la signification des termes introduits.

Relation d'indétermination de Heisenberg $\Delta x \, \Delta p_x \geqslant \dfrac{\hbar}{2}$ ou $\Delta x \Delta k \geqslant \dfrac{1}{2}$

où Δx et Δp_x sont des fluctuations statistiques d'origine quantique de la position et de l'impulsion (pas lié à l'incertitude de mesure).

2 Particule quantique libre

- Rappeler l'expression de l'équation de Schrödinger dans le cas général.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

→ dans le cas unidimensionnel.

- Qu'appelle-t-on un état stationnaire en mécanique quantique ?

En mécanique quantique, un état stationnaire s'écrit $\Psi(x,t) = f(x)g(t)$ avec f et g à valeurs complexes.

NOM : Prénom :

dans le cas unidimensionnel

• Comment s'écrivent les états stationnaires de l'équation de Schrödinger lorsque le potentiel est indépendant du temps (démonstration non demandée) ? Quelle est la particularité de leur densité de probabilité ?

Si le potentiel est indépendant du temps : $\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

avec φ qui vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

densité de probabilité

On déduit directement que $|\Psi(x,t)|^2 = |\varphi(x)|^2$ indépendant du temps

• Montrer que la fonction d'onde d'une particule quantique libre peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)} \qquad \text{ou} \qquad \psi(x,t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} + Be^{-\frac{i}{\hbar}(Et+px)}$$

Si la particule est libre, $V=0$, donc $\varphi(x)$ vérifie $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$

En posant $\omega = \frac{E}{\hbar}$ et $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, on peut écrire, sachant que $E>0$ pour une particule libre

$$\Psi(x,t) = \left.A e^{-i(\omega t - kx)} + B e^{-i(\omega t + kx)}\right] \text{"ONDE"}$$

et $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m\,p^2}{2m\hbar^2}} = \frac{p}{\hbar}$, donc $\Psi(x,t) = \underbrace{A e^{\frac{-i}{\hbar}(Et-px)} + B e^{\frac{-i}{\hbar}(Et+px)}}_{\text{"PARTICULE"}}$

$E = p^2/2m$

• Remplir le tableau suivant (on redémontrera uniquement la relation de dispersion et la vitesse de propagation dans le cas d'un quanton - toutes les autres expressions peuvent être données sans justification) :

	particule quantique libre (quanton)	comparaison avec le photon
Énergie	$E = p^2/2m = \hbar\omega$	$E = h\nu = \hbar\omega$
Impulsion (non relativiste)	$p = h/\lambda_{DB} = \hbar k$	$p = h/\lambda = \hbar k = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$
Relation de dispersion	(1) $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$ ou $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$	$k = \frac{\omega}{c}$ ou $\omega = kc$
Vitesse de propagation	(2) $v_g = \frac{\hbar k}{m}$	$v_g = c$

(1) $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \hbar\omega$, donc $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$

(2) $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right) = \frac{\hbar k}{m}$

• Retrouver l'expression du vecteur densité de courant de probabilité par analogie avec celle du vecteur densité de courant en électromagnétisme.

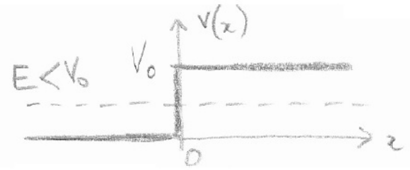
En électromagnétisme : $\vec{j} = \rho\vec{v}$

En quantique : $\vec{j} = |\Psi|^2\vec{v_g} = |\Psi|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{u_x}$

1 Particule quantique dans un potentiel

1.1 Marche de potentiel d'une énergie de la particule incidente inférieure à celle de la marche : $E < V_0$

• Faire un schéma et une analyse classique rapide.



Dans le cas classique, la particule ne passe jamais la marche si $E < V_0$.

• Calculer les états stationnaires pour $x < 0$ et $x > 0$, puis les fonctions d'onde correspondantes. On introduira les grandeurs k et δ dont on précisera l'expression et la signification, et les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ en amplitude.

$x<0$: $V(x)=0$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_1(x) = 0 \qquad \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$ vecteur d'onde

$$\Rightarrow \varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

$$\Psi_1(x,t) = A_1\left[e^{ikx} + \underline{r}\, e^{-ikx}\right] e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$x>0$: $V(x) = V_0 > E$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} - \frac{(V_0-E)2m}{\hbar^2}\varphi_2(x) = 0 \qquad \frac{(V_0-E)2m}{\hbar^2} = \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$$ profondeur de pénétration de l'onde dans la marche

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{-\frac{x}{\delta}} + \cancel{B_2 e^{\frac{x}{\delta}}}$$ $= 0$ car sinon diverge en $+\infty$

$$\Psi_2(x,t) = \underline{t} A_1 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

• Calculer les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de k et δ.

Comme le potentiel reste partout fini, il y a continuité de

$$\begin{cases} \varphi \text{ en } x=0 : & 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ \varphi' \text{ en } x=0 : & ik(1-\underline{r}) = -\frac{\underline{t}}{\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\underline{r} = \underline{t} \\ 1-\underline{r} = -\frac{(1+\underline{r})}{ik\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{t} = 1+\underline{r} \\ \boxed{\underline{r} = \frac{ik\delta+1}{ik\delta-1}} \end{cases}$$

et $$\underline{t} = \frac{ik\delta - 1 + ik\delta + 1}{ik\delta - 1} \Rightarrow \boxed{\underline{t} = \frac{2ik\delta}{ik\delta-1}}$$

• En déduire les probabilités de réflexion R et de transmission T. Calculer la densité de probabilité de présence après la marche. En quoi est-ce surprenant ?

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{\frac{\hbar k}{m}|\Psi_r|^2}{\frac{\hbar k}{m}|\Psi_i|^2} = |\underline{r}|^2 = \left|\frac{ik\delta+1}{ik\delta-1}\right|^2 = \boxed{1}$$, or $T = 1-R \Rightarrow \boxed{T=0}$

Pour $x>0$, $$|\Psi|^2 = |A_1|^2|\underline{t}|^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} = \frac{|A_1|^2\, 4k^2\delta^2}{(1+k^2\delta^2)} e^{-\frac{2x}{\delta}} \neq 0$$

surprenant car on a une probabilité nulle de passer, et pourtant on peut détecter la particule car $|\Psi|^2 \neq 0$!

• Donner une situation conduisant à des équations analogues en électromagnétisme.

L'analogue en électromagnétisme est le cas de la réflexion sur un plasma en dessous de la fréquence plasma

1.2 Barrière de potentiel et effet tunnel

• Montrer que dans le cas où $E < V_0$, dans la limite de la barrière épaisse, la probabilité de transmission s'écrit : $T \simeq e^{-\frac{2L}{\delta}}$, où L est l'épaisseur de la barrière et δ est la distance caractéristique de décroissance de l'amplitude de la fonction d'onde dans la barrière. Expliquer pourquoi on parle d'effet tunnel.

Barrière épaisse

$x<0$: $V(x)=0$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{=k^2}\varphi_1(x)=0$$

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

$x \in [0;L]$: $V(x)=V_0$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx_2} + \underbrace{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}_{<0\ \to\ -\frac{1}{\delta^2}}\varphi_2(x)=0$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{-\frac{x}{\delta}} + \cancel{B_2 e^{\frac{x}{\delta}}}$$

$\simeq 0$ dans l'hypothèse de barrière épaisse $L \gg \delta$

$x>L$: $V(x)=0$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{=k}\varphi_3(x)=0$$

$$\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} + \cancel{B_3 e^{-ikx}}$$

pas d'onde réfléchie à l'∞

Finalement : $T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{\frac{\hbar k}{m}|\varphi_3|^2}{\frac{\hbar k}{m}|\varphi_1|^2} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}e^{-\frac{2L}{\delta}} \simeq \boxed{e^{-\frac{2L}{\delta}}}$ si $\frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} \simeq 1$

↑ par continuité de φ en $x=L$: $A_2 e^{-\frac{L}{\delta}} = A_3 e^{ikL}$

On parle d'effet tunnel car la probabilité qu'une particule passe au travers de la barrière est non nulle, alors que $E<V_0$, ce qui est impossible classiquement. Tout se passe comme si la particule passait parfois par un tunnel sous la barrière.

1.3 Puits de potentiel infini

• Faire le calcul complet des états stationnaires à l'intérieur d'un puits infini unidimensionnel de largeur L, avec $V(x) = 0$ dans le puits.

A l'extérieur du puits : $\varphi(x)=0$; dans le puits, $V(x)=0$, donc comme
comme $V(x)\to\infty$
précédemment : $\varphi(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} = A_1\cos(kx) + B_1\sin(kx)$

Par continuité de φ en $x=0$ et $x=L$ (pas de continuité de $\frac{d\varphi}{dx}$ car $V\to\infty$).

$\varphi(x=0) = 0 = A_1$ et $\varphi(x=L) = B_1\sin(kL) \Rightarrow kL = n\pi$, $n\in\mathbb{N}^*$

donc $\varphi_n(x) = B_{1n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. B_{1n} peut être calculée par normalisation

$\int_0^L |\varphi|^2 dx = 1 = |B_{1n}|^2\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = |B_{1n}|^2\frac{L}{2} \Rightarrow$ en choisissant une phase nulle $B_{1n} = \sqrt{\frac{2}{L}}$

donc $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

• En déduire les énergies correspondantes et vérifier qu'on retrouve bien le même résultat qu'avec l'analogie avec la corde de Melde utilisée en MPSI.

Pour le nième mode dans le puits : $E_n = \underbrace{E_p}_{0 \text{ car } V(x)=0} + E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \boxed{\frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2mL^2}}$

C'est bien le même résultat que celui obtenu par analogie avec la corde de Melde, qui permettait de retrouver $k_n L = n\pi$ avec $\lambda_n = \frac{2L}{n}$