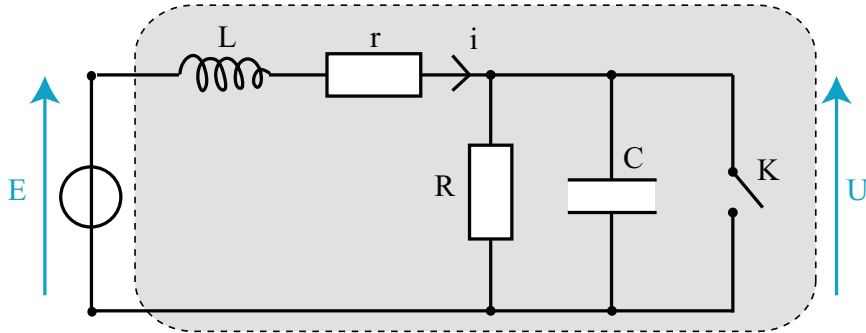


**Exercices d'oraux**

**ÉLECTRODYNAMIQUE ET SIGNAUX NUMÉRIQUES**

**1 Réponse d'un circuit du second ordre**

On considère le circuit du second ordre suivant. À  $t = 0$ , on ouvre l'interrupteur.



- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  pour  $t > 0$  et la mettre sous la forme :

$$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{E}{LC}$$

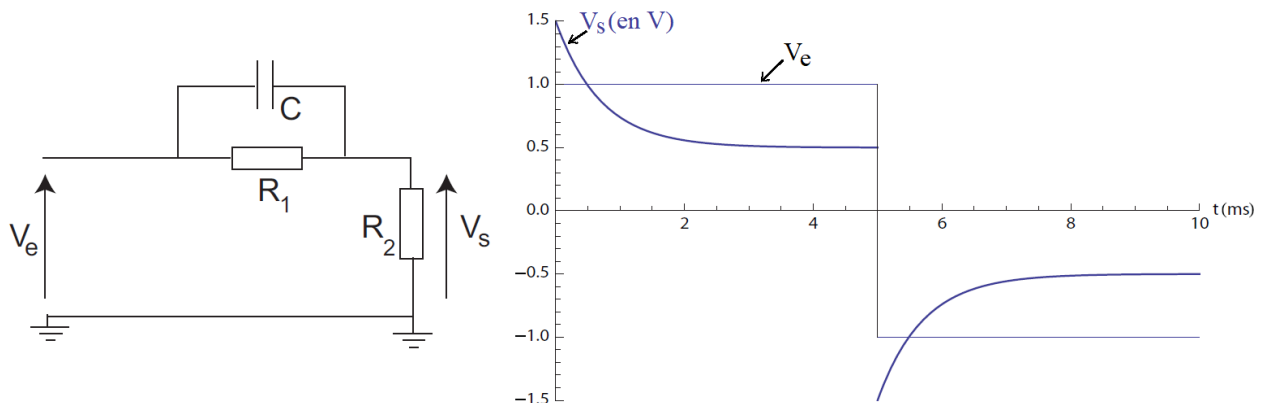
On précisera l'expression de  $\lambda$  et  $\omega_0$ .

- Résoudre l'équation différentielle précédente dans le cas où  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \in \mathbb{R}$  et donner l'expression de  $u(t)$  en faisant intervenir deux constantes  $A$  et  $B$  qu'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant.
- On suppose que pour  $t < 0$ , le régime permanent est établi. En déduire les expressions de  $u(t = 0^+)$ ,  $i(t = 0^+)$  et de  $\dot{u}(t = 0^+)$ .
- En déduire les expressions de  $A$  et  $B$  puis celle de  $u(t)$

Réponses : 1.  $\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right)$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left( 1 + \frac{r}{R} \right)}$ . 3.  $A = -E \frac{R}{r+R}$  et  $B = \frac{E}{\omega} \left[ \frac{1}{rC} - \frac{R}{2(r+R)} \left( \frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) \right]$ .

**2 Filtre du premier ordre**

Soit le filtre de la figure de gauche ci-dessous.



- Quel est son comportement asymptotique en basse et en haute fréquence ?

2. Établir la fonction de transfert. Faire apparaître deux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$ .
3. Tracer le diagramme de Bode en supposant que  $\omega_2 \gg \omega_1$ .
4. On prend  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ . Déterminer  $R_2$  et  $C$  à l'aide de l'oscillogramme de la figure de droite. Retrouver par le calcul les valeurs de la tension  $V_s$  au moment des discontinuités de  $V_e$ .

Réponses : 2.  $\underline{H} = \frac{K(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$  avec  $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C}$  et  $\omega_2 = \omega_1 + \frac{1}{R_2 C}$ , 4.  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$  et  $C = 200 \text{ nF}$ .

### 3 Centrale photovoltaïque

On s'intéresse à une centrale de taille comparable à celle de Martillac, près de Bordeaux, permettant d'alimenter en électricité une trentaine d'habitations.



Figure 1

– Centrale photovoltaïque de Martillac

Elle est constituée 126 modules de 4 panneaux. Chaque panneau est formé de  $9 \times 6$  cellules photovoltaïques, et chaque cellule possède une taille  $16 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ . Cette centrale produit environ  $100 \text{ kW}$  dans de bonnes conditions d'éclairement des modules. La caractéristique d'une cellule est donnée sur la figure suivante (Figure 2).

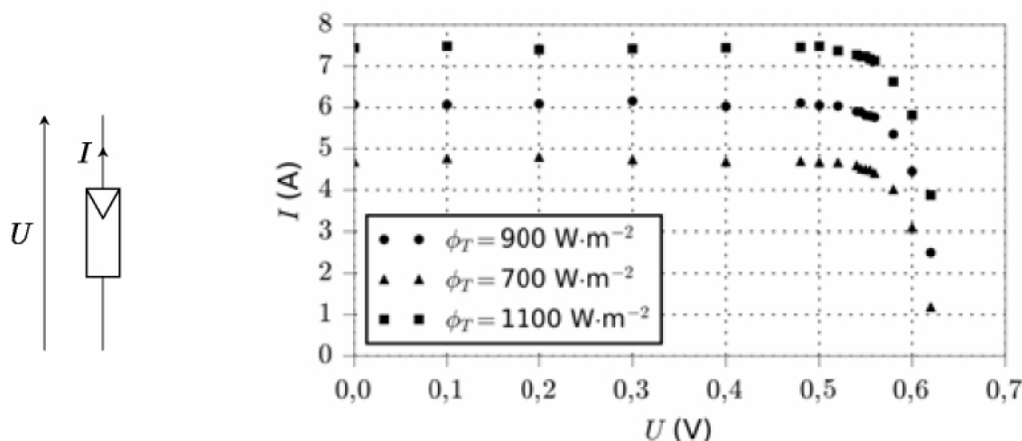


Figure 2 – Caractéristique d'une cellule photovoltaïque en convention générateur pour plusieurs valeurs différentes de l'éclairement  $\Phi_T$

- 1). Décrire précisément mais succinctement un protocole expérimental permettant de mesurer la caractéristique d'une cellule photovoltaïque telle que présentée sur la Figure 2.

On considère une cellule photovoltaïque recevant un flux  $\Phi_T \approx 900 \text{ W.m}^{-2}$ .

On mesure la tension  $U_m = 0,55 \text{ V}$  et l'intensité  $I_m = 5,8 \text{ A}$  correspondant au maximum de la puissance fournie par la cellule photovoltaïque.

Les  $9 \times 6$  cellules photovoltaïques d'un panneau sont en série tandis que les 4 panneaux d'un module sont en parallèle.

2) Déterminer la tension  $E$  aux bornes d'un module, l'intensité  $I_{\text{mod}}$  traversant ce module et la puissance  $P_{\text{mod}}$  délivrée par ce module. Retrouver l'ordre de grandeur de 100 kW délivré par la centrale solaire de Martillac.

3) D'après vous, en vous appuyant sur le document 1 et en argumentant, quelle est la composition des cellules utilisées dans la centrale de Martillac ?

4) Quel est l'ordre de grandeur de la puissance délivrée par la centrale lorsque, par temps partiellement nuageux, l'éclairement baisse à  $700 \text{ W m}^{-2}$ ? Commenter sur l'usage des centrales photovoltaïques.

### Document 1– Les différentes technologies de cellules photovoltaïques

*D'après EDF*

Différentes technologies entrent aujourd'hui dans la composition des installations photovoltaïques :

- Le silicium cristallin
- Le silicium amorphe
- Le cuivre/indium/sélénium
- Le cuivre/indium/gallium/sélénium

Les panneaux solaires à base de silicium cristallin sont les plus anciens. Ils se décomposent eux-mêmes en deux variantes : le monocristallin et le polycristallin. Ces deux variantes sont aujourd'hui très proches aussi bien en termes de rendement qu'en termes de coût. Le rendement d'un panneau photovoltaïque correspond à la quantité d'énergie solaire transformée par le panneau en électricité consommable, par rapport à l'énergie captée. Le rendement moyen d'un panneau cristallin du marché est de 14,5%.

La souplesse mécanique du silicium amorphe lui permet d'être essentiellement utilisé dans des complexes de type « membrane solaire » ou « tôle solaire ». Le rendement moyen des panneaux solaires à base de silicium amorphe est de 6 à 8%.

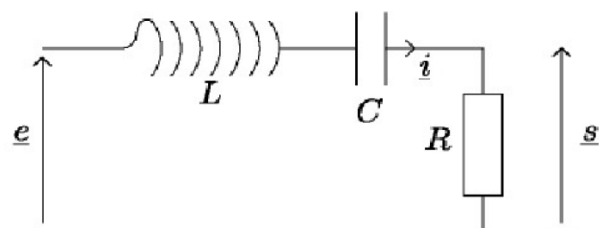
Aujourd'hui, des technologies émergent à base de cuivre / indium / sélénium et de cuivre / indium / gallium / sélénium. Elles offrent de grandes perspectives en termes de coût et de rendement.

## 4 Filtre RLC

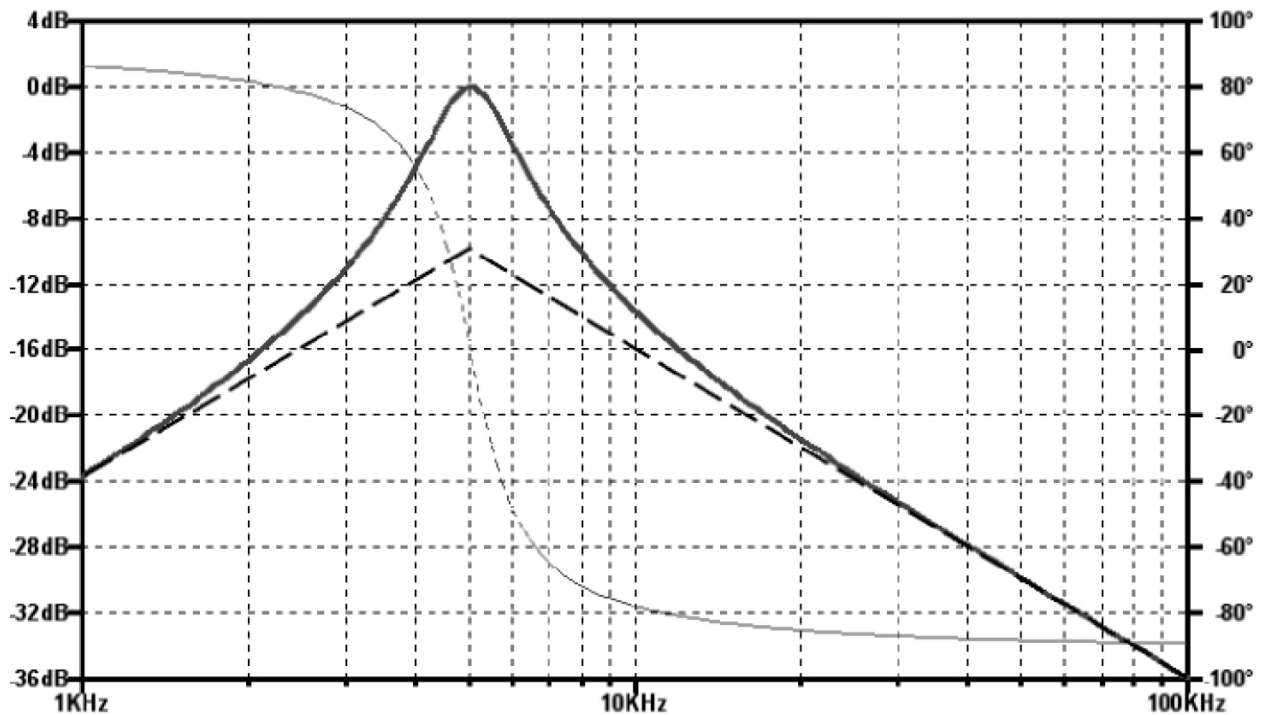
1) Calculer la fonction de transfert du filtre ci-dessous :

La mettre sous la forme canonique habituelle

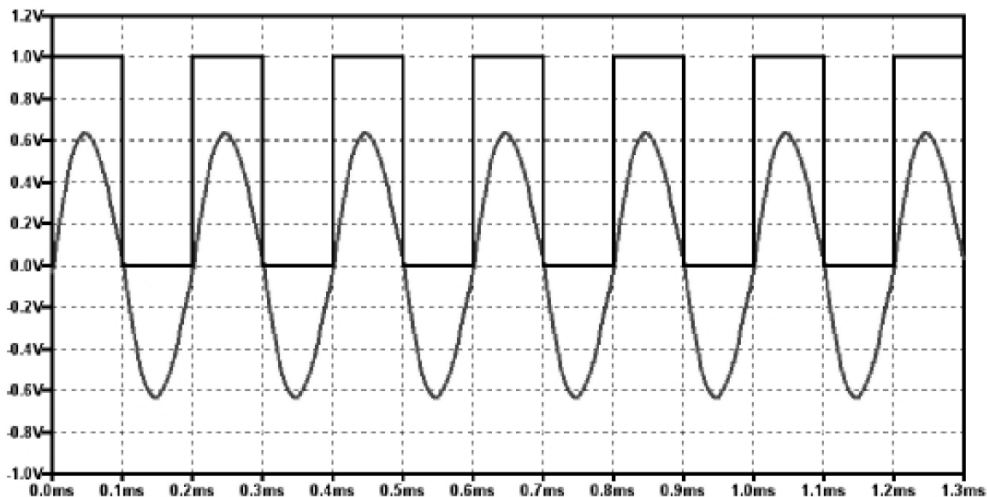
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$



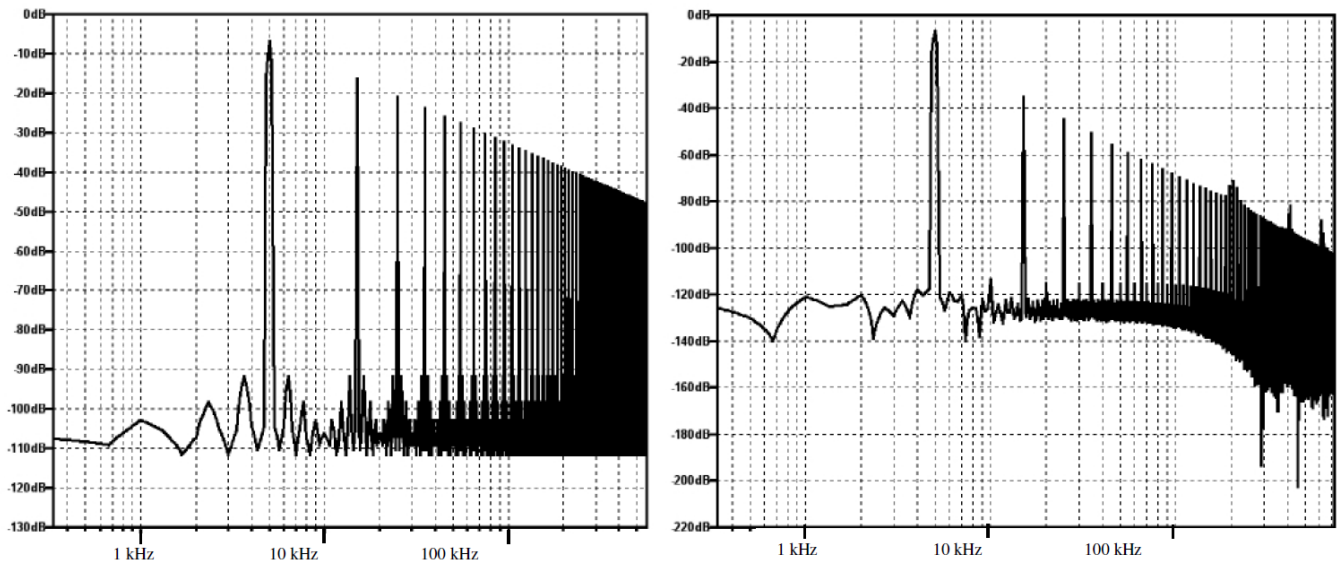
2) Déterminer à l'aide du diagramme de Bode suivant les valeurs de L et C. On donne :  $R = 100 \Omega$



3) On alimente le circuit précédent par un signal rectangulaire, et on mesure à l'oscilloscope les tensions en entrée et en sortie. Justifier les courbes obtenues par une analyse spectrale.

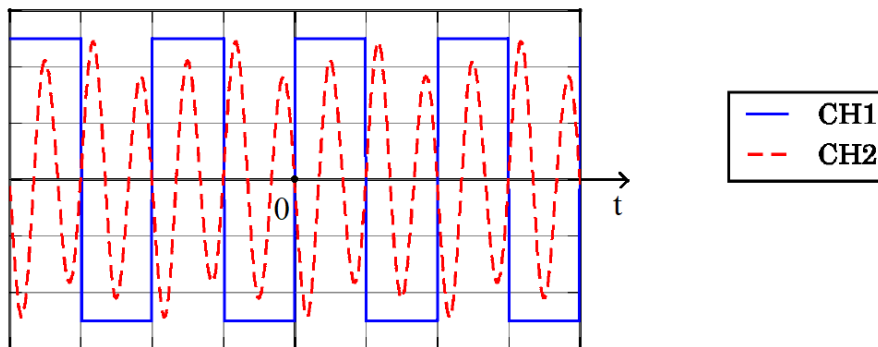


4) Une transformée de Fourier rapide (FFT), réalisable à l'aide d'un logiciel ou par un oscilloscope numérique, permet le calcul et l'affichage du spectre des signaux d'entrée et de sortie. Attribuer le bon spectre à chaque signal, et vérifier que ceux-ci sont en accord avec les résultats connus.



### 5 Etude expérimentale d'un filtre

La figure ci-dessous représente les signaux d'entrée (voie 1) et de sortie (voie 2) d'un filtre acquis via un oscilloscope numérique.



Time = 1 ms/div — CH1 = 1 V/div — CH2 = 500 mV/div

La fonction de transfert du filtre est donnée par :

$$H = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-2jxH_0\xi}{1 + 2jx\xi - x^2}$$

avec  $x = f/f_0$ ,  $H_0 = 2$ ,  $\xi = 0,05$  et  $f_0 = 1,5\text{kHz}$ .

1. Donner l'amplitude, la fréquence et la valeur moyenne du signal créneau.
2. Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bande et calculer numériquement la largeur de sa bande passante  $\Delta f$ .

On donne la décomposition en série de Fourier d'un signal créneau de fréquence  $f$  et de valeur moyenne nulle :

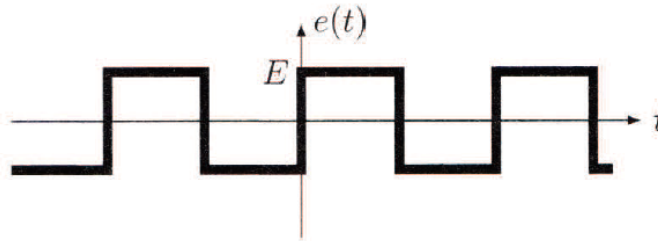
$$v_e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kft) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi kft)$$

3. Justifier que  $B_k = 0$  dans le cas du signal de l'oscillogramme. Représenter le spectre du signal sachant que  $A_k = 0$  si  $k$  est pair et  $A_k$  est proportionnel à  $1/k$  si  $k$  est impair.
4. Dans un premier temps, on approxime le signal de sortie par une sinusoïde parfaite  $v_s = V_{s\text{max}} \sin(\omega t + \varphi)$ . D'après l'oscillogramme, donner l'amplitude et la fréquence de la sinusoïde ainsi modélisée.
5. On prend cette fois-ci en compte deux sinusoïdes. Expliquer la courbe observée. Calculer le rapport de leurs amplitudes dans le signal de sortie.

## 6 Filtrage créneau

Soit le signal d'entrée créneaux  $e(t)$  suivant :

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin [(2p+1)\omega_0 t]$$



- Le signal est traité par un filtre de fonction de transfert  $\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$ .
  - Représenter et commenter le signal de sortie pour  $\omega_0 \gg \omega_c$ .
  - Représenter et commenter le signal de sortie pour  $\omega_0 \ll \omega_c$ .
- Le même signal est traité par un filtre de fonction de transfert :

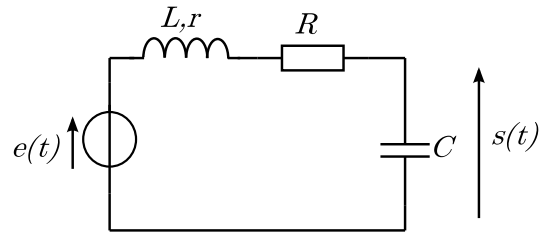
$$\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + 50j \left( \frac{\omega}{3\omega_0} - \frac{3\omega_0}{\omega} \right)}$$

Préciser la forme du signal de sortie  $s(t)$ .

## 7 Fil d'antenne. Filtre de Butterworth

### 1. Fil d'antenne.

On considère une antenne constituée d'un barreau de ferrite sur lequel est bobiné du fil de cuivre; cette antenne est adaptée au domaine des grandes ondes (quelques centaines de kilohertz). On admet que le schéma électrique équivalent est celui de la figure ci-contre, avec  $L = 5,0 \text{ mH}$  et  $r = 40 \Omega$ .



La source de tension a une force électromotrice  $e(t)$  proportionnelle au signal reçu; on suppose ici qu'elle dépend sinusoidalement du temps :  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  avec  $E_m = 100 \mu\text{V}$ .

On place un condensateur et une résistance en série avec la bobine et on prélève le signal  $s(t)$ .

Pour un canal d'émission donné, on doit ajuster la valeur de  $C$  pour obtenir une résonance aigüe autour de la fréquence centrale du canal.

- (a) Déterminer la fonction de transfert associée à l'antenne; la mettre sous forme canonique, en posant

$$x = \sqrt{LC}\omega \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{R+r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Quel est le gain correspondant? Tracer le diagramme de Bode en amplitude (on se place dans le cas de l'existence d'une résonance).

- (b) Déterminer la pulsation de résonance.

En supposant que  $\sigma \ll 1$ , déterminer la plage de valeurs possibles de  $C$  si l'ensemble des canaux occupe un intervalle de fréquence compris entre 150 kHz et 300 kHz.

- (c) Dans la suite, on considère un canal de fréquence centrale 162 kHz. Déterminer l'expression de la bande passante (on ne fera l'approximation  $\sigma \ll 1$  qu'une fois obtenue l'expression générale des pulsations de coupure).

Expliquer pourquoi il existe un compromis sur le choix de la valeur de  $R$ .

- (d) La bande passante à  $-3 \text{ dB}$  désirée a pour largeur 10 kHz; déterminer les valeurs de  $R$  et  $C$  qui conviennent. Quelle est l'amplitude  $S_m$  du signal reçu?

2. On considère à présent un autre filtre passe-bas du second ordre, appelé **filtre de Butterworth** (d'ordre 2). Ce type de filtre est utilisé pour amplifier le signal issu d'un microphone, mais sans modifier significativement les rapports d'amplitude des diverses composantes spectrales (fidélité au son reçu) : le gain doit varier le moins possible dans la bande passante.

- (a) En reprenant l'expression canonique d'une fonction de transfert de filtre passe-bas du second ordre (obtenue précédemment), déterminer la valeur limite du coefficient d'amortissement  $\sigma$  telle qu'il n'y ait pas de résonance.

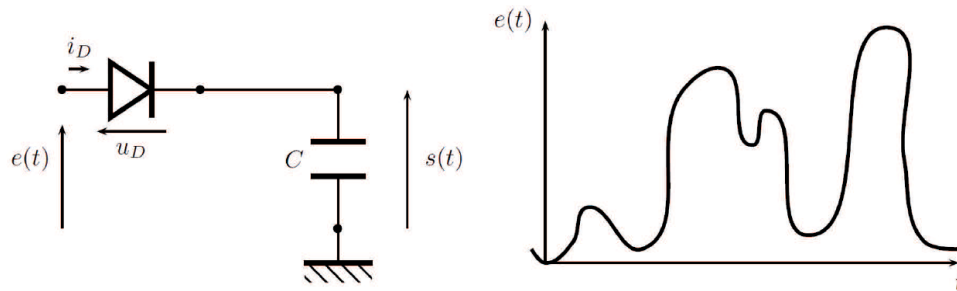
- (b) Déterminer alors l'expression du gain en fonction de la pulsation réduite  $x$  (prendre en compte un gain statique  $G_0$ ).

Tracer le diagramme de Bode en amplitude correspondant.

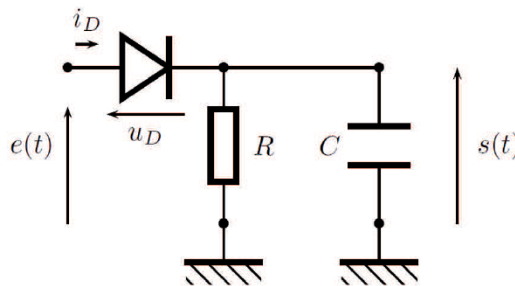
- (c) Quelle est la bande passante à  $-3 \text{ dB}$ ? La comparer à la bande passante asymptotique.

## 8 Détecteur de crête

On considère le montage de la figure ci-dessous composé d'une diode supposée idéale et d'un condensateur parfait de capacité  $C = 1\mu\text{F}$ .



- À la date  $t = 0$ , le condensateur est déchargé, il reçoit alors le signal  $e(t)$  représenté sur la figure ci-dessus. Représenter le signal  $s(t)$  que l'on obtient en sortie du montage. On apporte une petite modification au circuit de la figure précédente. On obtient alors celui de la figure suivante.



- Comment est modifié le comportement du circuit ? Discuter en fonction de la valeur de  $R$ .
- Le signal  $e(t)$  est maintenant une tension sinusoïdale de fréquence 500 Hz dont on souhaite mesurer la tension efficace. Représenter ce que l'on peut obtenir pour  $s(t)$ . Quelle valeur de  $R$  faut-il prendre afin que le circuit de la figure précédente se comporte comme un détecteur de crête ? Quel montage électrique simple proposeriez-vous afin de mesurer à la sortie de celui-ci directement la tension efficace ?

## 9 Numérisation d'un signal analogique

On désire numériser le signal analogique suivant :

$$s(t) = s_0 \left[ \cos(10\pi t) + \frac{1}{3}\cos(15\pi t) - \frac{1}{5}\sin(25\pi t) \right],$$

où  $t$  s'exprime en secondes.

- Quelle doit être la valeur minimale  $F_{e,min}$  de la fréquence d'échantillonnage pour que le signal soit correctement restitué ?
- On échantillonne le signal par niveaux de 0,5 V. Combien de bits sont nécessaires pour coder chaque valeur numérique si  $-5\text{ V} \leq s(t) \leq 5\text{ V}$  ?
- Quelle doit être la taille minimale de la mémoire nécessaire à l'enregistrement de deux minutes du signal ?
- On souhaite récupérer la composante  $\frac{s_0}{3}\cos(15\pi t)$ . Proposer un filtre numérique qui pourrait convenir. On précisera la relation de récurrence utilisée, ainsi que les valeurs des paramètres.



## 10 Résolution de problème - Filtrage d'un signal parasité

On souhaite déparasiter le signal temporel de la figure 1 de manière à obtenir, après filtrage, le signal de la figure 2 (échelles horizontales : temps en seconde).

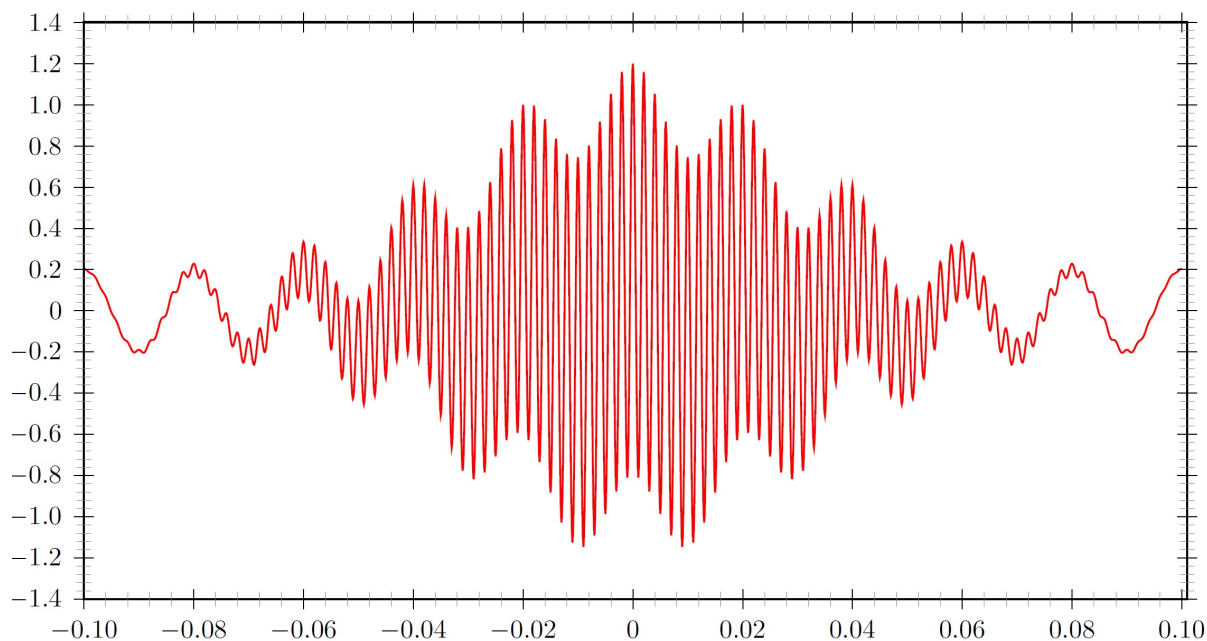


FIGURE 1 – Signal parasité par l'alimentation au secteur.

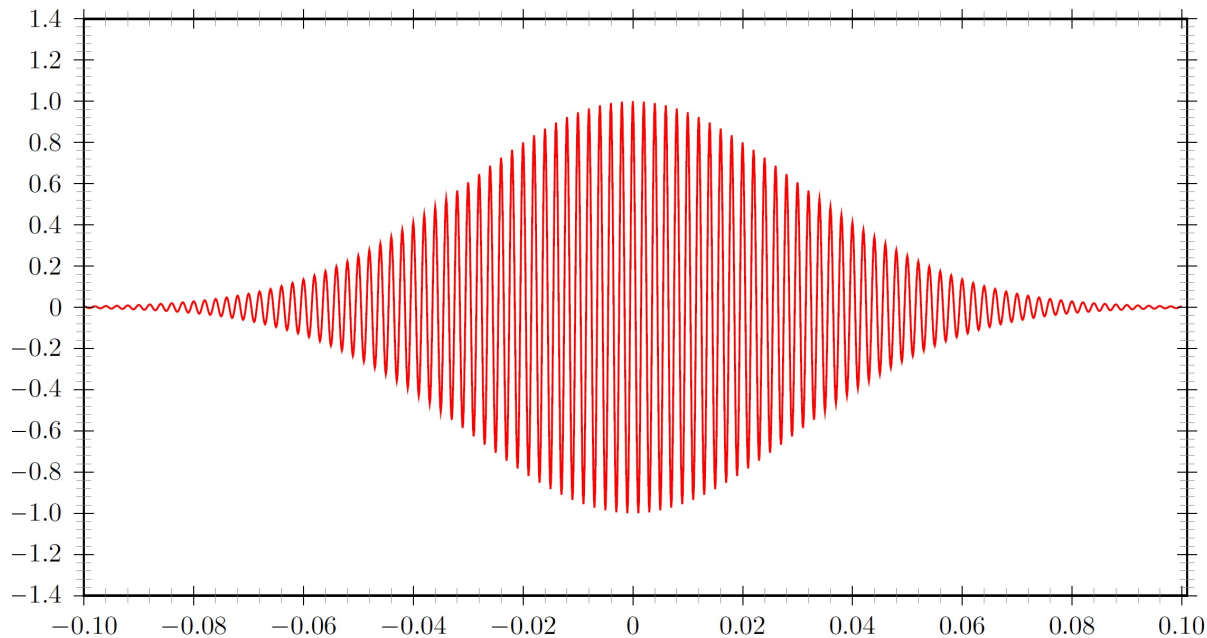


FIGURE 2 – Signal déparasité à obtenir.

Proposer un filtre analogique permettant de réaliser cette opération. On précisera la valeur des composants choisis.

## 11 Détection synchrone

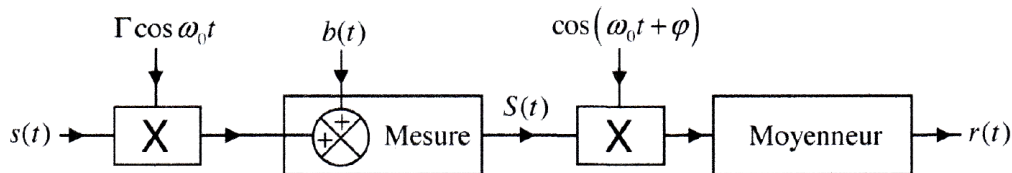
Un signal variant lentement au cours du temps, le plus souvent une tension à mesurer, est noté  $s(t)$ . Pour diverses raisons, le détecteur lui superpose du bruit inconnu, aléatoire, et à large spectre, noté  $b(t)$  et mesure en fait :  $s(t) + b(t)$ .

Il n'est pas rare que le signal soit totalement noyé dans le bruit, et donc impossible à mesurer directement. Il est parfois possible d'agir sur le signal pour le moduler, c'est-à-dire faire varier son amplitude ; c'est souvent le cas dans un laboratoire (mais pas toujours en réalité, penser par exemple au signal émis par la boîte noire d'un avion qui s'est abîmé en mer).

Dans ces conditions, la solution pour s'affranchir du bruit est la détection synchrone ; le signal est d'abord modulé ce qui revient à le multiplier par une fonction d'amplitude  $\Gamma$  et de pulsation  $\omega_0$  choisies :  $\Gamma \cos \omega_0 t$ . Le résultat de la mesure donne alors, en tenant compte du bruit introduit une nouvelle valeur :

$$S(t) = \Gamma s(t) \cos \omega_0 t + b(t)$$

Pour extraire le signal de cette mesure, il faut lui appliquer un traitement électronique ; il consiste à le multiplier (grâce à un circuit intégré multiplieur) par  $\cos(\omega_0 t + \varphi)$  pour obtenir le produit :  $P(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Dans la dernière étape, on utilise un moyennneur pour sortir un signal lentement variable  $r(t)$ .



1. Exprimer le produit  $P(t)$  issu du deuxième multiplieur, et montrer qu'il peut se mettre sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un est indépendant du signal.
2. Quel est la fonction du moyennneur ? Montrer qu'il est capable dans ce cas d'éliminer le terme indépendant du signal en le justifiant clairement.
3. Avec une approximation à préciser, montrer que la sortie du moyennneur permet de retrouver le signal isolé du bruit. On rappelle la formule :  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$  Comment choisir et ajuster  $\varphi$  en pratique ? Comment choisir la fréquence de coupure du moyennneur ?

---

**MECANIQUE DU POINT ET DU SOLIDE**


---

## 12 Résolution de problème - Remontée mécanique

On étudie un système de remontée mécanique. Ce système est composé d'un câble avec des poignées auxquelles les skieurs s'accrochent pour remonter (photo de gauche).

Données :

- longueur du câble sur laquelle les skieurs s'accrochent à la montée : 200 m
- espacement entre deux poignées : 5 m
- dénivelé de la remontée mécanique : 5 m
- vitesse du câble : 5 km/h
- coefficient de frottement des skis sur la neige :  $f = 0,1$



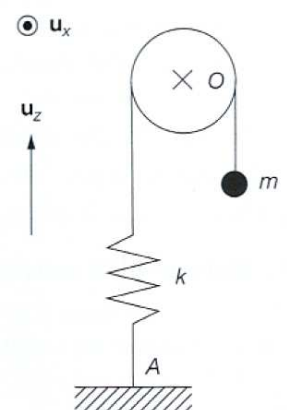
1. Estimer la puissance du moteur qui entraîne le câble de la remontée mécanique (photo de gauche).
2. Commenter le fait que ce type de remontée est progressivement remplacé par un système de tapis roulant (photo de droite).

## 13 Oscillations d'un système complexe

On considère le système suivant : ressort (raideur  $k$ ), poulie (rayon  $R$ , moment d'inertie  $J_{Ox}$ ) et objet de masse  $m$  (figure ci-contre).

Le fil est supposé souple, inextensible, de masse nulle et ne glissant pas sur la poulie, elle-même en liaison pivot parfait par rapport à l'axe  $Ox$  fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

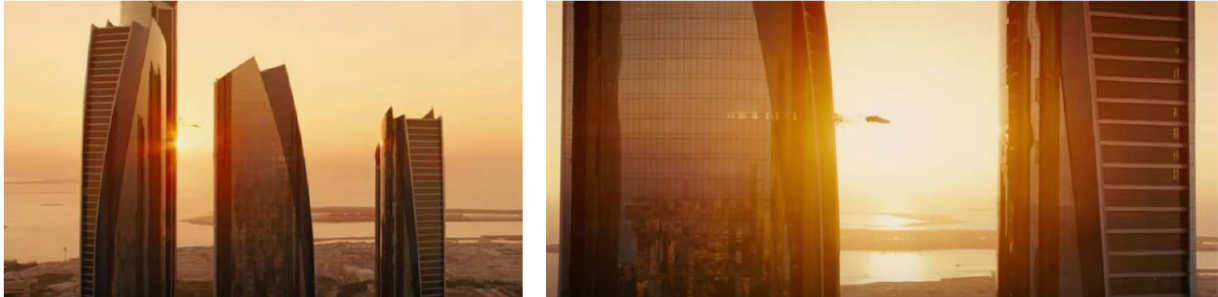
En utilisant une méthode énergétique, déterminer la période des oscillations.



Réponses :  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{J_{Ox}}{kR^2}}$ .

## 14 Résolution de problème - Fast and furious 7

La scène qui nous intéresse se déroule dans les Etihad Towers à Abu Dhabi, un complexe qui comprend cinq tours dont la plus grande mesure 300 m et la plus petite 200 m. Deux héros propulsent une voiture de course de ce qui semble être l'Etihad Tower 2, atterrissent dans l'Etihad Tower 3 et continuent en passant de la tour 3 à la tour 4, avec une distance de 50 m environ entre chaque tour.



« Pour couvrir 50 m dans cette période de temps, il faudrait que la voiture roule à 110 km/h si elle chute de 4 étages, ou 160 km/h pour une chute de deux étage. »

Lee Loveridge de Pierce College, en interview pour le site Vulture.

Vérifier les propos de Lee Loveridge. La voiture étant la Lykan HyperSport qui passe de 0 à 100 km/h en 2,8 s, estimer la longueur de la piste de départ. Commenter la crédibilité de la scène.

Vous effectuerez toutes les hypothèses qui vous semblent nécessaires pour résoudre simplement et efficacement ce problème.

## 15 Résolution de problème - Lance-pierres

On s'intéresse à un lance-pierre. En utilisant les photos ci-dessous dans lesquelles le lance-pierres est non tendu et tendu, déterminer à quelle vitesse est lancé le caillou.



## 16 Glissement du haut d'un igloo

On pose au sommet d'un igloo hémisphérique une petite pièce assimilable à un point matériel. On pousse très légèrement la pièce, de sorte qu'elle commence à chuter le long de l'igloo. A quel endroit la pièce décolle-t-elle de l'igloo si on néglige l'influence des frottements solides entre la pièce et la glace ?

## 17 Association de ressorts en série

Montrer que des ressorts associés en série se comportent comme des condensateurs en série, c'est à dire que :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

## 18 Résolution de problème - Chute libre... sans parachute !

### Document 1 : Le saut de Gary Connery

Le cascadeur anglais Gary Connery (ça ne s'invente pas...) a réalisé une performance incroyable le 23 mai 2012 : sauter d'un hélicoptère à 730 m d'altitude et atterrir sans utiliser son parachute... Un matelas de 18000 cartons, d'une longueur de 100m sur 15 m de large et 5 m d'épaisseur lui a servi de piste d'atterrissage (figure 1). Il était équipé d'une wingsuit (combinaison volante) de façon à ralentir un maximum sa vitesse (figure 2). Après quelques turbulences qui ont fait grandement osciller son corps, il est parvenu à garder sa trajectoire et atterrir sans problème dans ce lit de cartons. L'ensemble du saut a duré environ 50 secondes. Au cours du vol, un GPS a permis de repérer son altitude en fonction du temps (figure 3).



Figure 1 : Le saut de Gary Connery



Figure 2 : combinaison volante « wingsuit »

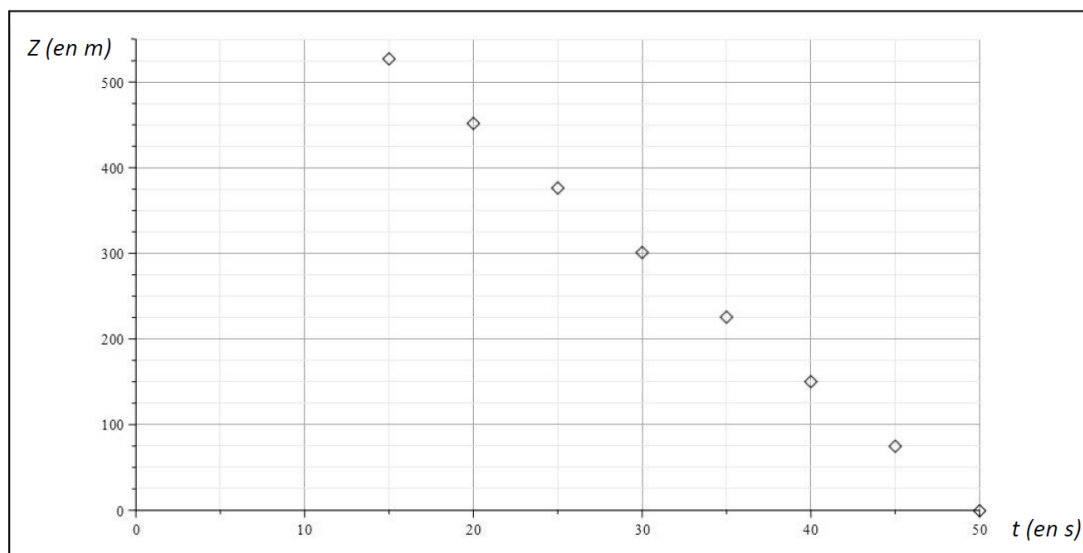


Figure 3 : Enregistrement de vol (Les premières mesures, imprécises en raison des oscillations dues aux turbulences n'ont pas été représentées).

## Document 2 : La traînée (Extrait de l'encyclopédie en ligne Wikipédia)

En mécanique des fluides, la traînée est la force qui s'oppose au mouvement d'un corps dans un liquide ou un gaz pesant et agit comme un frottement. Mathématiquement, c'est la composante des efforts exercés sur le corps, dans le sens opposé à la vitesse relative du corps par rapport au fluide.

L'analyse dimensionnelle montre que la traînée d'un obstacle peut s'écrire dans le cas d'un écoulement turbulent sous la forme :

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot V^2$$

Où :

$\rho$  est la masse volumique du fluide

$S$  est la surface de référence, soit la surface projetée dans le plan orthogonal à la vitesse

$C_x$  est le coefficient de traînée

$V$  est la vitesse

Vous répondrez aux questions suivantes en vous aidant des documents et de vos connaissances. Vous ferez les approximations que vous jugerez pertinentes et les discuterez a posteriori.

1. Évaluer un ordre de grandeur de la vitesse de Gary Connery à l'arrivée. À quelle hauteur de chute, sans la wing-suit, cela correspondrait-il ? Estimer le coefficient de traînée avec la wing-suit.
2. On estime que les cartons se sont écrasés sur 80% de leur épaisseur. Estimer l'épaisseur minimale de carton pour éviter une chute mortelle.

*Indication : on rappelle que des oscillateurs harmoniques de même longueur à vide s'associe en série comme des condensateurs.*

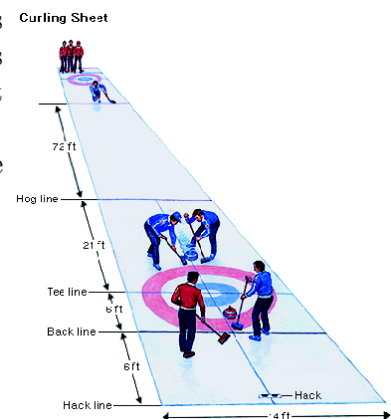
## 19 Curling olympique

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres lourdes en granite poli. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible dessinée sur la glace, appelée maison. Ce sport est présent aux jeux olympiques depuis 1998.

La pierre de curling (masse  $m = 20 \text{ kg}$ ) est lancée avec une vitesse initiale  $v_0$  sur la piste horizontale.

Soit  $k_d$  le coefficient de frottement solide dynamique glace/pierre.

Données :  $k_d = 0,05$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$



1. Pourquoi les joueurs de curling balayent-ils frénétiquement devant la pierre ?
2. Déterminer la distance parcourue par la pierre jusqu'à ce qu'elle s'arrête.
3. Déterminer le travail de la force de frottement et le comparer à la variation d'énergie cinétique au cours du mouvement. Commentaires.
4. Entre quelles valeurs doit être comprise la vitesse initiale pour que la pierre s'arrête dans le cercle qui permet de marquer des points, situé à une distance comprise entre 26,84 m et 29,89 m de l'endroit du lancer ?

Réponses : 4.  $5,1 \text{ m.s}^{-1} \leq v_0 = \sqrt{2k_d g x(t_{arr})} \leq 5,4 \text{ m.s}^{-1}$ .

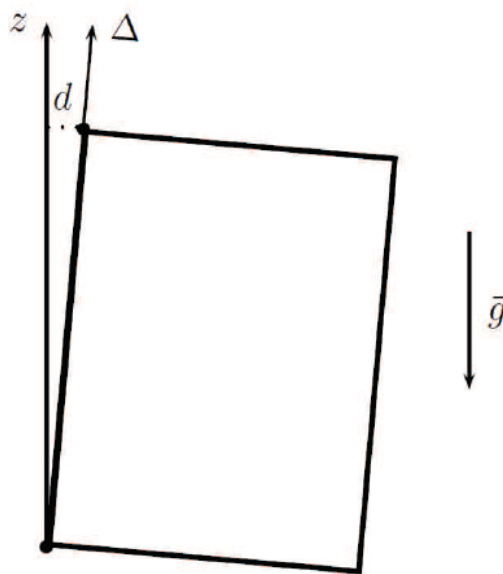
## 20 Oscillations d'une porte

Une porte de masse  $m$  est assimilable à une plaque rectangulaire homogène de hauteur  $h = 2$  m et de largeur  $a = 1$  m. Elle est mobile sans frottements autour de l'axe  $\Delta$ , cet axe passe par la partie des deux gonds qui sont posés sur la porte.

Malheureusement, à la suite d'une malfaçon, l'un des deux gonds de la porte n'est pas fixé correctement au mur. En effet, il résulte de cette malfaçon que les deux gonds de la porte ne sont pas alignés sur une même verticale.

Le gond supérieur se trouve, en réalité, à la distance  $d = 1$  cm de la verticale passant par le gond inférieur. Les deux gonds sont supposés distants de  $h$ , ce qui signifie qu'ils sont installés aux extrémités de la plaque rectangulaire constituant la porte. On suppose que la porte ne frotte pas sur le sol lors de son mouvement malgré le défaut de positionnement des gonds.

On donne le moment d'inertie de la porte par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$  :  $J_{\Delta} = \frac{1}{3}ma^2$ . Le champ de pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la porte lorsqu'elle n'est soumise à aucune force exercée par un utilisateur qui voudrait l'ouvrir ou la fermer.
2. Expliquer que le mouvement va être périodique.
3. Déterminer la période des petites oscillations de la porte.

Réponses : 3.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{2ha}{3gd}}$

## 21 Comète de Halley

La comète de Halley a une période de 76,03 ans. Elle passe au plus près à 0,53 UA du Soleil (UA = distance Terre-Soleil).

1. Calculer le demi grand axe de l'ellipse décrite par la comète de Halley,
2. En déduire la plus longue distance pouvant la séparer du Soleil.

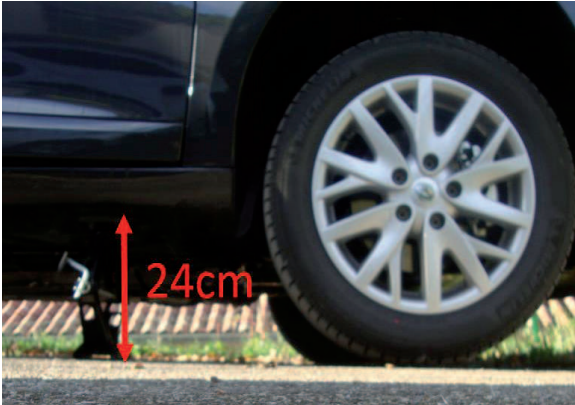
Réponses :  $a = 18.0 \text{ UA}$  et  $r_{max} = 35.5 \text{ UA}$ .



## 22 Résolution de problème - Mal au cœur en voiture

Pour des fréquences inférieures à  $0,5Hz$ , les organes internes du corps (en particulier l'estomac) entrent en résonance et le mal des transports apparaît.

On donne deux photos d'une roue avec et sans cric :



Mesure indiquée sur la photo : 24 cm



Mesure indiquée sur la photo : 14 cm

Aurons-nous mal au cœur dans cette voiture ?

## 23 Frottement de l'atmosphère sur un satellite à basse altitude

Un satellite, de masse  $m$ , décrit une orbite circulaire à l'altitude  $h$  autour de la Terre ( $M_T$ ,  $R_T$ ).

- Calculer la norme  $v$  de la vitesse en fonction des données, en négligeant les frottements.
- Montrer qu'en l'absence de frottement, les énergies potentielle, cinétique et mécanique du satellite sont telles que :  $E_m = -E_c = \frac{E_p}{2}$ .
- Le satellite subit en fait des frottements dus à la présence de l'atmosphère.
  - Que peut-on dire de l'énergie mécanique du satellite ? On admet cependant que les résultats précédents restent valables en première approximation.
  - Que peut-on alors dire de l'évolution de l'altitude du satellite ?
- Soit  $dh$  l'évolution de l'altitude du satellite à chaque rotation ( $|dh| \ll h$ ). Trouver la relation liant la variation de vitesse  $dv$  à la variation d'altitude  $dh$  à chaque tour. Commenter.

Données :  $dh = -1m$  ;  $h = 500km$  ;  $M_T = 5.98 \times 10^{24}kg$  ;  $R_T = 6.37 \times 10^3km$ .

Réponses : 4.  $dv = -\frac{\sqrt{GM_T}}{2(R_T+h)^{3/2}}dh = 0.56mm.s^{-1}$ .



## 24 Mouvement d'une météorite

Très loin de la Terre, une météorite a une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ , portée par une droite  $\Delta$  située à la distance  $b$  du centre de la Terre. On note  $m$  la masse de la météorite.

- Déterminer la distance minimale  $d$  entre le centre de la Terre et la météorite.
- Déterminer la valeur minimale  $b_{\min}$  de  $b$  pour que la météorite ne rencontre pas la Terre.
- Dans le cas où  $b > b_{\min}$ , on note  $\vec{v}_f$  la vitesse finale atteinte par la météorite.
  - Exprimer sa norme  $v_f$  en fonction de  $v_0$ .



- (b) Exprimer le produit  $r^2\dot{\theta}$  en fonction de  $b$  et  $v_0$ .
  - (c) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir une relation entre  $\vec{v}_f, \vec{v}_0$ , et les vecteurs unitaires  $\vec{u}_{\theta 0}$  correspondant à  $\vec{v}_0$  et  $\vec{u}_{\theta f}$  correspondant à  $\vec{v}_f$ .
  - (d) En déduire l'angle de déviation  $\varphi$  de la météorite.
4. Calculer  $b_{\min}$ . Calculer  $\varphi$  pour  $b = 1,5b_{\min}$ , avec  $v_0 = 11 \text{ km s}^{-1}$ .

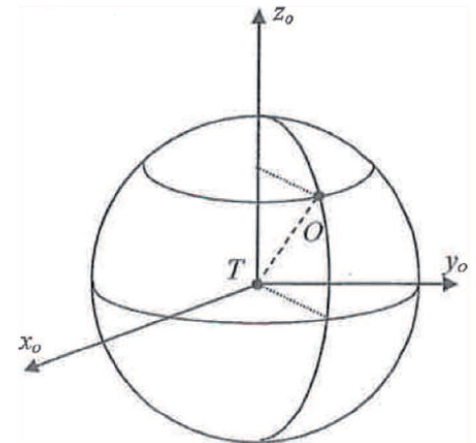
Réponse : 1.  $d = -\frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{b^2 + \frac{G^2 M_T^2}{v_0^4}}$ , 3d.  $\varphi = -2\arctan\left(\frac{GM_T}{bv_0^2}\right)$ . 4.  $b_{\min} = 9,1 \times 10^3 \text{ km}$  et  $\varphi = -0.47 \text{ rad}$ .

## 25 Courant marin

Afin de mettre en évidence un courant marin présent dans l'océan Atlantique, des scientifiques s'intéressent au mouvement d'une bouée B, de masse  $m$ , assimilée à un point matériel.

Dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_0 (T, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$  supposé galiléen, où  $\vec{e}_{z_0}$  est le vecteur unitaire de l'axe de rotation de la Terre (centre T, masse  $M_T$ , rayon  $R_T$ ), cette bouée est soumise à la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_{\text{int}}$  avec la Terre, et on notera  $\vec{R} = R\vec{e}_z$  (avec  $R > 0$ ) la poussée d'Archimède due à l'eau sur la bouée (on négligera la poussée d'Archimède de la part de l'air ainsi que les frottements).

Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est pris en un point O de la surface terrestre, avec  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire dirigé de T vers O,  $\vec{e}_x$  dirigé vers l'est et  $\vec{e}_y$  dirigé vers le nord.



À l'instant initial, la bouée se trouve à l'origine du référentiel terrestre, avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$  dans  $\mathcal{R}_T$ . On suppose que le mouvement de la bouée s'effectue dans le plan horizontal  $xOy$ , à la latitude  $\lambda$  de  $30^\circ$  dans l'hémisphère nord.

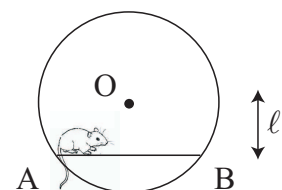
On souhaite étudier le mouvement de la bouée B par rapport au référentiel terrestre non galiléen  $\mathcal{R}_T$ . On note  $\vec{\Omega}_T = \Omega_T\vec{e}_{z_0}$  le vecteur rotation de la Terre par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Soit  $G$  la constante universelle de gravitation, et  $\vec{g}$  le champ de pesanteur terrestre.

1. Représenter sur un schéma la latitude  $\lambda$ .
2. Exprimer la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_{\text{int}}$  exercée par la Terre sur B. On note  $(x, y, 0)$  les coordonnées de B à un instant  $t$  quelconque, avec, à tout instant,  $x \ll R_T$  et  $y \ll R_T$ .
3. Exprimer la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{\text{ie}}$  subie par B dans  $\mathcal{R}_T$ .
4. Exprimer la force d'inertie de Coriolis  $\vec{F}_{\text{ic}}$  subie par B dans  $\mathcal{R}_T$ .
5. Exprimer le poids  $\vec{P}$  de B dans  $\mathcal{R}_T$  en fonction des forces définies précédemment. Pour la suite de l'exercice, on considère que le poids  $\vec{P}$  est dirigé selon  $-\vec{e}_z$ .
6. Exprimer  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  en fonction de  $x, y$ , et des données de l'énoncé.
7. (a) Montrer que l'énergie cinétique de la bouée dans  $\mathcal{R}_T$  se conserve au cours de son mouvement.  
(b) En déduire alors la trajectoire de la bouée.

Réponses : 6.  $\dot{x} = 2\Omega_T y \sin\lambda + v_0$  et  $\dot{y} = -2\Omega_T x \sin\lambda$ .

## 26 Souris

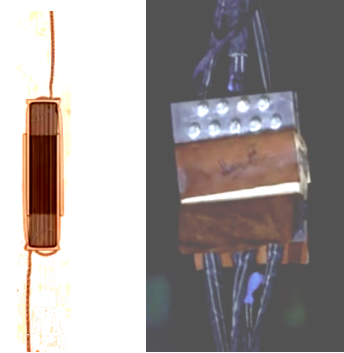
Une souris peut se déplacer sur un plateau AB solidaire d'une roue pouvant tourner sans effort autour d'un axe horizontal passant par O. Comment la souris doit-elle se déplacer sur le plateau de A à B pour que celui-ci reste horizontal à tout instant ?



## 27 Résolution de problème : peut-on confier sa vie aux forces de frottement ?

Un américain a très récemment réalisé un saut à l'élastique avec un élastique coupé en deux, "raccourci" en intercalant les pages de deux livres fixés aux deux extrémités des deux morceaux d'élastique. Les détails du "show" sont visibles sur la vidéo : <http://vimeo.com/64918615> ou sur le site de la classe.

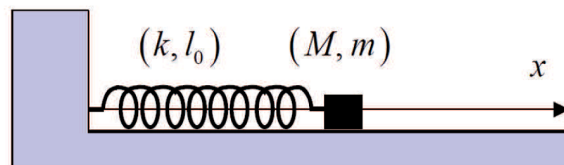
En faisant des hypothèses raisonnables et en introduisant les ordres de grandeurs nécessaires, estimer le nombre de pages nécessaires pour pouvoir réaliser l'expérience. Auriez-vous tenté l'expérience telle qu'elle a été réalisée ?



*Données* : d'après cette vidéo, le saut est effectué depuis une hauteur initiale d'environ 50 m (160 pieds) ; la personne chute d'environ 20 m avant que l'élastique ne commence à s'allonger ; l'élastique s'étire au maximum d'environ 15 m. On observe également qu'un ruban adhésif entoure globalement le livre. On pourra considérer que le ruban adhésif entourant les pages du livre ainsi que la couverture des livres exercent une force normale d'environ 10 N.

## 28 Frottements solides et portrait de phase

On considère un point  $M$ , de masse  $m$ , susceptible de se déplacer sur l'axe  $(O, x)$  horizontal. La masse est fixée à l'extrémité d'un ressort sans masse, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , son autre extrémité étant attachée à un support fixe.

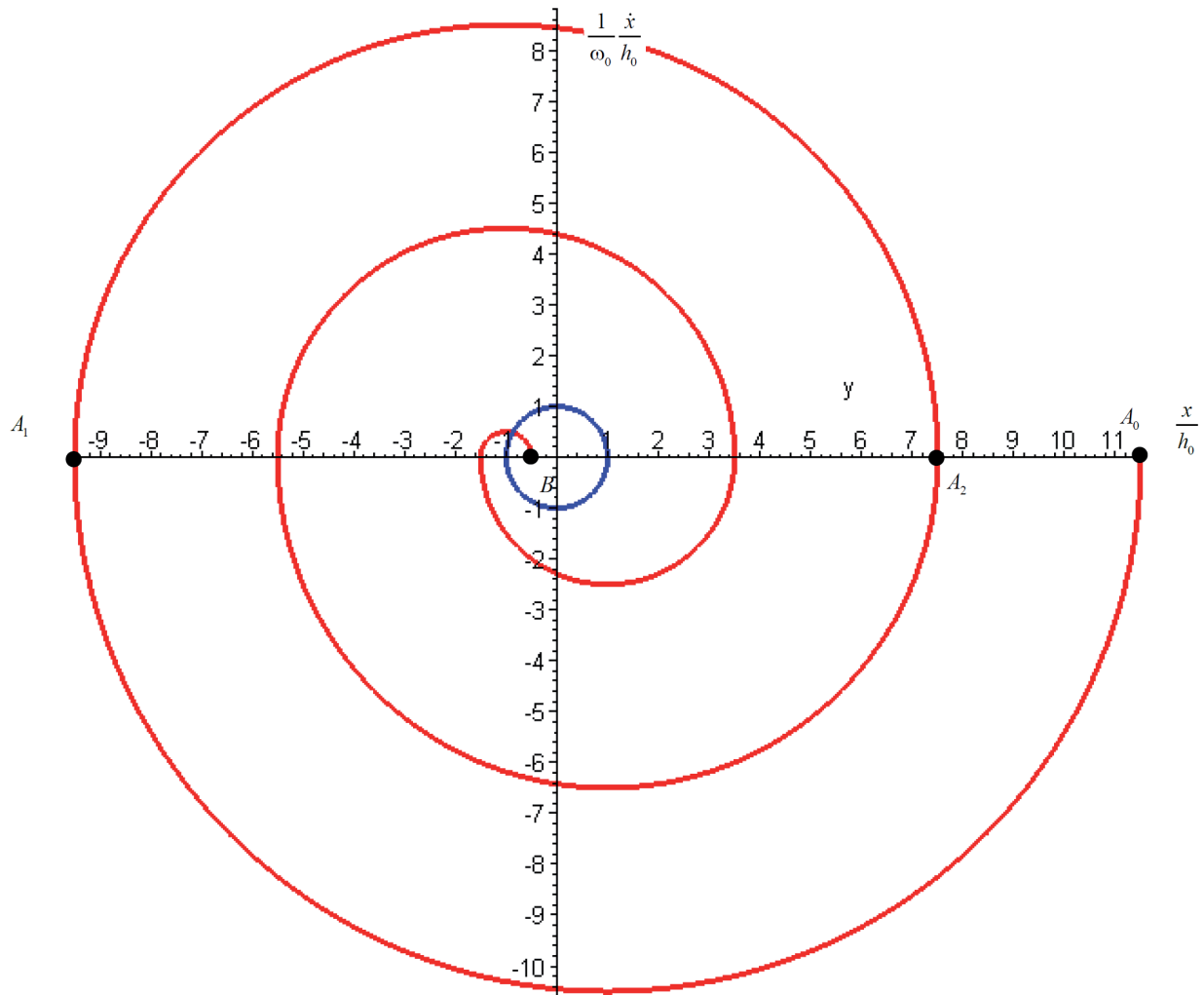


Le point est soumis en outre à une force de frottement solide dont la composante horizontale algébrique  $f = \vec{f} \cdot \vec{u}_x$  est ainsi définie,  $C$  étant une constante positive :

$$f = \vec{f} \cdot \vec{u}_x \text{ est ainsi définie, } C \text{ étant une constante positive : } \begin{cases} f = -C \text{ si } \dot{x} > 0 \\ f = +C \text{ si } \dot{x} < 0 \\ -C \leq f \leq +C \text{ si } \dot{x} = 0 \end{cases}$$

On repère le point à partir de l'origine  $O$  définie par la position de  $M$  lorsque le ressort n'est ni étiré, ni comprimé :  $\vec{OM} = x\vec{u}_x$ . On libère le système sans vitesse initiale, à l'abscisse  $x_0 > 0$ .

1. Écrire l'équation différentielle du mouvement ; en quoi diffère-t-elle des équations d'oscillateur harmonique que vous connaissez ? Montrer que l'abscisse  $x_e$  d'une position d'équilibre vérifie  $|x_e| \leq h_0$  où  $h_0$  est à déterminer.
2. On donne ci-dessous le portrait de phase du mouvement du point à partir d'un état initial particulier, noté  $A_0$ . La grandeur portée en abscisse est  $y = x/h_0$  et celle portée en ordonnée  $\dot{y}/\omega_0$ , où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . En vous aidant du portrait de phase, écrire l'équation différentielle du mouvement entre les points  $A_0$  et  $A_1$  et donner sa solution  $x(t)$  en fonction de  $x(A_0) = x_0$ ,  $h_0$  et  $\omega_0$ .
3. Que se passe-t-il quand le point arrive en  $A_1$  ? Écrire et résoudre de même l'équation du mouvement entre les points  $A_1$  et  $A_2$ .
4. Décrire l'évolution ultérieure du mouvement du point. Que se passe-t-il lorsque le point arrive en  $B$  ? Combien de temps a duré le trajet  $[A_0, B]$  ?
5. Vérifier numériquement sur le portrait de phase les résultats que vous avez obtenus.



## 29 Mouvement sinusoïdal avec frottements

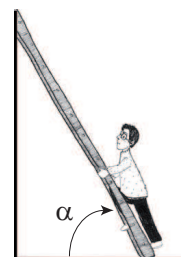
Déterminer l'expression de la force que doit exercer un opérateur pour qu'un mobile posé sur un support horizontal décrive une oscillation sinusoïdale suivant une direction donnée, en présence de frottement solide. On ne distinguera pas les coefficients de frottement de glissement statique et dynamique.

## 30 Comment positionner une échelle sur un mur ?

Une échelle est posée contre un mur vertical, son autre extrémité reposant sur le sol horizontal. Le coefficient de frottement entre l'échelle et le sol est  $f$ . On néglige le frottement entre l'échelle et le mur.

Quelles conditions doit respecter l'utilisateur s'il veut éviter que l'échelle ne glisse sur le sol ?

On négligera la masse de l'échelle devant celle de l'utilisateur et on supposera que l'utilisateur reste vertical quand il grimpe à l'échelle.



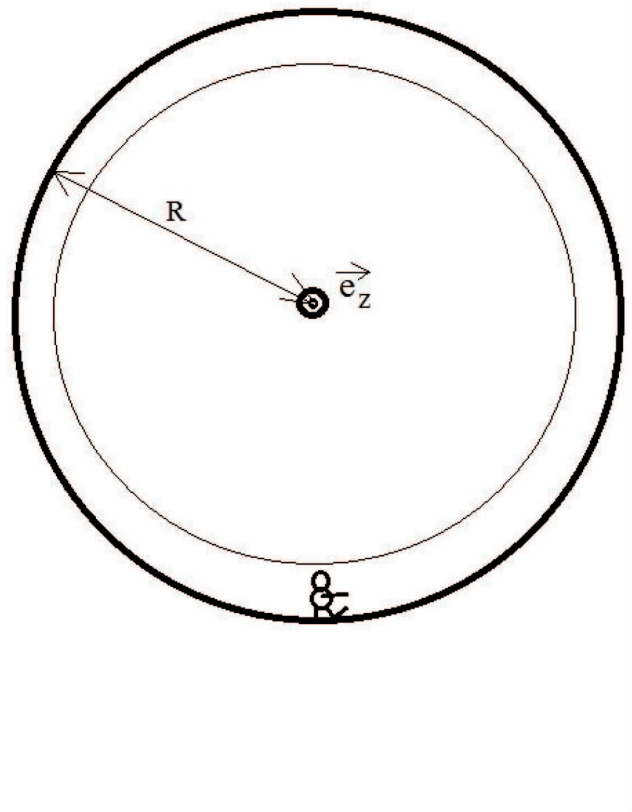
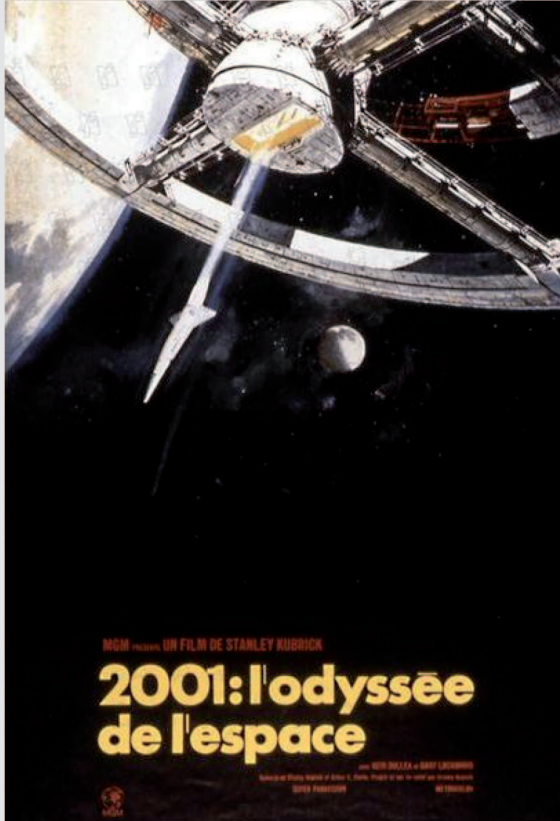
Réponse :  $f \tan \alpha > 1$ .

### 31 Résolution de problème - 2001 l'odyssée de l'espace

D'après les scènes du film  
de Stanley Kubrick

Comment créer une pesanteur artificielle dans l'espace ?

Dans le film "2001 l'odyssée de l'espace" de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore de rayon  $R$  tourne autour de son axe  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$  constante dans un référentiel galiléen.



A gauche : affiche du film où l'on voit le vaisseau spatial et schéma (à droite) du vaisseau.

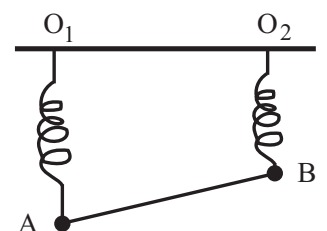
1. Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore du vaisseau spatial comme sur Terre : ils sont soumis à une gravité artificielle. Évaluer les valeurs numériques de  $R$  et de  $\omega$  pour que les astronautes subissent une gravité artificielle de valeur  $g = 9,81 m \cdot s^{-2}$ , à 10% près entre les pieds et la tête.
2. Dans l'une des scènes du film, un astronaute (Poole) fait un jogging dans le tore. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant pour lui de courir dans la station spatiale (on choisira les valeurs numériques pour illustrer le raisonnement). Le sens choisi pour faire le footing est-il important ?

### 32 Oscillateur mécanique

On considère le système mécanique de la figure ci-contre, constitué d'une barre de masse  $m'$  suspendue par ses extrémités munies de deux masses  $m$  à deux ressorts de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ .

Déterminer les pulsations des modes propres dans le cadre des petites oscillations.

Remarque : on notera qu'on peut appliquer le théorème du moment cinétique au centre de masse  $G$  du système comme si ce point était immobile (cas particulier du théorème du moment dynamique).



$$\text{Réponses : } \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m' + 2m}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m + m'/6}}.$$

### 33 Attraction de fête foraine : *reverse bungee*

Un habitacle en forme de boule contenant deux personnes est suspendu à deux élastiques entre deux mât.

Au repos, la boule est maintenue au sol par un électroaimant tandis que les élastiques sont tendus par des treuils. Une fois les élastiques tendus au maximum, l'alimentation de l'électroaimant est coupée. La boule et ses occupants font alors des allers-retours verticaux pour finalement s'immobiliser dans les airs, suspendus aux élastiques.

On se propose ici de dégager quelques caractéristiques mécaniques de cette attraction.

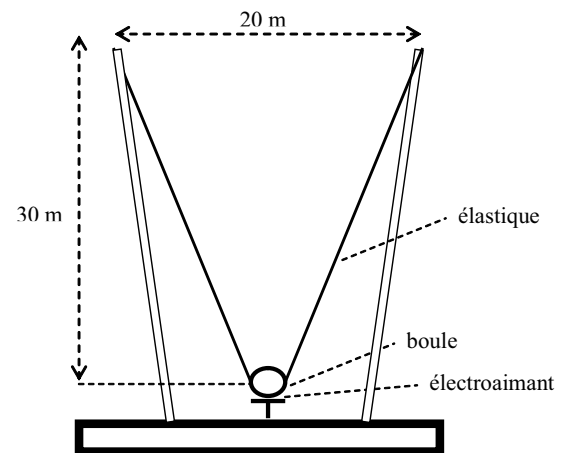
À l'aide des données ci-dessus et sur le schéma simplifié ci-contre, estimer :

1. la raideur des élastiques (A.N.).
2. la hauteur maximale atteinte (A.N.).

On précisera soigneusement les hypothèses utilisées ainsi que les méthodes employées.

Données :

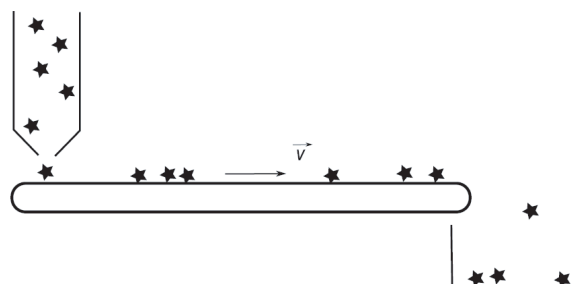
- Masse de la boule et de ses occupants :  $m = 250\text{kg}$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
- Longueur à vide de chaque élastique :  $\ell_0 = 15\text{m}$
- Accélération annoncée par le constructeur :  $a = 3g$



$$\text{Réponse : } 1. k = \frac{2mg}{\left(1 - \frac{\ell_0}{\ell_1}\right)H} = 310\text{N}\cdot\text{m}^{-1} \text{ où } \ell_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + H^2}, 2. z_{max} = \frac{k}{mg}(\ell_1 - \ell_0)^2 = 35\text{ m}.$$

### 34 Convoyeur de minerai

Du minerai de masse volumique  $\rho = 3,0 \cdot 10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$  tombe au rythme de  $D_v = 10\text{m}^3\cdot\text{min}^{-1}$  sur une bande transporteuse qui l'entraîne à  $v = 20\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ .



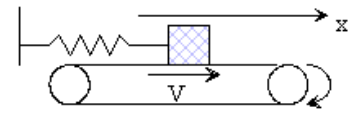
1. En faisant un bilan de quantité de mouvement en régime stationnaire, trouver l'expression de la force exercée par le convoyeur. Faire l'application numérique correspondante.
2. Déterminer l'expression puis la valeur de la puissance du moteur qu'il vaut installer.

$$\text{Réponses : } 1. F_{\text{tapis} \rightarrow \text{minerai}} = \rho D_v v = 2,8 \cdot 10^3\text{ N}, 2. \mathcal{P}_{\text{moteur} \rightarrow \text{tapis}} = \rho D_v v^2 = 15\text{ kW}$$

### 35 Modèle de Stick-Slip

On considère un tapis roulant entraîné à la vitesse constante horizontale  $V = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  :

Une masse  $M = 1 \text{ kg}$  est posée sur le tapis ; cette masse est reliée par un ressort de raideur  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  à un support fixe dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.



Le coefficient de frottement statique de la masse sur le tapis est  $f = 0,3$ . Le coefficient de frottement dynamique est supposé nul, c'est-à-dire que lorsque la masse glisse sur le tapis, elle le fait sans frottement. L'accélération de la pesanteur est notée  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ . A l'instant initial, la masse est immobile par rapport au tapis, et le ressort a une tension nulle. On repère la position de la masse par le paramètre  $x$ . La position initiale est prise comme origine.

1. Étudier le mouvement de  $M$  en distinguant les phases de glissement et de non glissement.
2. Déterminer la période du mouvement. A.N.

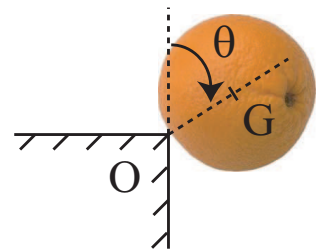
### 36 Orange au bord d'une table

Une orange de masse  $m$  et de rayon  $R$  est posée au bord d'une table dont le coefficient de frottement solide est  $f = 0.5$ .

Suite à une perturbation, l'orange se met à rouler sans glisser sur le bord de la table, la vitesse initiale étant considérée comme négligeable.

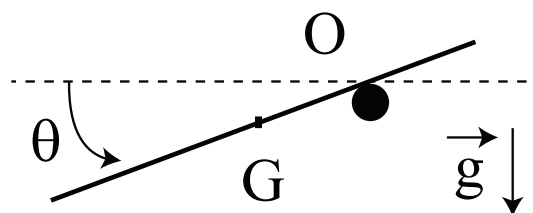
L'orange amorcera-t-elle toujours un glissement sur l'arête de la table avant de la quitter ?

Données :  $J_{O,orange} = \frac{7}{5}mR^2$ , et la résolution de  $4\sin(\theta) = 17\cos(\theta) - 10$  conduit à  $\theta = 41.8^\circ$ .



### 37 Tige qui glisse

Une tige de masse  $m$  et de longueur  $2L$  est appuyée en  $O$  sur un clou. Son mouvement se fait dans un plan vertical et à l'instant  $t = 0$ , elle est lâchée dans une position horizontale sans vitesse initiale. Son centre de masse  $G$  est distant de  $a$  du point  $O$  et le coefficient de frottement de la tige sur le clou est noté  $f$ .



1. Déterminer  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$ , composantes de la réaction du clou sur la tige.
2. Trouver l'angle  $\theta_g$ , à partir duquel la tige glisse.

On donne le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $\Delta$  passant par  $O$  et perpendiculaire au plan de la figure :  $J_{\Delta} = m(L^2/3 + a^2)$

Réponses : 2.  $\tan(\theta_g) = f \frac{\left(1 + \frac{ma^2}{J_{\Delta}}\right)}{\left(1 - \frac{2ma^2}{J_{\Delta}}\right)}$ .

### 38 Résolution de problème - Dilation des océans

**Problématique :**

« Les 16 petits états insulaires qui se sont réunis dans le cadre du Forum du Pacifique à Auckland en Nouvelle-Zélande ont produit, à l'issue du sommet, un communiqué, qui souligne que « le changement-climatique reste la plus grosse menace contre les moyens d'existence, la sécurité et le bien-être des populations du Pacifique ».

Ces petits états insulaires sont particulièrement exposés aux conséquences des changements climatiques et sont d'une grande vulnérabilité face au phénomène d'élévation des océans que ce réchauffement provoque. »

<http://www.rfi.fr/science> le 09/09/2011.



Le Tuvalu, groupe d'atolls proche de l'Australie (<http://en.wikipedia.org/wiki/Tuvalu>)

Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, la température moyenne à la surface de la Terre a augmenté. Cet échauffement a induit une dilatation des eaux océaniques. **On cherche à estimer la variation du niveau des océans qui en résulte, afin de savoir s'il s'agit d'un phénomène négligeable ou pas.**

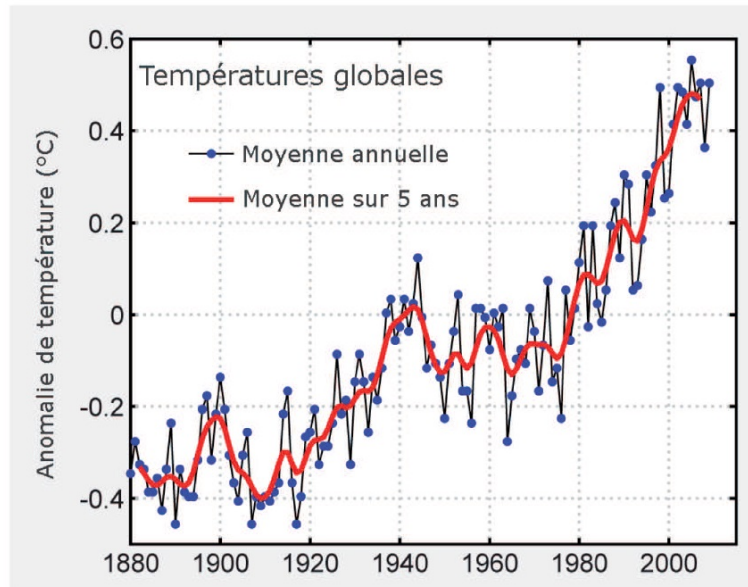
**Questions :**

En utilisant les documents fournis et en introduisant éventuellement d'autres grandeurs qui vous paraissent utiles :

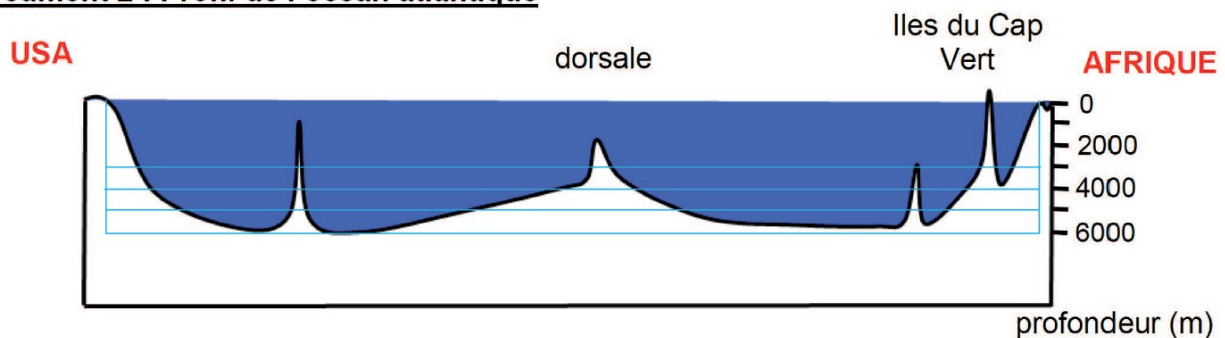
1. Estimer la variation du volume d'un kilogramme d'eau liquide consécutif à une augmentation de température de 1°C, puis la variation relative de ce volume (c'est-à-dire la variation de volume rapportée au volume total) correspondante.
2. Présenter les étapes du raisonnement permettant d'évaluer numériquement la variation du niveau des océans et le mettre en œuvre.
3. Analyser la valeur numérique obtenue, ainsi que le modèle utilisé.

**Document 1 : Evolution de l'anomalie de la température de surface.**

La courbe ci-dessous représente l'évolution de l'anomalie de température au cours des dernières décennies.



Différence de température globale moyenne de surface par rapport à la moyenne 1961-1990, sur la période 1880-2009. Source <http://wikipédia.org>

**Document 2 : Profil de l'océan atlantique****Document 3 : Données numériques**

- évolution du volume d'un kilogramme d'eau en fonction de la température :

Le tableau suivant donne l'évolution du volume d'un kilogramme d'eau en fonction de la température.

Température en °C	Volume de 1 kg d'eau en m <sup>3</sup>
10	1,00035.10 <sup>-3</sup>
11	1,00045.10 <sup>-3</sup>
12	1,00056.10 <sup>-3</sup>
13	1,00068.10 <sup>-3</sup>
14	1,00085.10 <sup>-3</sup>
15	1,00095.10 <sup>-3</sup>
16	1,00110.10 <sup>-3</sup>
17	1,00126.10 <sup>-3</sup>
18	1,00144.10 <sup>-3</sup>
19	1,00164.10 <sup>-3</sup>
20	1,00184.10 <sup>-3</sup>

- La Terre : rayon : 6400 km ; les océans couvrent environ 70 % de sa surface.



### 39 Résolution de problème - Annulation des forces d'inertie

Un motard physicien cherche à battre un record de vitesse sur sa moto, un prototype mis au point pour l'occasion. Atteignant la vitesse de pointe de  $296 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , il s'écrie : "J'ai réussi à annuler les forces d'inertie !"

L'aventure se produisant dans l'hémisphère nord, déterminer la latitude  $\lambda$  du lieu, la direction empruntée et le sens de la marche de la moto.

Pourrait-il faire de même dans l'hémisphère Sud ?

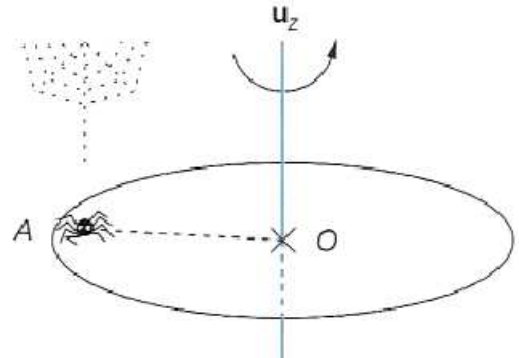
Donnée :  $R_T = 6400 \text{ km}$ .



### 40 Araignée sur un disque

Un disque homogène, de masse  $M$  et de rayon  $a$ , tourne sans frottements autour de l'axe  $Oz$  et est lancé initialement à la vitesse angulaire  $\omega_0$ .

Une araignée de masse  $m$  se laisse lentement glisser verticalement le long d'un fil, puis tombe sur la périphérie du disque.



1. Étudions d'abord le choc.

- Quelle(s) grandeur(s) se conserve(nt) lors du choc ?
- En déduire la vitesse angulaire  $\omega'_0$  du système {disque + araignée} après le choc.
- Quelle est l'énergie dissipée lors du choc ?

2. L'araignée se met alors à marcher vers le centre du disque.

- Quelle est la vitesse de rotation du disque quand l'araignée atteint le centre ?
- Déterminer le travail fourni par l'araignée pour arriver au centre du disque.

Donnée : moment d'inertie du disque :  $J_{Oz} = \frac{1}{2}Ma^2$ .

### 41 Araignée sur un disque : la suite

Le disque précédent est maintenant entraîné à la vitesse angulaire constante  $\omega_0$ . L'araignée de masse  $m$  se laisse à nouveau lentement glisser verticalement le long de son fil et tombe cette fois à une distance  $r_0$  du centre du disque.

1. L'araignée étant déjà fatiguée par l'exercice précédent, on considérera qu'elle ne fait cette fois aucun effort particulier pour s'opposer aux forces qui agissent sur elle. On notera respectivement  $f_s$  et  $f_d$  les coefficients de frottement statique et dynamique entre l'ensemble de ses pattes et le disque.

Déterminer les équations régissant le mouvement de l'araignée sur le disque en fonction de  $\omega_0$ , sans chercher à les résoudre.

- Quelle est la différence entre ces équations et celles régissant le mouvement d'une perle enfilée sur une tige tournant à la vitesse angulaire  $\omega_0$  et lâchée à une vitesse nulle à la distance  $r_0$  du centre ? On supposera que la perle a la même masse et subit les mêmes frottements que l'araignée.
- Résoudre complètement le mouvement de la perle jusqu'à ce qu'elle quitte la tige.

## 42 Station spatiale internationale (ISS)

L'ISS (Station Spatiale Internationale) est un projet mis en place par les États-Unis, l'Union Européenne et la Russie. Il s'agit d'une station composée de modules scientifiques destinés à l'étude des êtres vivants dans l'espace, mais aussi à l'expérimentation de nouvelles technologies militaires et civiles comme les robots, les sondes, les réacteurs, etc... L'ISS a été conçue pour accueillir une équipe d'astronautes pendant plusieurs mois. Ainsi, il n'y a pas seulement des modules de recherche : on y trouve également salles de détente, de sport, chambres, salle à manger. Cependant, les pièces sont de taille limitée. Par conséquent, les ressources alimentaires et le matériel mobile sont régulièrement acheminés par des cargos ou des vaisseaux soyouz car la station n'est pas prévue pour contenir de grands stocks. L'ISS possède donc un sas d'arrimage permettant aux vaisseaux de s'accrocher.



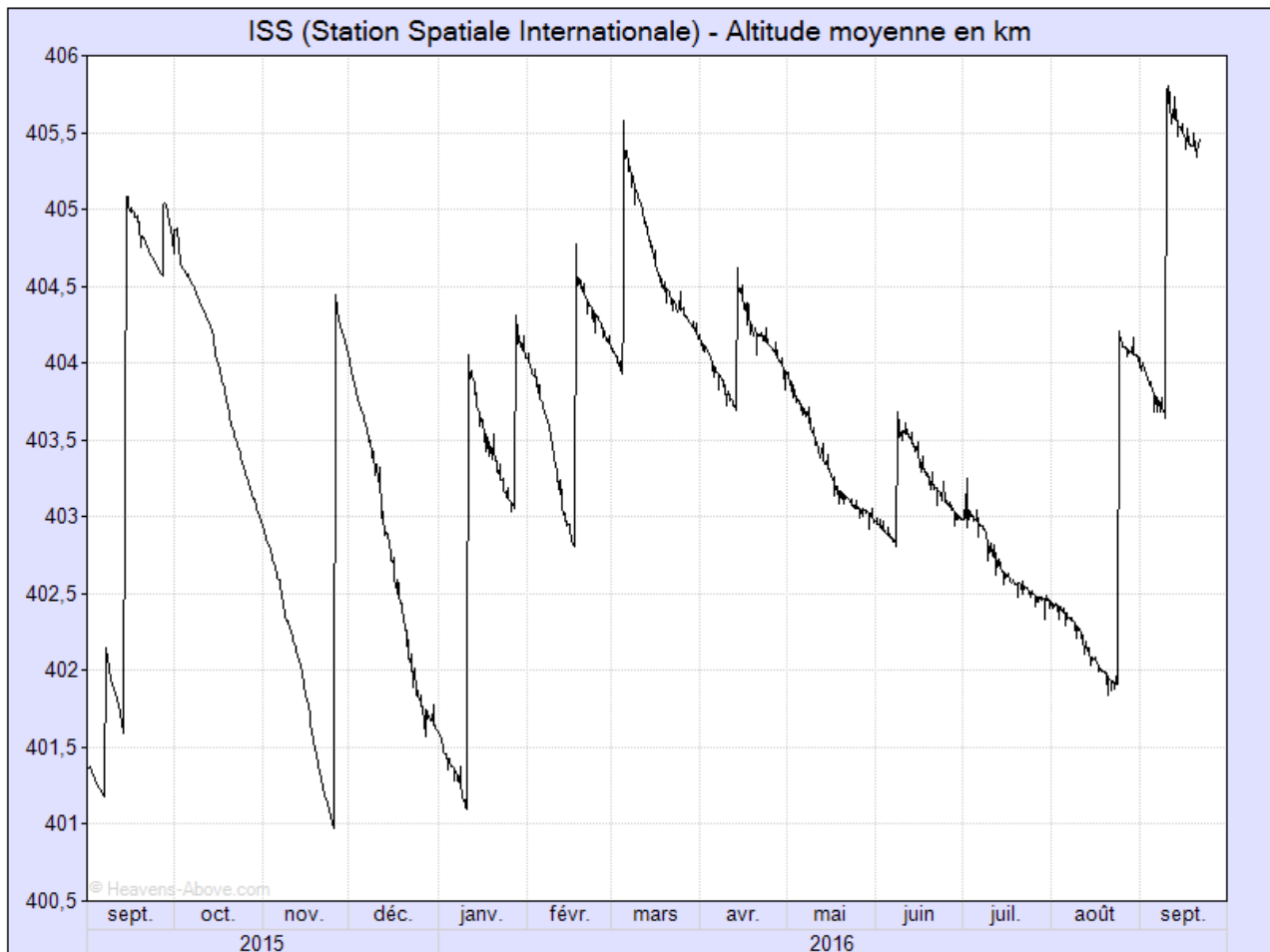
On cherche à répondre à la question suivante : a-t-on une chance de pouvoir observer la station spatiale internationale (ISS) à l'œil nu ? Pour cela, on répondra précisément, avec des modèles simples, aux questions suivantes, en s'appuyant sur des applications numériques utilisant les données ci-dessous :

1. Pendant combien de temps est-elle visible depuis la Terre lors de l'un de ses passages dans le ciel ?
2. À quel moment de la journée faudra-t-il regarder dans le ciel pour pouvoir l'observer ?
3. Peut-on en distinguer la forme grossière à l'œil nu, ou avec des jumelles de grossissement  $\times 10$  ?
4. A-t-on une chance de la confondre avec un A380 en vol de croisière ?

Données :

- Rayon de la Terre :  $R_T = 6370\text{km}$ , masse de la Terre :  $M_T = 5.98 \times 10^{24}\text{ kg}$ .
- L'ISS mesure 108 m de long pour 74 m de large. Ses dimensions sont donc proches de celles d'un terrain de football.
- Un A380 mesure 73 m de long pour 80 m d'envergure.
- Le pouvoir de résolution de l'œil humain est d'environ une minute d'arc.
- L'altitude de l'ISS pendant les douze derniers mois est donnée ci-dessous (d'après <http://www.heavens-above.com/>).

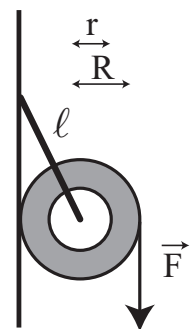
## Altitude de l'ISS



Ce graphique montre l'altitude de vol de l'ISS durant les 12 mois écoulés. Les gains d'altitude suite à l'allumage des moteurs sont bien visibles, ainsi que les pertes d'altitude successives. L'altitude est augmentée sur le temps d'une orbite, la chute graduelle est causée par le frottement atmosphérique. Il est bien visible que la vitesse de chute n'est pas constante, ces variations sont causées par les changements de densité de la couche ténue de l'atmosphère externe, due principalement à l'activité solaire.

## 43 Rouleau de papier toilette

On considère le rouleau de papier toilette de la figure ci-contre. On appelle  $\ell$  la longueur des tiges supposées sans masse attachées sur l'axe du tube de rayon  $R_{tube} = r$  et de masse  $m_{tube} = M$  sur lequel est enroulé le papier de masse  $m_{papier} = m$ . Le rouleau a un rayon total  $R_{papier} = R$ . On notera  $f$  le coefficient de frottement entre le mur et le papier.



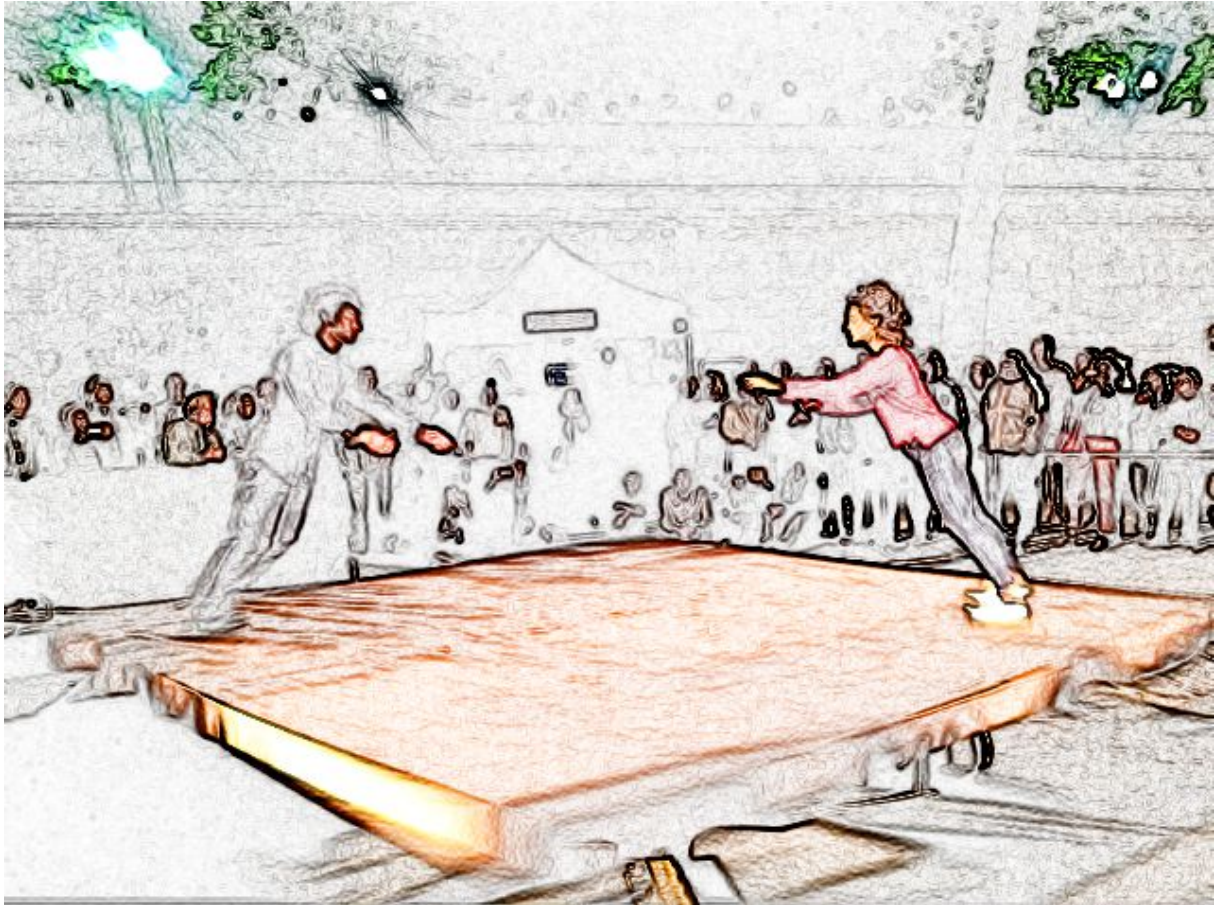
- Déterminer la condition sur la force  $F$  pour que le rouleau ne tourne pas.
- Déterminer la condition sur  $\ell$  pour que la feuille se détache sans faire rouler le rouleau sachant que la feuille se détache pour  $F \geq 2,0N$ .
- Cette condition reste-t-elle valable pour toute l'utilisation du rouleau ?

Données :  $R = 6cm$ ,  $r = 2.5cm$ ,  $f = 0.5$ ,  $g = 10m.s^{-2}$ ,  $m + M = 100g$ .

Réponse : 1.  $F_{max} = \frac{(m + M)g}{1/f \tan \alpha - 2}$ . 2.  $\ell \leq R \sqrt{f^2 \left[ 2 + \frac{(m + M)g}{F_{feuille}} \right]^2 + 1} = 9.6cm$ .

## 44 Résolution de problème : danse dans un manège

La photo ci-dessous représente deux danseurs à l'équilibre dans un manège en rotation. Estimer numériquement la vitesse de rotation du manège. Pourquoi tendent-ils les bras vers l'avant ?



## 45 Tour de la Terre

La *Tour de la Terre* est un parcours scénique des parcs Disney s'inspirant du principe des tours de chute, mais utilisant la technologie des ascenseurs.

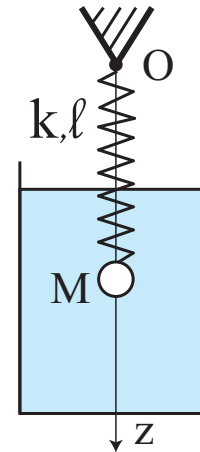
Dans l'attraction de la *Tour de la Terre* de Disneyland Paris, à l'instant initial, la cabine et ses passagers se trouvent à une hauteur  $h = 55 \text{ m}$  quand la cabine descend soudainement avec une accélération constante  $a_0 = 11 \text{ m.s}^{-2}$ . La cabine est soumise au champ de pesanteur  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$  et on néglige les frottements de l'air. Un des passagers a posé une bille sur ses genoux, à une distance  $d = 3 \text{ m}$  du plafond. On note  $\mathcal{R}'$  le référentiel de la cabine.

1. Déterminer l'altitude  $z'(t)$  de la bille par rapport à la cabine.
2. En considérant un arrêt brutal de la cabine, déterminer la position de la bille au moment où la cabine touche le sol.
3. Déterminer la vitesse à laquelle la bille percute le plafond de la cabine. Commenter.



## 46 Oscillateur amorti

On s'intéresse à un oscillateur mécanique constitué d'une boule de masse  $m$  accrochée à un ressort de raideur  $k$  et de longueur  $\ell_0$ , plongeant dans l'eau. La masse est soumise à une force dite de Stokes donnée par  $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ , où  $R$  est le rayon de la boule et  $\eta$  un coefficient caractéristique du liquide.



1. Quelle est la dimension de  $\eta$ , appelé coefficient de frottement dynamique ?
2. Donner l'expression de  $z_{eq}$ , où l'origine des  $z$  est prise en  $O$  fixe.
3. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position verticale de la boule.
4. Quelle est la condition sur  $\eta$  pour qu'on observe des oscillations de la masse ? Quelles est l'expression de la pseudo-période dans ce cas ?

## 47 Pendule soumis à une excitation sinusoïdale

On considère un pendule simple de longueur  $\ell$  et de masse  $M$  fixé au point  $I$ , mobile sur l'axe  $Ox$  horizontal selon la loi  $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ . On note  $\mathcal{R}$  le référentiel fixe attaché au point  $O$  et  $\mathcal{R}'$  le référentiel mobile attaché au point  $I$ .

1. Que dire de  $\mathcal{R}'$  ? Justifier
2. Quelles forces s'exercent sur le point  $M$  ? Les exprimer dans la base mobile.
3. En considérant uniquement des oscillations de faible amplitude, appliquer le théorème du moment cinétique et déterminer l'équation du mouvement du point  $M$
4. On suppose pour les conditions initiales que  $\theta(t=0) = 0$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0$ . Déterminer  $\theta(t)$ .

Réponses : 3.  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = a \omega^2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega_0^2 = g/\ell$   $a = x_0/\ell$ . 4.  $\theta(t) = -a \frac{\omega^3}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega_0 t + a \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$ .

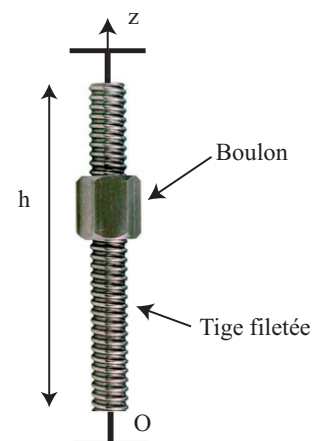
## 48 Boulon sur une tige filetée

Une tige filetée (T) peut tourner sans frottements autour de l'axe vertical ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\Omega(t)$ . On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à cet axe,  $a$  son pas de vis, et  $h$  sa hauteur.

Un boulon (B) de masse  $m$  et de moment d'inertie  $j$  par rapport à ( $Oz$ ) peut descendre en tournant le long de la tige filetée sans frottements à la vitesse angulaire  $\omega(t)$ .

À l'état initial, le boulon est lâché en haut de la tige sans vitesse initiale alors que la tige est immobile. On souhaite déterminer l'état cinématique du système lorsque le boulon atteint le bas de la tige.

1. Dénombrer les variables cinématiques du problème.
2. Déterminer un jeu suffisant d'équations mécaniques décrivant l'évolution du système.
3. Déterminer l'état cinématique du système lorsque (B) atteint le bas de la tige.



## 49 Pendule aux grandes oscillations (avec Python)

On considère un pendule constitué d'une masse  $m$  accrochée en un point  $O$  fixe à un fil inextensible, sans masse, de longueur  $\ell$ . On note  $\theta$  l'angle entre le pendule et la verticale. Le pendule est lâché d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale.

1. En utilisant une méthode énergétique, montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

On précisera l'expression de  $\omega_0$ .

2. Montrer que l'expression de la période peut s'écrire :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{\max})}}$$

On précisera l'expression de  $T_0$ .

3. Montrer (ou admettre) qu'en réalisant le changement de variable  $\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_{\max}/2)}$ , on obtient alors


$$T = T_0 \mathcal{E} \left( \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \right) \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{E}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \phi}}$$

où  $\mathcal{E}(x)$  désigne l'intégrale elliptique de première espèce.

4. Montrer que l'expression précédente conduit à la formule approchée de Borda pour de petites oscillations :

$$T \underset{\theta_{\max} \rightarrow 0}{\simeq} T_0 \left( 1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right)$$

5.  A l'aide d'un outil numérique, dans le cas particulier où  $m = 0.1 \text{ kg}$  et  $\ell = 1 \text{ m}$  dans le champ de pesanteur  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , déterminer l'angle  $\theta_0$  au delà duquel la période  $T$  s'écarte de plus de 1% de  $T_0$ , puis de plus de 1% de l'expression de la période approchée avec la formule de Borda.

## 50 Stabilité d'une orbite circulaire dans un champ de force centrale

Soit  $O$  un point fixe et  $k$  et  $n$  deux constantes positives. Un mobile  $P$  de masse  $m$  n'est soumis qu'à la force

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^n} \vec{u}_r, \quad \text{où } r = OP \text{ et } \vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{OP}$$

1. Montrer que le mouvement est plan et qu'en coordonnées polaires  $r^2 \dot{\theta}$  est une constante du mouvement qu'on notera  $C$ .
2. Montrer que la loi fondamentale de la dynamique projetée sur la direction radiale peut être écrite sous la forme  $\frac{d^2 r}{dt^2} = f(r)$  et exprimer la fonction  $f(r)$  en fonction de  $k, m, r, n$  et  $C$ .
3. Discuter le signe de  $f(r)$  et tracer son graphe en distinguant plusieurs cas, en particulier selon que :
  - (a)  $n < 3$
  - (b)  $n = 3$
  - (c)  $n > 3$
4. Dans quel cas l'orbite est-elle un cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$  ?
5. Décrire l'allure radiale d'un mouvement initialement proche d'un mouvement circulaire, en distinguant plusieurs cas. A quelle condition l'orbite circulaire est-elle stable ?

6. On suppose l'orbite circulaire stable. Soit un mouvement voisin d'une orbite circulaire de rayon  $a$  et de période  $T$  :  $r = a + \varepsilon(t)$  où  $\varepsilon(t)$  reste petit devant  $a$ . Montrer qu'il obéit à  $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T^2}(3-n)\varepsilon = 0$
7. Ce résultat est-il en accord avec la conclusion sur la stabilité des orbites circulaires ? Quel est alors l'allure du mouvement ?
8. Interpréter le cas particulier  $n = 2$ .

## 51 Kilomètre lancé à ski (avec Python)

On considère une piste de kilomètre lancé (KL) de pente moyenne de 60% (un déplacement horizontal  $d_{horiz} = 100$  m correspond à un déplacement vertical  $d_{vert} = 60$  m).

On pose  $\alpha$  l'angle moyen de la piste avec la direction horizontale. On définit le repère suivant :




Un skieur (masse  $m = 80$  kg) descend cette piste selon la droite de plus grande pente.

On note  $v$  la norme de sa vitesse  $\vec{v}$  par rapport à la piste.

On suppose que l'air exerce une force de frottement fluide  $\vec{f}$  proportionnelle à la vitesse au carré, avec un coefficient de proportionnalité  $\beta \simeq 5 \times 10^{-2}$  SI .

On prend aussi en compte les frottements solides entre les skis et la piste ; le coefficient de frottement dynamique correspondant est  $k_d \simeq 0,1$ .

1. Déterminer la valeur de l'angle  $\alpha$  en radian.  
Quelle est l'unité de  $\beta$  ?  
Donner l'expression de  $\vec{v}$  dans le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et en déduire la relation entre  $v$  et  $\dot{x}$ .
2. Effectuer une étude dynamique pour obtenir l'équation différentielle gérant l'évolution de  $v$  en fonction du temps (on l'écrira sous forme canonique, sans chercher à la résoudre).  
*On prendra soin de faire intervenir d'abord les coordonnées, seulement ensuite  $v$  et  $\dot{v}$ .*
3. En déduire la vitesse limite  $v_{lim}$  atteinte par le skieur.  
On mesure une vitesse du skieur de  $252 \text{ km.h}^{-1}$  (record mondial, mars 2014).  
Commenter, en supposant que cette vitesse correspond au régime permanent.
4.  En utilisant python, résoudre l'équation différentielle précédente. La vitesse limite est-elle vraiment atteinte ?

Réponse : 3.  $v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{\beta} (\sin(\alpha) - k_d \cos(\alpha))} = 3 \times 10^2 \text{ km.h}^{-1}$ .

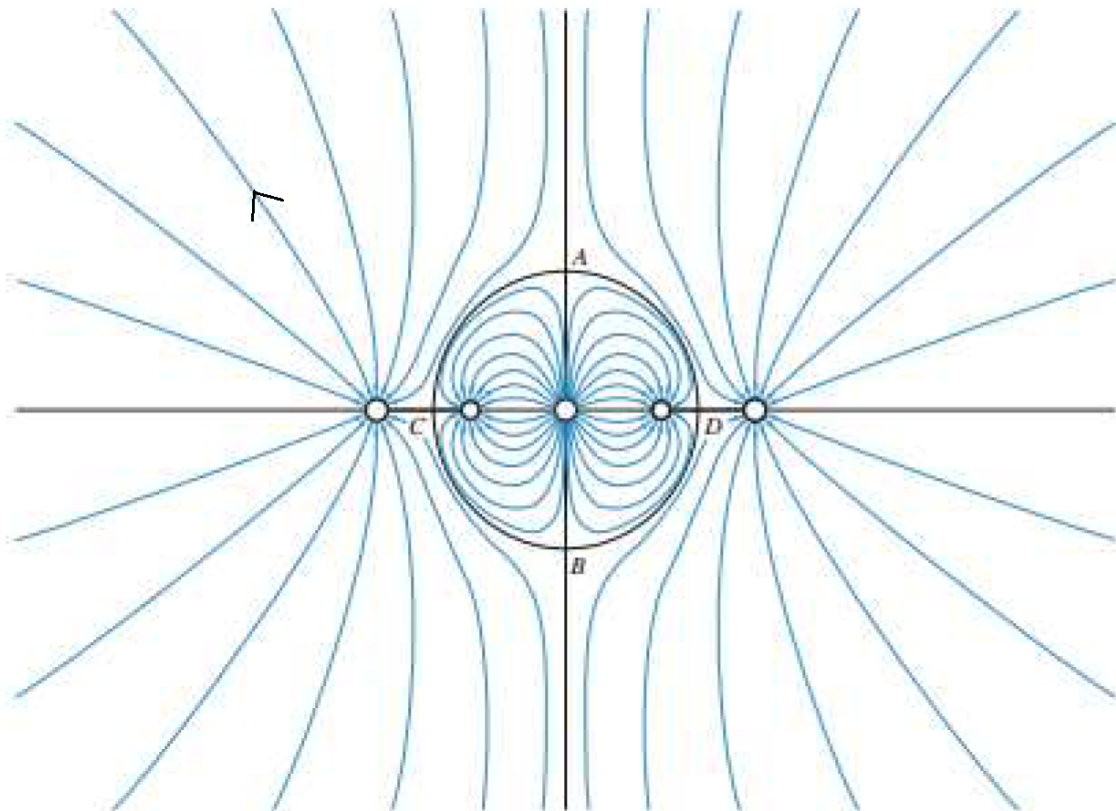
---

**ELECTROMAGNETISME ET PHYSIQUE DES ONDES**


---

**52 Carte de champ électrostatique créé par des charges ponctuelles**

Le schéma suivant représente les lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles numérotées de 1 à 5, de la gauche vers la droite. Le champ est nul aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Les lignes en traits épais issues de ces points sont également des lignes de champ.



1. Déterminer les signes des cinq charges sachant que l'une des lignes de champ a été orientée. Orienter les lignes de champ.
2. Analyser la symétrie du problème. Quelles relations peut-on en déduire entre  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_4$  et  $q_5$  ?
3. Trouver et justifier la position des points de champ nul.
4. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer la relation liant  $q_2$  et  $q_3$ .

**53 Sphère chargée créant un champ de module constant**

Soit une sphère de rayon  $R$  portant une densité volumique de charge  $\rho(r)$  à symétrie sphérique, où  $r$  est la distance au centre de la sphère.

1. Déterminer  $\rho(r)$  pour que le champ électrostatique ait un module  $E_0$  constant à l'intérieur de la sphère. Une telle distribution de charge est-elle réalisable expérimentalement ?
2. Quelle est alors la charge totale  $Q$  de la sphère ?
3. Déterminer le champ et le potentiel en tout point de l'espace.

Réponses : 1.  $\rho(r) = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{r}$ , 2.  $Q_{tot} = 4\pi R^2 \varepsilon_0 E_0$ .



## 54 Rayon classique de l'électron

Un électron, de charge électrique totale  $-e$ , est modélisé par une boule de centre  $O$  et de rayon  $a$ , uniformément chargée en volume (de densité volumique de charge  $\rho$ ). On suppose l'électron immobile.

- Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(M)$  créé en tout point  $M$  de l'espace par cette distribution de charges.
- Calculer l'énergie électrique  $U_E$  totale contenue dans tout l'espace. En supposant que cette énergie est égale à l'énergie de masse  $E = mc^2$  de l'électron, en déduire la valeur du rayon  $a$  (rayon classique de l'électron).
- Application numérique :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  u.S.I. ;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Calculer  $a$

Réponses : 2.  $U_E = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 a}$ , 3.  $a = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 1,7 \cdot 10^{-15}$  m.

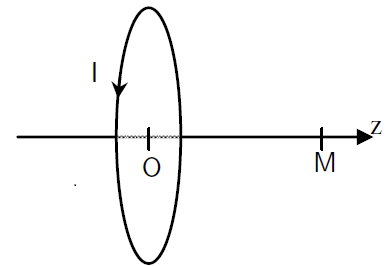
## 55 Calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire en un point proche de son axe

On considère une spire circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$ , d'axe  $Oz$  parcourue par un courant  $I$ .

- Montrer que le champ magnétique créé en un point  $M$  de l'axe de la spire est donné par :

$$\vec{B}(M) = B_0(z)\vec{u}_z$$

Discuter de la parité de  $B_0(z)$ .



- On cherche maintenant à exprimer le champ magnétique en un point  $M'$  au voisinage de l'axe  $Oz$ , c'est à dire avec  $r \ll R$  et  $r \neq 0$ .

- (a) Montrer que le champ magnétique créé en  $M'$  s'écrit :

$$\vec{B}(M') = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$$

- (b) En exprimant le flux de  $\vec{B}$  à travers un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $r \ll R$  et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes  $z$  et  $z + dz$ , montrer que, lorsque  $dz \rightarrow 0$  :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz}(z)$$

- (c) En exprimant la circulation de  $\vec{B}$  le long d'un contour rectangulaire passant par  $M'(r, z, \theta)$ , de hauteur  $dz$  et de largeur  $dr$ , lorsque  $dz \rightarrow 0$  et  $dr \rightarrow 0$ , montrer que :

$$B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2}(z)$$

## 56 Onde électromagnétique entre deux plans conducteurs

Une onde électromagnétique se propage dans le vide entre deux plans parfaitement conducteurs d'équation  $z = 0$  et  $z = a$ .

Le champ électrique de cette onde est de la forme

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Cette onde est-elle plane ? progressive ? monochromatique ? Quelle est sa polarisation ? Justifier.
- Déterminer  $k$  en fonction de  $\omega$ . En déduire la vitesse de phase.

- Déterminer le champ magnétique associé.
- Calculer l'énergie moyenne contenue dans le parallélépipède de surface  $S = \ell_x \times \ell_y$  dans le plan  $xOy$  et de hauteur  $a$  selon  $(Oz)$ .
- Calculer le flux moyen du vecteur de Poynting à travers une surface perpendiculaire à  $(Ox)$ , de largeur  $\ell_y$  selon  $Oy$  et de hauteur  $a$ .
- En déduire la vitesse de propagation de l'énergie. Commenter.

Réponses : 3.  $\vec{B} = E_0 \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{u}_x + E_0 \frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ , 4.  $\langle U \rangle = \frac{E_0^2 a S}{4\mu_0 c^2}$ , 5.  $\langle \Phi \rangle = \frac{k E_0^2 a \ell_y}{4\mu_0 \omega}$ ,

$$6. V_e = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega a}\right)^2}.$$

## 57 Magnétorésistance (effet Corbino)

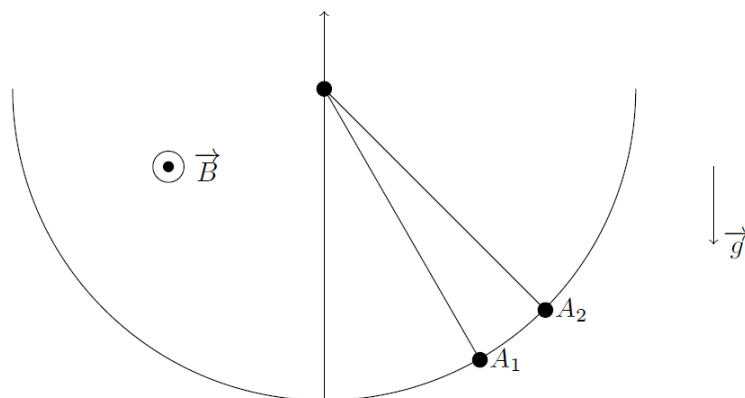
On considère un anneau cylindrique de métal, d'axe  $(O, \mathbf{e}_z)$ , de conductivité  $\gamma$ , de rayon interne  $R_1$ , de rayon externe  $R_2$  et de hauteur  $h$ .

- Sa face interne est mise en contact avec une électrode de potentiel  $V_1$  et sa face externe est en contact avec une électrode de potentiel  $V_2$ . Déterminer la résistance électrique de l'anneau.
- Par rapport à la question précédente, on ajoute un champ magnétique externe uniforme et constant  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . On rappelle que, dans le modèle de Drude, les porteurs de charge libres sont soumis, de la part du métal, à une force de frottement fluide  $\mathbf{F} = -\frac{m}{\tau}\mathbf{v}$ , où  $\mathbf{v}$  désigne la vitesse du porteur dans le référentiel du métal,  $m$  est la masse d'un porteur et  $\tau$  un temps caractéristique. On note  $C_H = \frac{1}{nq}$ , où  $n$  est la densité volumique de porteurs de charge libres et  $q$  la charge d'un de ces porteurs. En effectuant une étude à la manière du modèle de Drude, établir une équation liant  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en régime permanent, en faisant apparaître la conductivité  $\gamma$  en l'absence de champ magnétique au cours des calculs.
- En déduire la nouvelle expression de la résistance. Calculer la variation relative de résistance dans d'un anneau semi-conducteur tel que :  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ ,  $\gamma = 100 \text{ S.m}^{-1}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ .

Réponses : 1.  $R = \frac{1}{2\pi\gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ , 2.  $R' = R [1 + \gamma^2 C_H^2 B^2] = 0.39.10^{-6}$ .

## 58 Pendules couplés

On considère le montage suivant :



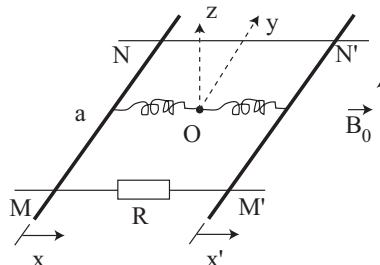
- $\vec{B}$  est constant et uniforme, on se place dans l'approximation des petits angles.
- Les deux pendules sont constitués chacun d'une barre sans masse, de longueur  $a$  et de résistance  $R$ , et d'une masse  $m$  accrochée au bout. Les masses sont situées sur une piste circulaire et conductrice de sorte qu'elles puissent se croiser mais jamais se rencontrer.

- $A_1$  est initialement immobile dans sa position d'équilibre et on lâche  $A_2$  sans vitesse initiale avec un angle  $\theta_0$ .

Déterminer le mouvement des deux pendules au cours du temps. Décrire en particulier le mouvement des pendules pour des temps très longs.

### 59 Rails de Laplace couplés

Deux barreaux  $MN$  et  $M'N'$  parallèles, de longueur  $a$ , de rayon négligeable et de même masse  $m$  glissent sans frottement sur un rail orthogonal de résistance totale  $R$ . Ils sont reliés en  $O$  fixe par deux ressorts de même raideur  $k$ . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ . On notera respectivement  $x$  et  $x'$  les écarts à l'équilibre de chacune des barres.



1. Décrire qualitativement le mouvement des barres.
2. Ecrire les équations différentielles couplées du mouvement des barreaux en fonction de  $x$  et  $x'$ .
3. Simplifier les équations précédentes en posant  $S = x + x'$  et  $D = x - x'$ .
4. Sans chercher à résoudre complètement ces équations, justifier le fait que les 2 barreaux vibrent en phase au bout d'un temps infini.
5. Exprimer l'énergie totale dissipée par effet Joule dans le cas où les barres sont lâchées sans vitesse initiale aux abscisses respectives  $x_0$  et  $x'_0$ .

Réponses : 3.  $\ddot{S} + \frac{k}{m}S = 0$  et  $\ddot{D} + \frac{2B_0^2 a^2}{mR} \dot{D} + \frac{k}{m}D = 0$ , 5.  $E_J = \frac{k}{4}(x_0 - x'_0)^2$ .

### 60 Réflexion sur un plan métallique

Une onde plane monochromatique arrive sur un plan métallique supposé parfaitement conducteur sous l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Cette onde est polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

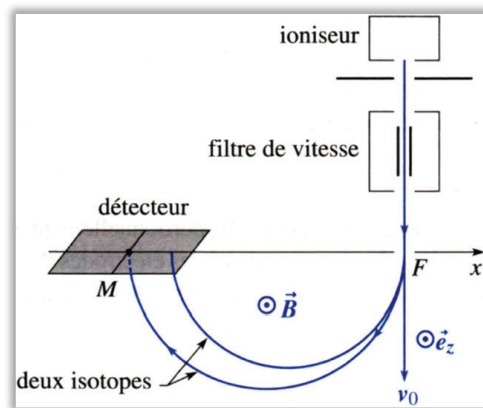
1. Montrer que le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est antisymétrique par rapport à celui de l'onde incidente par rapport à la normale au plan métallique (attention, il n'est pas a priori dans le plan d'incidence formé par le vecteur d'onde incident et la normale).
2. Déterminer les expressions complexes du champ réfléchi et du champ total.
3. Déterminer également la répartition surfacique de charge.

Réponses : 2.  $\vec{E}_r = E_i [-\cos\theta_i \vec{u}_x + \sin\theta_i \vec{u}_z] e^{i(-k_i \sin\theta_i x - k_i \cos\theta_i z - \omega t)}$  et  $\vec{E}_{tot} = 2E_i [-i \cos\theta_i \sin(k_i \cos\theta_i z) \vec{u}_x + \sin\theta_i \cos(k_i \cos\theta_i z) \vec{u}_z] e^{i(-k_i \sin\theta_i x - \omega t)}$ , 3.  $\sigma = -2\epsilon_0 E_i \sin\theta_i \cos(-k_i \sin\theta_i x - \omega t)$ .

### 61 Spectrographe de Bainbridge

Un spectrographe de Bainbridge est un dispositif dans lequel des ions, positifs dans la figure ci-contre, sortent d'un ioniseur où ils ont été préalablement accélérés sous une tension de valeur absolue  $U = 10 \text{ kV}$ , traversent d'abord un filtre de vitesse, puis pénètrent dans un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  transversal uniforme et indépendant du temps, avec  $B = 0,1 \text{ T}$ , et décrivent alors un demi-cercle et viennent finalement impressionner la plaque photographique.

La fente  $F$  étant supposée très fine, déterminer la distance séparant les isotopes  $^{39}\text{K}^+$  et  $^{41}\text{K}^+$  sur la plaque.



$$\text{Réponse : } d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{eN_A}} |\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}| = 5 \text{ cm.}$$

## 62 Solénoïde en régime lentement variable

On considère un solénoïde infini, d'axe  $Oz$ , de rayon  $a = 1 \text{ cm}$ , comportant  $n$  spires par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Sachant que le solénoïde est équivalent à une inductance  $L \simeq 1 \text{ mH}$  en série avec une résistance  $R \simeq 100 \Omega$ , en déduire l'expression de  $\tau$  en fonction de  $L$  et  $R$ , et l'ordre de grandeur de  $\tau$ . Le cadre de l'ARQS est-il adapté à l'étude de l'évolution des paramètres physiques dans ce solénoïde ?
- (a) Donner sans calcul l'expression du champ magnétique.  
 (b) En utilisant les symétries du problème, montrer que le champ électrique généré est de la forme  $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$ .  
 (c) En utilisant la loi de Faraday sur un contour que l'on précisera, calculer le champ électrique à l'intérieur du solénoïde.
- (a) Montrer que la densité volumique d'énergie électrique  $u_e$  est négligeable devant la densité d'énergie magnétique  $u_m$  dans le solénoïde.  
 (b) Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ .  
 (c) Que vaut la puissance volumique des forces de Lorentz à l'intérieur du solénoïde ?  
 (d) Vérifier que l'équation locale de Poynting est bien vérifiée dans le solénoïde. On donne  $\text{div}(r\vec{u}_r) = 2$  en coordonnées cylindriques.
- (a) Calculer les énergies électrique  $U_e$  et magnétique  $U_m$  dans une portion de solénoïde de longueur  $h$ . Montrer qu'on retrouve là encore que l'énergie électrique est négligeable devant l'énergie magnétique dans la portion de solénoïde.  
 (b) Montrer qu'on retrouve ici l'expression d'une inductance  $L$  de cette portion du solénoïde.  
 (c) Calculer le flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  à travers la portion de solénoïde.  
 (d) Que vaut la puissance des forces de Lorentz dans cette portion de solénoïde ?  
 (e) Vérifier que le bilan global d'énergie est bien vérifié.

$$\text{Réponses : } 2.a) \vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z. \quad 2.c) \vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 r}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta. \quad 4.b) L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h.$$

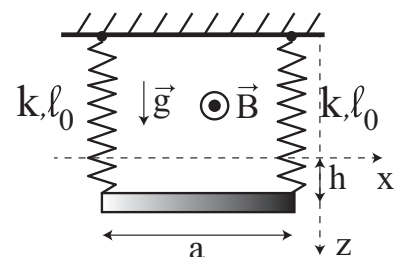
## 63 Oscillations d'une tige

On lâche la barre de la figure ci-contre, astreinte à se déplacer en restant toujours horizontalement, à une distance  $h$  sous sa position d'équilibre.

Les ressorts sont de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . L'ensemble constitue un circuit conducteur de résistance  $R$  et est plongé dans un champ magnétique permanent  $\vec{B}$ .

Déterminer le facteur de qualité  $Q$  du système.

$$\text{Réponse : } Q = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{mR}{(Ba)^2}.$$



## 64 Condensateur atmosphérique

On assimile l'atmosphère terrestre à un vaste condensateur sphérique dont la sphère intérieure est constituée par la terre, de rayon  $R = 6400 \text{ km}$ , et la sphère extérieure par une couche conductrice, appelée électrosphère, située à  $50 \text{ km}$  d'altitude. L'air est assimilé à un isolant non parfait de permittivité  $\epsilon_0$ .

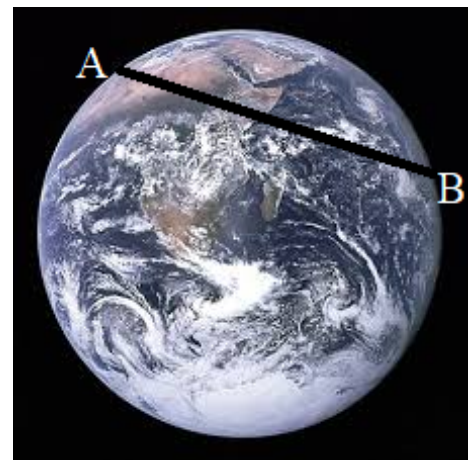
Calculer la conductivité de l'atmosphère sachant que la tension entre les deux armatures du condensateur vaut  $300 \text{ kV}$  et qu'il existe en moyenne sur toute la surface du globe, en raison des orages, un courant de fuite de  $1500 \text{ A}$  entre l'électrosphère et le sol.



## 65 Point matériel dans un tunnel

La Terre, considérée comme une boule homogène de rayon  $R$  et de masse  $m$ , est percée d'un tunnel rectiligne entre deux points  $A$  et  $B$  de sa surface non diamétralement opposés.

- Déterminer le champ gravitationnel en tout point à l'intérieur de la terre. (On néglige la modification du champ gravitationnel par le tunnel).
- Étudier le mouvement d'un point matériel de masse  $m'$  glissant sans frottement dans le tunnel, lâché sans vitesse depuis le point  $A$ . On négligera les forces d'inertie associées à la rotation de la Terre sur elle-même. On pourra noter  $x$  la position du point matériel par rapport au milieu de  $[AB]$ . Estimer l'ordre de grandeur du temps caractéristique du mouvement.



Réponses : 1.  $\vec{g} = -\frac{Gm}{R^3} r \vec{e}_r$ . 2.  $\ddot{x} + \frac{Gm}{R^3} x(t) = 0$ .

## 66 Modèle de Yukawa

On considère une distribution de charge à symétrie sphérique générant le potentiel électrostatique suivant :

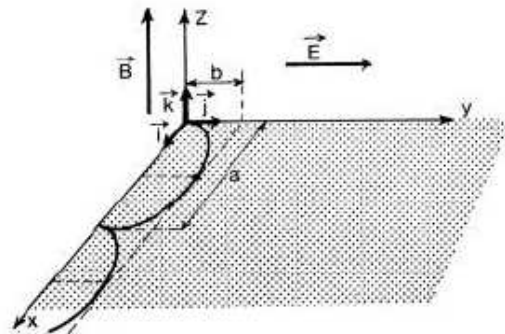
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

- Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution.
- Calculer le flux du champ électrostatique à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .
- Étudier les cas limites  $r \ll a$  et  $r \gg a$ . En déduire une interprétation physique possible de  $a$ .
- Montrer que ce champ correspond à celui créé par une charge ponctuelle  $+q$  située au point  $O$  et une densité volumique de charge négative  $\rho(r)$  dont on précisera l'expression. Que pourrait représenter cette distribution ?

Réponse : 4.  $\rho(r) = -\frac{q}{4\pi r a^2} e^{-\frac{r}{a}}$ .

### 67 Champs électrique et magnétique orthogonaux

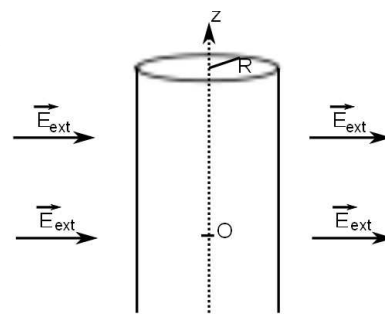
Le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  est supposé galiléen. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère fixe dans ce référentiel. Un point matériel  $M$ , de masse  $m$  et de charge  $q$ , se trouve à la date  $t = 0$  en  $O$ , animé d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et stationnaires suivants :  $\vec{E} = E \vec{j}$  et  $\vec{B} = B \vec{k}$ .



- Déterminer la vitesse de la particule à un instant  $t$ .  
En déduire la vitesse moyenne de la particule suivant  $Ox$ , appelée vitesse de dérive  $\vec{v}_D$ .
- Déterminer les coordonnées de la particule à un instant  $t$ .  
Commentaires ?

### 68 Cylindre conducteur placé dans un champ uniforme

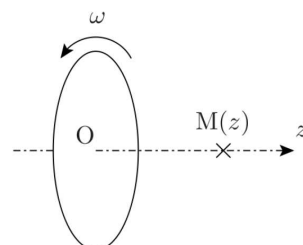
On considère un cylindre conducteur d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$ , maintenu à un potentiel nul et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme  $\vec{E}_{ext} = E_0 \vec{e}_x$  (figure ci-contre). Il se produit un phénomène d'influence, avec un déplacement des charges dans le conducteur engendrant une distribution surfacique de charges, qui crée un champ  $\vec{E}_{cyl}$  s'ajoutant au champ extérieur pour former le champ total  $\vec{E}_{tot}$  que l'on cherche à exprimer. On choisit un repère en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ; on néglige les effets de bord.



- Que peut-on déduire des symétries et invariances ?
- Montrer qu'en tout point situé à l'extérieur du cylindre,  $\Delta(V) = 0$  (équation de Laplace).  
On cherche une solution de la forme  $V = f(r) \times g(\theta)$   
(on donne  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  en coordonnées cylindriques).  
Montrer qu'il existe alors une constante  $K$  telle que  $K = r \frac{f'}{f} + r^2 \frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$ .
- On cherche  $g$  sous la forme  $g(\theta) = \cos(\theta)$ ; à quelle valeur de  $K$  cela correspond-il ? Chercher alors  $f$  sous la forme  $f(r) = r^n$ . Montrer que l'expression  $V(r, \theta) = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \cos(\theta)$  convient.
- On s'intéresse à la solution dans l'espace extérieur au cylindre; à l'aide des conditions aux limites, déterminer  $A$  et  $B$  en fonction de  $E_0$  et  $R$  (on suppose que  $\vec{E}_{tot} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \vec{E}_{ext} = E_0 \vec{e}_x$ ).
- Exprimer le champ électrique total à l'extérieur du cylindre, puis en déduire la densité surfacique de charge en tout point du cylindre.

### 69 Disque de Rowland

Considérons un disque de centre  $O$ , de rayon  $R$  et d'axe  $Oz$ , portant une charge totale  $Q$  uniformément répartie, et mis en rotation autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$  constante (on suppose que cela ne perturbe pas la distribution de charges).

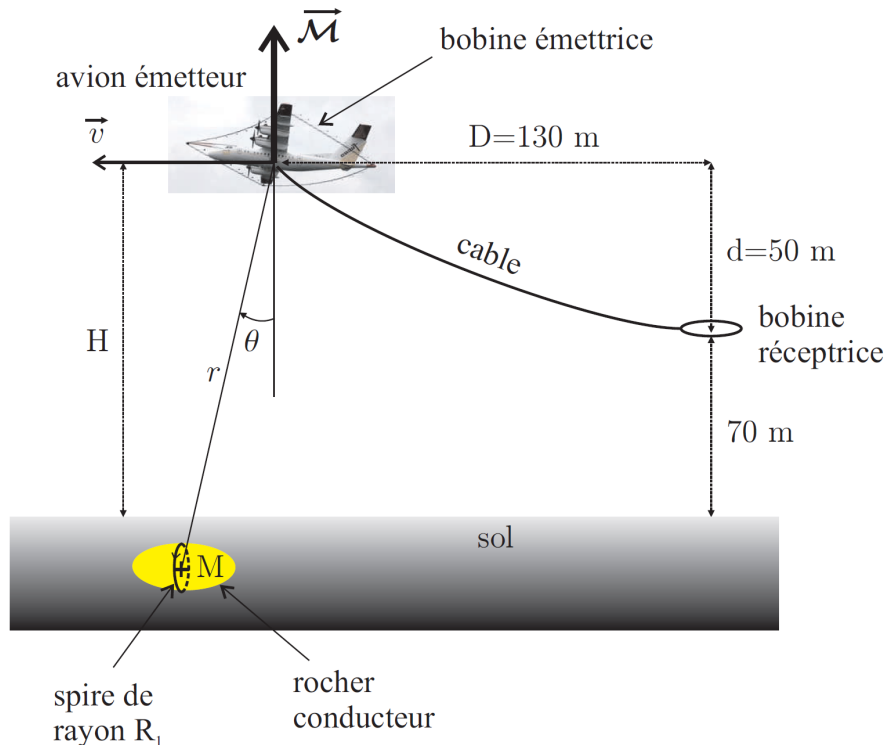


- Exprimer l'intensité  $dI$  du courant parcourant une couronne élémentaire comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ , en fonction notamment de  $Q$ ,  $\omega$  et  $dr$ .
- Retrouver cette expression en considérant une distribution volumique et le vecteur densité de courant.
- En déduire le moment magnétique de ce disque en rotation.

Réponses : 1.  $dI = \frac{Q\omega}{\pi R^2} r dr$ , 3.  $\vec{M} = \frac{1}{4} Q\omega R^2 \vec{e}_z$

## 70 Détection de minerai souterrain

Pour détecter la présence de minerais conducteurs sous le sol, on peut utiliser le phénomène d'induction. La société GeoTEM a développé le système suivant : une grande bobine émettrice parcourue par un courant  $I$  très intense est portée par un avion volant au dessus du sol à une altitude  $H$ . Lorsque l'avion vole droit, la bobine émettrice est supposée contenue un plan horizontal. D'autre part, l'avion traîne à l'aide d'un câble une bobine réceptrice derrière lui.



- Tracer les lignes de champs engendrés par le dipôle magnétique  $\vec{M}$ , représenter les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  au niveau du point M et faire figurer le sens du courant  $I$  dans la bobine émettrice.
- On suppose que le minerai souterrain à détecter est suffisamment petit pour qu'on puisse supposer que le champ magnétique y est constant sur toute sa surface. Donner une expression simplifiée à l'ordre un en  $\theta$  du champ magnétique lorsque l'avion est presque au dessus du minerai, c'est à dire lorsque  $\theta \ll 1$ , en fonction de  $\mu_0$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $H$  et  $\theta$ .
- On modélise le minerai par une spire de rayon  $R_1$  dans le plan vertical (cf figure). Montrer que le flux du champ magnétique à travers cette spire s'exprime, pour  $\theta$  petit, comme :

$$|\Phi| = \left| \frac{3\mu_0 \mathcal{M} R_1^2}{4H^3} \theta \right|$$

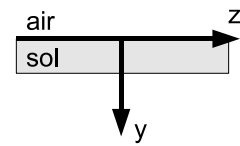
- Si on suppose qu'à  $t = 0$  l'avion est au dessus du minerai, exprimer  $\theta$  en fonction de la vitesse  $v_0$  de l'avion.
- En utilisant la loi de l'induction, en déduire que la force électromotrice  $e$  qui apparaît au niveau du rocher conducteur s'écrit :

$$e = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} R_1^2 v_0}{4H^4}$$

- En appelant  $R$  la résistance équivalente de la spire de rayon  $R_1$ , donner l'expression du courant  $I_{induit}$  qui circule sur la surface du minerai conducteur puis l'expression du moment magnétique induit  $\mathcal{M}_{induit}$ .
- Expliquez pourquoi on mesure une tension aux bornes de la spire traînée par l'avion lors du passage de celui-ci au dessus du minerai. Tracer l'allure de cette tension en fonction du temps.
- Cette technique a été développée originellement pendant la seconde guerre mondiale. À votre avis, quelle était son but ?

## 71 Propagation d'ondes de surface

On considère la propagation d'ondes électromagnétiques parallèlement à l'interface air-sol. L'air a les propriétés du vide ( $\mu_0, \varepsilon_0$ ) et le sol est très légèrement conducteur (pour un sol humide on prendra  $\gamma = 0,01 \text{ S.m}^{-1}$ ). On appelle  $xOz$  le plan de l'interface, et  $Oy$  la verticale descendante.



On étudie des ondes progressives harmoniques avec  $\vec{B}$  polarisé rectilignement selon l'axe  $Ox$ . La représentation complexe du champ magnétique de l'onde est :

- dans l'air :  $\vec{B}_1 = B_{01} \exp(-\alpha_1 y) \exp i(\omega t - k_1 z) \vec{e}_x$
- dans le sol :  $\vec{B}_2 = B_{02} \exp(-\alpha_2 y) \exp i(\omega t - k_2 z) \vec{e}_x$

où les grandeurs  $\omega, k_1, k_2$  et  $\alpha_1$  sont réelles,  $\alpha_2$  peut être complexe,  $\alpha_1$  est négatif. Les courants, lorsqu'ils existent, sont modélisés de façon volumique.

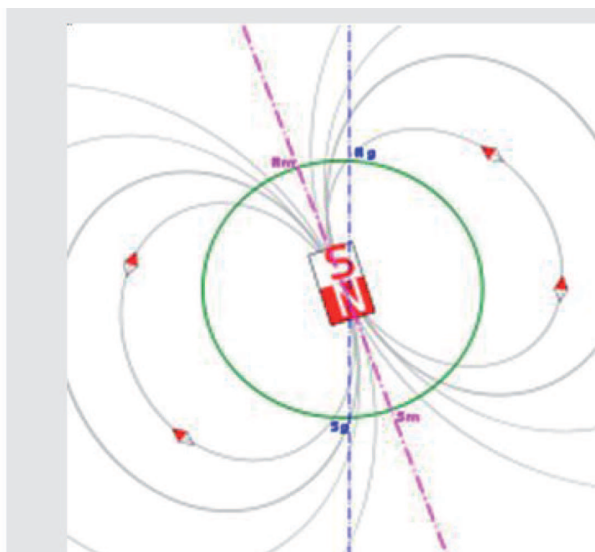
### 1. Onde dans l'air

- Dans quelle direction l'onde électromagnétique se propage-t-elle dans l'air ? Est-ce une onde plane ? Quelle relation existe-t-il entre  $\omega, k_1, \alpha_1, \varepsilon_0$  et  $\mu_0$  ? Le milieu est-il dispersif ? Pour une onde telle que  $\alpha_1 = -1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ , à quelle distance du sol peut-on négliger le champ magnétique à 5% près ?
- Déterminer le champ électrique  $\vec{E}_1$  dans l'air.

### 2. Onde dans le sol

- Jusqu'à quelle fréquence l'approximation des régimes quasi-stationnaires est-elle valable ? Déterminer dans ce cadre l'expression de  $\vec{E}_2$  dans le sol.
- Quelle relation vérifient les champs magnétiques en  $y = 0$  ? En déduire une relation entre  $k_1$  et  $k_2$ .
- Écrire l'équation de propagation de  $\vec{B}_2$  dans le sol ; en déduire l'expression de  $\alpha_2^2$  et montrer que  $\alpha_2$  peut s'écrire sous la forme :  $\alpha_2 = \alpha_2' + i\alpha_2''$  (le calcul de  $\alpha_2'$  et de  $\alpha_2''$  n'est pas demandé).
- Pour une onde de fréquence 0,15 MHz, on trouve  $\alpha_2' = \alpha_2'' = 7,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ . Décrire cette onde dans le sol, en particulier sa direction de propagation, son éventuelle atténuation et sa vitesse de phase.

## 72 Résolution de problème - Moment magnétique de la Terre



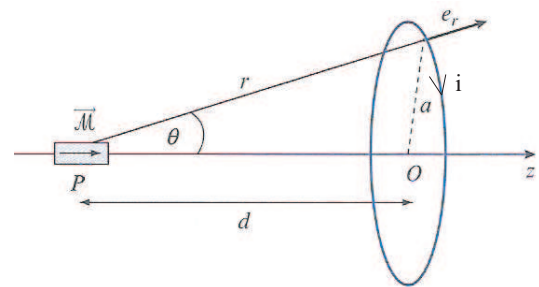
« Le champ magnétique terrestre est engendré par les mouvements du noyau métallique liquide des couches profondes de la Terre. Il peut être vu comme celui d'un aimant droit, en première approximation (ou d'un dipôle magnétique, ou d'une bobine plate parcourue par un courant électrique). En un point donné du champ magnétique terrestre, le vecteur  $\vec{B}$  possède une composante verticale  $\vec{B}_v$  (dirigée vers le centre de la Terre) et une composante horizontale  $\vec{B}_0$ . Aux pôles magnétiques, la composante horizontale a une valeur nulle. L'angle formé par  $\vec{B}$  et  $\vec{B}_0$  est appelé "inclinaison". Il augmente lorsque l'on se rapproche des pôles en tendant vers  $90^\circ$ . Actuellement, la valeur du champ magnétique est de l'ordre de  $47 \mu\text{T}$  au centre de la France. »  
D'après « [http://fr.wikipedia.org/wiki/Champ\\_magnétique\\_terrestre](http://fr.wikipedia.org/wiki/Champ_magnétique_terrestre) »

Évaluer, grâce aux lois de l'électromagnétisme, la valeur du moment magnétique  $\vec{M}$  de la Terre.



### 73 Mouvement relatif d'un aimant et d'une bobine

Une bobine est constituée de  $N$  spires circulaires de rayon  $a$ . Elle est fermée sur elle-même, sa résistance est  $R$  et son inductance est négligée. Un aimant fixe est placé en  $P$  sur l'axe ( $Oz$ ) de la bobine, à la distance  $d \gg a$ . On suppose que le champ créé par l'aimant est le même que celui d'un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = M\vec{e}_z$ .

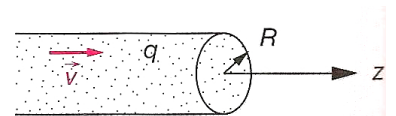


- (a) Montrer que l'expression de la force subie par un aimant de moment magnétique  $\vec{M} = M\vec{e}_z$  placé dans un champ magnétique extérieur inhomogène  $\vec{B}(z)$  est donnée par  $\vec{F} = M\frac{\partial B_z}{\partial z}\vec{u}_z$ .  
 (b) Quelle est la force subie par l'aimant si la bobine est parcourue par un courant  $i$  comme orienté sur la figure ?
- Retrouver ce résultat en considérant les actions de Laplace subies par la bobine du fait de la présence de l'aimant.

Réponses : 1.  $\vec{F}_{\text{bobine} \rightarrow \text{aimant}} = \frac{3\mu_0 N i a^2}{2d^4} M \vec{e}_z$ .

### 74 Champ électromagnétique créé par un faisceau de particules

Un faisceau homocinétique de particules chargées est représenté ci-contre. La géométrie du faisceau est cylindrique de rayon  $R$ , infinie selon l'axe  $Oz$ . Les particules portent la charge  $q$  et ont, par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, une vitesse  $\vec{V}$  constante. La densité volumique de particules est notée  $n$ .



- Champ électrique*  
 Préciser l'expression de la densité volumique de charge  $\rho$  en tout point.  
 Déterminer le champ électrique en tout point à l'extérieur du faisceau.  
 Faire de même à l'intérieur du cylindre délimitant le faisceau.
- Champ magnétique*  
 Définir la densité de courant dans le faisceau.  
 Déterminer le champ magnétique en tout point (à l'intérieur et à l'extérieur du faisceau).
- Relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$*   
 Proposer une relation liant  $\vec{V}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui soit valable en tout point (on utilisera la relation  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$  où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide).
- Étude dans le référentiel lié aux particules*  
 Reprendre l'étude dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où les particules composant le faisceau sont fixes.
- Nécessité d'un traitement relativiste*  
 Obtenir par ailleurs, en considérant la loi de composition des vitesses non relativiste et la force exercée sur une particule chargée, la relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$ , ainsi qu'entre  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'$ .  
 Commenter !

### 75 Lois de Descartes à l'interface entre deux milieux

En utilisant les continuités des champs électriques et magnétiques, redémontrer les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction à l'interface entre deux milieux transparents d'indice  $n_1$  et  $n_2$ .

## 76 Câble coaxial en régime statique

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres infinis  $C_1$  et  $C_2$ , parfaitement conducteurs de rayons  $R_1, R_2$  avec  $R_2 > R_1$  et de même axe  $Oz$ .

Le problème étudié a la symétrie de révolution autour de  $Oz$ . L'âme  $C_1$ , au potentiel  $V_1$ , porte une charge par unité de longueur de câble  $\lambda$  uniforme et est parcourue par le courant  $I$ . La gaine  $C_2$  est au potentiel  $V_2$ , elle porte une charge linéique  $-\lambda$  et est parcourue par le courant  $-I$ . On note  $U = V_1 - V_2$ . Les champs sont *statiques*.

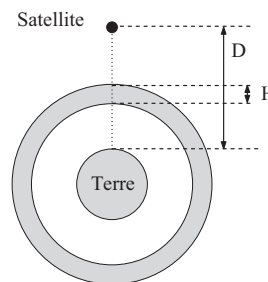
- Déterminer la densité linéique d'énergie électrique dans le système. En déduire l'expression de la capacité linéique  $\Gamma$  du câble.
- Déterminer la densité linéique d'énergie magnétique dans le système. En déduire l'expression de l'inductance linéique  $\Lambda$  du câble.
- Déterminer la valeur du produit  $\Gamma\Lambda$ . Par des arguments dimensionnels, former une impédance  $Z_c$  en utilisant  $\Gamma$  et  $\Lambda$ .
- Déterminer le vecteur de POYNTING ainsi que le flux  $\Phi$  d'énergie électromagnétique traversant une section du câble. Exprimer ce flux en fonction de  $U$  et  $I$  et commenter.

Réponses : 1.  $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ . 2.  $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ . 3.  $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ . 4.  $\vec{\Pi} = \frac{\lambda I}{4\pi^2\epsilon_0 r^2} \vec{e}_z$  pour  $R_1 < r < R_2$ .

## 77 GPS

Le système de localisation GPS (Global Position System) est si précis qu'il est nécessaire de se placer dans le cadre de la relativité générale, mais aussi de prendre en compte la dispersion due à la traversée de l'ionosphère.

L'ionosphère, d'épaisseur  $H$ , est un plasma localement neutre. Les électrons ont une masse  $m$ , une charge  $e$  et une densité  $n$ . On envisage une onde électromagnétique plane progressive harmonique.



- Appliquer le principe fondamental aux charges et établir la relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$ .
- Écrire les équations de MAXWELL en complexe. Montrer que  $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ . Exprimer  $\omega_p$ .
- Pourquoi cette pulsation  $\omega_p$  est-elle appelée pulsation de coupure ? Calculer la vitesse de groupe.
- Une onde électromagnétique est envoyée par un satellite vers la Terre. Quel est le temps  $\tau$  mis pour parcourir la distance  $D$  ?

L'espace est assimilé à du vide en dehors de l'ionosphère. La fréquence de l'onde est telle que  $f \gg f_p$ , où  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ , ce qui permet un calcul approché.

- Pour prendre en compte la dispersion ionosphérique, on envoie deux trains d'onde de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  et on mesure l'écart  $\Delta t$  entre leurs temps de parcours. Exprimer  $\Delta t$  avec  $f_2 > f_1 \gg f_p$ .
- Montrer que  $D = c\tau - d$ , avec

$$d = \frac{f_1^2 f_2^2 c \Delta t}{f_2^2 (f_2^2 - f_1^2)}$$

On trouve que  $d$  est de l'ordre de quelques mètres. Qu'en penser ?

Réponses : 1.  $\underline{j} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \underline{E}$ . 2.  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$ . 3.  $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ . 4.  $\tau \simeq \frac{D}{c} \left(1 + \frac{H}{2D} \frac{f_p^2}{f^2}\right)$ . 5.  $\Delta t = \frac{H f_p^2}{2cD} \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_1^2 f_2^2}$ .

## 78 Champ magnétique créé par un cylindre conducteur

L'espace étant ramené à un repère  $(Oxyz)$ , un guide d'onde de section rectangulaire possède des parois réalisées à l'aide de conducteurs métalliques parfaits et situées en  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  et  $y = b$ . Ces parois délimitent un tube d'air de longueur infinie selon  $Oz$ . On admettra que les propriétés de l'air sont celles du vide.

On s'intéresse à la propagation guidée à l'intérieur du tube d'une onde électromagnétique *transverse magnétique* (onde TM) de pulsation  $\omega$ , pour laquelle les représentations complexes des champs électrique et magnétique sont de la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = (\underline{E}_1 \vec{u}_x + \underline{E}_2 \vec{u}_y + \underline{E}_3 \vec{u}_z) \exp i(k_g z - \omega t) \\ \vec{B} = \underline{B}_2 \vec{u}_y \exp i(k_g z - \omega t) \end{cases}$$

où  $k_g$ , seule composante du vecteur d'onde dans le guide, est une fonction de  $\omega$  à déterminer. Les composantes complexes  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{E}_2$ ,  $\underline{E}_3$  et  $\underline{B}_2$  ne dépendent que des deux coordonnées  $x$  et  $y$ .

1)

a) Écrire les 4 équations de Maxwell dans le guide et en déduire que  $\underline{E}_1$  et  $\underline{B}_2$  s'expriment uniquement en fonction des dérivées partielles de  $\underline{E}_3$  par rapport à  $x$  et à  $y$ . Que peut-on dire de  $\underline{E}_2$  ?

b) Montrer que  $\underline{E}_1$ ,  $\underline{E}_3$  et  $\underline{B}_2$  ne dépendent pas de la coordonnée  $y$ .

2)

a) Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la composante  $\underline{E}_3(x)$ . Après avoir rappelé les conditions aux limites devant exister à la surface d'un conducteur parfait, résoudre cette équation et montrer que la solution dépend d'un entier  $n > 0$ .

b) Quelle est l'expression de  $k_g$  en fonction de  $\omega$ ,  $n$ ,  $a$  et  $c$  ?

3) Quelle est la puissance électromagnétique moyenne  $\langle P \rangle$  qui traverse une section droite du tube, de surface  $axb$  ?

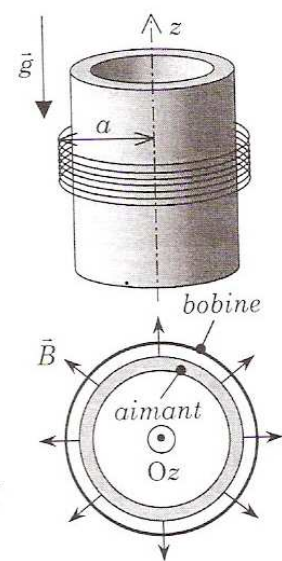
## 79 Léviton magnétique d'une bobine

Une bobine électrique constituée d'une rangée de  $N$  spires circulaires coaxiales jointives de rayon  $a$  parcourues par un courant d'intensité  $I$  constante est enfilée sur un aimant cylindrique fixe vertical de grande longueur et de rayon légèrement inférieur à  $a$ .

L'aimant est fabriqué pour produire un champ magnétique radial dirigé vers l'extérieur, invariant le long de son axe de symétrie  $(O, \vec{u}_z)$  et autour de lui, de sorte que sa valeur  $B$  est la même en chaque point de la bobine.

1. Quel doit être le sens du courant dans la bobine pour qu'elle soit mise en lévitation sans support et sans contact avec l'aimant dans le champ d'accélération uniforme  $\vec{g}$  de la pesanteur ?
2. Connaissant la masse  $m$  de la bobine, déterminer la valeur de l'intensité  $I$  pour que la bobine soit immobile en lévitation. Faire l'application numérique pour  $m = 0,5$  kg,  $g = 10$  m.s<sup>-2</sup>,  $a = 5$  cm,  $B = 1$  T et  $N = 100$  spires.

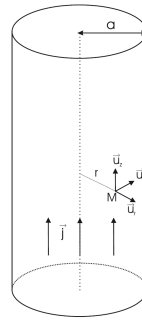
Réponses : 2.  $I = \frac{mg}{2\pi NaB} \approx 160$  mA.



## 80 Éclair et tonnerre

On modélise un éclair par un canal cylindrique d'air ionisé de rayon  $a$ , parcouru du sol vers le ciel par un courant  $I$  supposé continu de l'ordre de  $100kA$ , pendant une durée très brève  $\tau = 10\mu s$ . La température au centre de l'éclair est d'environ  $20000K$ .

La hauteur de l'éclair est telle que le cylindre peut être considéré comme quasi-infini. La pression extérieure est  $P_0 = 1atm$ .



1. On considérera dans tout l'exercice que le courant est réparti de façon uniforme dans l'éclair avec une densité volumique de courant notée  $\vec{j}$ . Exprimer la norme de  $\vec{j}$  en fonction de  $I$  et  $a$ .
2. Par application du théorème d'Ampère et en précisant les symétries et invariances du problème, déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé à l'intérieur de l'éclair par cette distribution de courant.
3. On considère que le plasma qui constitue l'éclair est à l'équilibre mécanique pendant le passage du courant. Traduire cet équilibre par un bilan de forces volumiques, faisant intervenir les forces de pression  $d\vec{F}_P = -\text{grad}P d\tau$ , ainsi que les forces de Laplace  $d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$ . On commentera l'expression de ces forces et on déterminera leur expression en fonction des données du problème.  
Par intégration, en déduire l'expression de la pression  $P(r)$  dans l'éclair en fonction de  $P_0$ ,  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $a$  et  $r$ . On précisera la condition limite utilisée.
4. De la pression au centre de l'éclair, égale à 3 bars, on peut ainsi déduire numériquement le rayon de l'éclair  $a$ , qui est de l'ordre de quelques centimètres. Expliquer pourquoi un craquement sonore accompagne l'éclair.
5. En utilisant le facteur statistique de Boltzmann, et un ordre de grandeur de l'énergie d'ionisation atomique, expliquer pourquoi le gaz traversé peut effectivement être considéré comme un plasma.
6. Quel phénomène important a-t-on négligé dans ce modèle ?

Réponses : 2.  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$ , 3.  $P = P_0 + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} (a^2 - r^2)$ , 4.  $\Delta P = 2bar$ , 5. La probabilité de passer à l'état ionisé est proportionnelle à  $\exp(-E_i/k_B T)$ .

## 81 Interférence à deux ondes

Une onde électromagnétique harmonique plane se propage dans le vide. Elle peut être écrite sous la forme

$$\vec{E}_1 = E_0 \exp [j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})] \vec{u}_y$$

avec  $\vec{k}_1 = k(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$  vecteur d'onde. La base associée aux coordonnées cartésiennes  $(O, x, y, z)$  est  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

1. Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  associé à ce champ électrique.
2. Une deuxième onde électromagnétique se superpose à la précédente. Elle a la même pulsation  $\omega$ , elle est aussi polarisée rectilignement et se propage dans le plan  $(xOz)$  dans une direction symétrique de la précédente par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$ . Le champ électrique  $\vec{E}_2$  a même polarisation, même amplitude et même phase à l'origine que le champ  $\vec{E}_1$ .  
Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}_2$  et du champ magnétique  $\vec{B}_2$ .
3. En déduire le champ électromagnétique résultant de la superposition de ces deux champs en tout point de l'espace. Calculer sa vitesse de phase. Quelle est la nature de cette onde et sa structure ?
4. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. On place un écran sur un plan équiphase. Qu'observe-t-on sur cet écran sachant que l'oeil est sensible dans le domaine visible à la valeur quadratique moyenne du champ électrique ?

## 82 Onde cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe Oz. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, le champ électrique s'écrit :  $\vec{E}(M, t) = E(r)e^{j(\omega t - kr)}\vec{e}_z$  où  $E(r)$  est réel. L'onde se propage dans le vide.

Formulaire :

Laplacien d'un champ vectoriel de la forme  $\vec{A} = A(r, t)\vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques :  $\Delta \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \vec{e}_z$ .

Opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le champ magnétique complexe associé à ce champ électrique.
2. Calculer la valeur moyenne  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  du vecteur de Poynting et en déduire la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  rayonnée à travers un cylindre d'axe Oz de hauteur  $h = 1$  m et de rayon  $r$ .
3. Montrer que l'expression de  $E(r)$  en fonction de  $r$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $\mu_o$  s'écrit :

$$E(r) = \frac{a}{\sqrt{r}} \text{ où } a = \sqrt{\frac{\mu_o \omega \mathcal{P}}{\pi k h}}$$

4. Dans la zone de champ lointain ( $r \gg \lambda$ ), donner les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et montrer que l'onde a la structure d'une onde plane. Représenter-la sur un schéma.
5. En déduire la relation de dispersion reliant  $k$  et  $\omega$ , établie en considérant l'onde dans la zone de champ lointain.

## 83 Fil de Litz (avec Python)

Un conducteur de conductivité électrique  $\gamma$  réelle occupe le demi espace  $x > 0$ . On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

### 1. Propagation d'une onde dans le conducteur

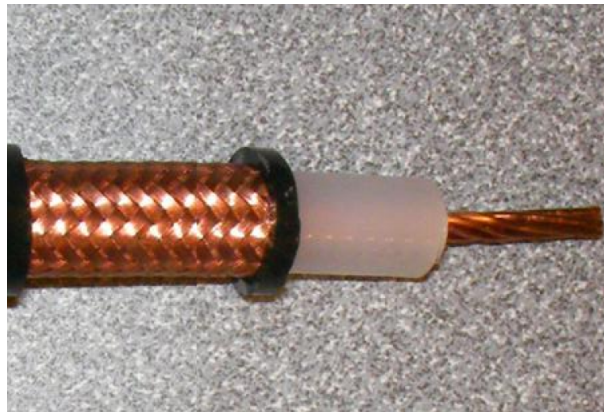
- (a) Rappeler la loi d'Ohm locale ainsi que les équations de Maxwell dans l'ARQS.  
 (b) Établir l'équation différentielle dont est solution le champ électrique,  $\vec{E}(x, t)$ , dans le conducteur. La mettre sous la forme

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

avec  $D$  à exprimer. Commenter l'équation obtenue.

- (c) Soit une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant dans le conducteur selon les  $x$  croissants, de représentation complexe :  $\underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(kx - \omega t)}$ . Établir la relation de dispersion de cette OPPH. On exprimera  $k^2$  en fonction des données.  
 (d) Montrer que  $\underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}$ ; avec  $\delta$ , à exprimer en fonction des données. Caractériser la forme d'onde obtenue et donner la signification physique de  $\delta$ , ainsi que son ordre de grandeur à 50 Hz pour le cuivre.  
 (e) Application.

Un fil de Litz permet de transporter des signaux à haute fréquence. A partir des résultats précédents, expliquer la constitution du fil de Litz présenté dans la figure ci-dessous.



### 2. Interface vide / conducteur.

Le demi espace  $x < 0$  est le vide. Donnée :

- le champ électrique est continu en  $x = 0$ ;
- le champ magnétique est continu en  $x = 0$ ;
- la réflexion / transmission ne modifie pas l'état de polarisation de l'OPPH.

- (a) Une OPPH de pulsation  $\omega$ , polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_y$ , tombe en incidence normale sur le conducteur. Déterminer l'expression des coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et de transmission  $\underline{t}$  en amplitude de l'onde. On fera intervenir le rapport  $\omega\delta/c$  dans les expressions de  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ . Commenter physiquement les résultats obtenus. Examiner le cas  $\gamma \rightarrow \infty$ .  
 (b) Étude informatique.  
 On donne un code en langage Python permettant de tracer l'animation des ondes incidente, réfléchie, leur somme, ainsi que l'onde transmise. Il vous est demandé de modifier le programme afin d'illustrer le rôle des paramètres physiques pertinents rencontrés dans cette étude.

Réponses : 2.a)  $\underline{r} = \frac{\frac{\omega\delta}{c} - (1+i)}{\frac{\omega\delta}{c} + (1+i)}$  et  $\underline{t} = \frac{2\frac{\omega\delta}{c}}{\frac{\omega\delta}{c} + (1+i)}$ .

---

 OPTIQUE
 

---

### 84 Résolution du doublet du Sodium

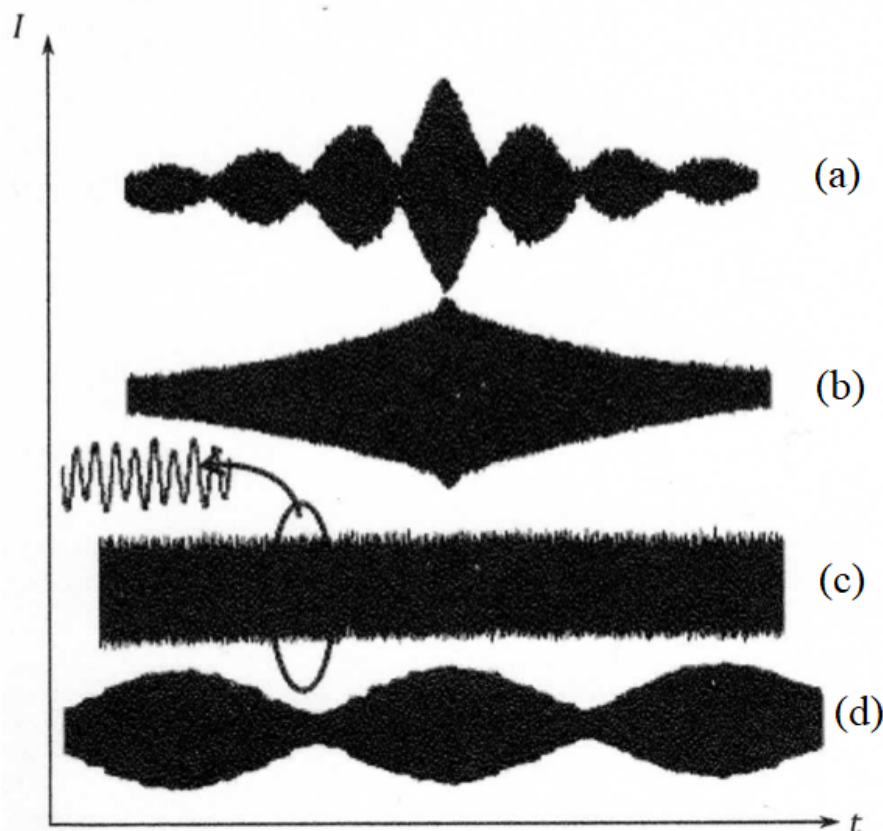
On utilise un réseau pour observer le doublet du sodium.

1. Déterminer le nombre  $N$  minimal de fentes requis pour une observation à l'ordre 1, c'est à dire pour que le doublet soit bien séparé.
2. Comment cette valeur minimale de  $N$  change à l'ordre 2 ?
3. Comment prendre en compte le fait que les raies ne sont pas parfaitement monochromatiques ? Qu'est-ce qui cause cet élargissement ?

### 85 Quel interférogramme pour quelle source ?

A l'aide d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles, on enregistre différents interférogrammes. La figure suivante montre les enregistrements observés avec différentes sources lumineuses :

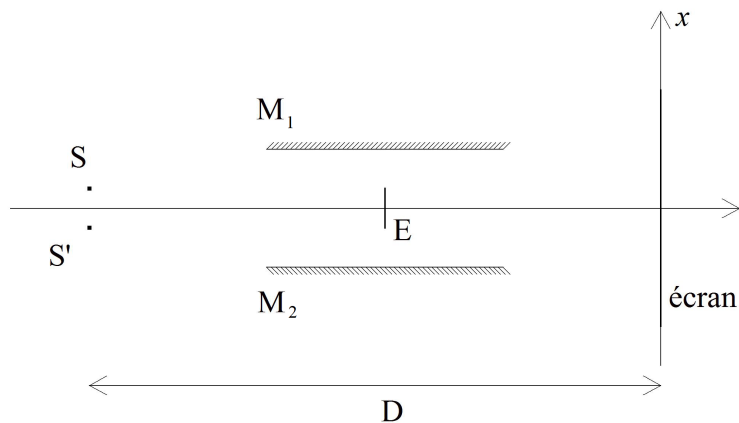
1. laser
2. lampe Mercure haute pression + filtre interférentiel isolant la raie verte
3. lampe Mercure haute pression + filtre interférentiel isolant le doublet jaune
4. lampe Sodium basse pression



Associer à chaque source son interférogramme. Que pouvez-vous dire de l'écart du doublet jaune du Mercure par rapport à celui du Sodium ?

## 86 Interférences avec des miroirs

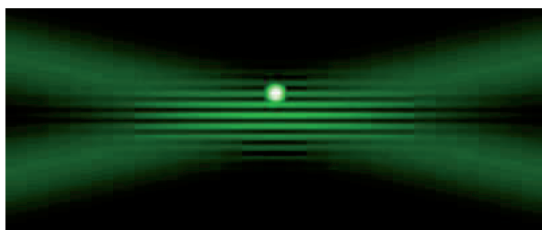
On considère le montage représenté ci-dessous.  $M_1$  et  $M_2$  sont des miroirs plans distants de  $2\ell$ .  $S$  et  $S'$  sont des sources ponctuelles monochromatiques incohérentes, distantes de  $2a$ , de même longueur d'onde  $\lambda$  et de même intensité. L'écran opaque  $E$  supprime la lumière directe, et empêche que les rayons subissant plusieurs réflexions puissent atteindre l'écran. Déterminer l'intensité lumineuse  $I(x)$  sur l'écran, ainsi que le contraste des franges.



## 87 Vélométrie Laser

Une tranche de fluide homogène d'indice  $n$  comprise entre deux plans d'équations  $z = \pm e/2$  est illuminée par deux ondes planes de même amplitude  $A_0$ , issues d'un même laser à impulsions de longueur d'onde  $\lambda_0 = 503.0nm$ , de directions  $\vec{u}_1 = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$  et  $\vec{u}_2 = \cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y$ .

- Établir l'expression de l'éclairement  $I(P)$  dû au laser en un point  $P$ . On choisira le point  $O$ , intersection des deux faisceaux, comme référence des phases, et on fera l'hypothèse que  $\theta$  est très faible.
- Le fluide contient des particules diffusantes  $P$  qui diffusent dans toutes les directions un éclairement  $I$  proportionnel à l'éclairement  $I(P)$ . Le fluide est en mouvement avec un champ des vitesses uniforme  $\vec{v}(P) = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ . On convertit l'éclairement  $I$  en une tension électrique. Montrer que la mesure de sa fréquence  $f$  permet d'accéder à une composante de  $\vec{v}$ . Comment accéder à l'autre composante ?



Faisceau laser dédoublé, puis croisés.  
Une gouttelette d'huile portée par l'air scintille en passant dans les franges  
(©ONERA)



Visualisation d'allées de Von Karman dans un fluide par vélocimétrie laser



## 88 Lunette de visée

Une lunette de visée simple est composée de deux lentilles convergentes ( $\mathcal{L}_1$ ) et ( $\mathcal{L}_2$ ) de focales  $f'_1 = 20 \text{ cm}$  et  $f'_2 = 5 \text{ cm}$  (du côté de l'œil), séparées d'une distance  $D$  réglable.

- (a) Quelle est la distance  $D$  pour voir un objet à l'infini sans accommoder ?  
 (b) Faire un tracé de rayons dans cette configuration.  
 (c) Quel est le grossissement  $G$  ? Quelle est l'orientation de l'image : à l'endroit ou à l'envers à travers la lunette ?
- On veut maintenant voir sans accommoder un objet situé à une distance de  $20 \text{ m}$  de ( $\mathcal{L}_1$ ).  
 (a) Calculer la nouvelle distance  $D$ .  
 (b) Faire un tracé de rayons dans cette configuration.  
 (c) On donne pour l'œil normal (emmetrope), le *punctum proximum* :  $PP = 20 \text{ cm}$ . Quel est le champ de vision net de l'œil avec cette lunette, sans changer  $D$  ?

## 89 Contrôle de l'épaisseur d'un dépôt métallique

On éclaire verticalement par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$  une lame de verre semi-réfléchissante, supposée infiniment fine, et formant un angle  $\varepsilon = 0,10^\circ$  avec une plaque réfléchissant totalement la lumière, sur laquelle un dépôt métallique (parfaitement opaque et réfléchissant) parallélépipédique a été effectué. Le dispositif est plongé dans l'air optiquement assimilable à du vide.

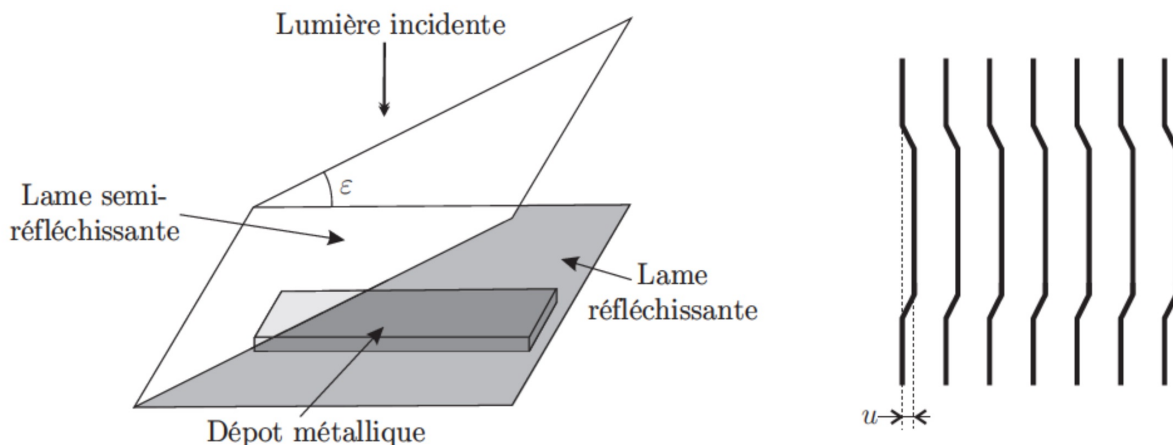


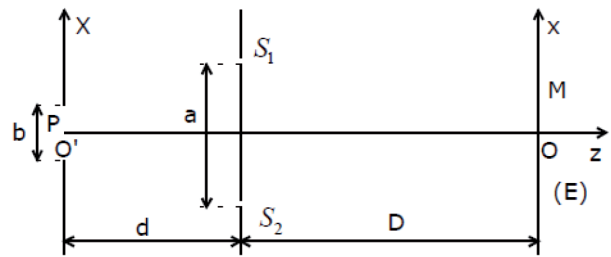
FIGURE 1 – Dispositif optique et franges observées sur l'écran

Au voisinage des lames, on observe des franges non rectilignes ; on dit qu'elles sont "décrochées". Ces franges sont observées sur un écran placé à  $50 \text{ cm}$  d'une lentille convergente de focale  $f' = 4 \text{ cm}$ . Elles sont représentées sur la partie droite de la figure ci-dessus.

- Déterminer l'expression de l'interfrange  $d_i$  observé sur l'écran dans la zone où le dépôt est absent. On exprimera  $d_i$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $\varepsilon$  et du grandissement  $\gamma$  de la lentille et on calculera sa valeur numérique.
- Expliquer ce que l'on observe sur l'écran, et montrer que la valeur  $u$  du décroché mesuré sur l'écran dépend de l'épaisseur  $e$  du dépôt métallique. On mesure  $u = 0,59 \text{ mm}$  sur l'écran, quelle est la valeur numérique de l'épaisseur du dépôt ? Commenter.
- Qu'observe-t-on sur l'écran si on remplace l'air par de l'eau dans la même expérience. Préciser, en le justifiant, ce qui est modifié et ce qui ne l'est pas.
- Qu'observe-t-on sur l'écran si on augmente l'angle  $\varepsilon$ . Préciser, en le justifiant, ce qui est modifié et ce qui ne l'est pas.

## 90 Inversion de contraste avec des trous d'Young

Lorsqu'on réalise l'expérience classique des trous d'Young de la figure ci-contre avec une fente source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , on constate qu'en élargissant la taille de la fente source selon la direction parallèle aux trous, le contraste commence par diminuer, puis des franges sombres/brillantes viennent remplacer les franges initialement brillantes/sombres. On appelle ce phénomène une *inversion de contraste*.

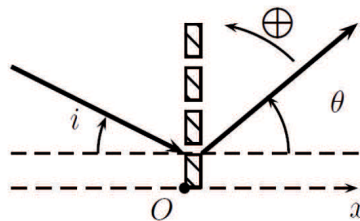


Interpréter ce phénomène et déterminer la largeur  $b$  de la fente lorsque ce phénomène est le plus visible. On notera que  $D \gg a$  et  $d \gg a$ .

Réponse :  $b \simeq \frac{3\lambda d}{2a}$ .

## 91 Spectre d'une lampe à vapeur d'hydrogène

On considère un réseau plan par transmission possédant  $n = 500$  traits par mm. Il reçoit, sous une incidence  $i$ , une lumière parallèle. On appelle  $\theta_k$  l'angle correspondant au maximum principal d'ordre  $k$  pour la longueur d'onde  $\lambda$ . Tous les angles sont évalués algébriquement par rapport à la normale  $Ox$  en référence au sens positif indiqué sur le schéma (ce sens correspond au sens trigonométrique).



1. Quels sont les phénomènes mis en jeu dans le spectroscope à réseau ?
2. Donner la relation littérale liant  $\theta_k, i, k$  et les données en justifiant par le raisonnement le plus simple.
3. On appelle déviation l'angle  $D_k$  entre le rayon émergent et le rayon incident. Exprimer  $D_k$ .
4. On analyse une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ . Montrer que, pour un ordre  $k$  donné, la déviation passe par un minimum  $D_{km}$  pour un réglage précis de l'incidence.
5. On mesure  $D_{1m} = 17^\circ 30'$  à  $1'$  près. Déterminer l'angle d'incidence, faire un schéma résumant la marche des rayons et déterminer  $\lambda_0$  et son encadrement.

On utilise maintenant une lampe à hydrogène émettant les raies suivantes :

raie	H $_{\alpha}$	H $_{\beta}$	H $_{\gamma}$	H $_{\delta}$
$\lambda(\text{nm})$	656,3	486,1	434,0	410,2

On règle l'incidence à la valeur  $i_0$  de telle sorte que  $\theta_1 = 0$  dans l'ordre 1 pour la radiation H $_{\alpha}$ .

6. Calculer  $i_0$ . Combien d'ordres complets peut-on observer théoriquement ?
7. On place derrière le réseau une lentille mince convergente  $L$  de distance focale  $f' = 40$  cm et une plaque photographique  $P$  portant une graduation centimétrique. La raie H $_{\alpha}$  tombe sur la graduation 0. Comment doit-on placer  $P$  pour avoir le maximum de netteté ? Donner les coordonnées des autres raies du spectre d'ordre 1 .

Réponses : Diffraction, interférences,  $\sin \theta_k = \sin i + kn\lambda$ ,  $D_k = \theta_k - i$ ,  $\theta_k = \pm i$  signes différents d'où  $\theta_k = -i$ ,  $D_{km} = 2\theta_k = -2i$ ,  $\theta_1 = 8,5^\circ$ ,  $\lambda_0 = \frac{2}{n} \sin \theta_1$ ,  $\Delta\lambda_0 = \frac{2}{n} \cos \theta_1 \Delta\theta_1$ ,  $\lambda_0 = 608,5 \pm 1,2$  nm,  $i_0 = -19,2^\circ$ , 6 ordres complets  $\{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $x_{\beta} = -f' \tan \beta_1 = -3,4$  cm,  $x_{\gamma} = -4,5$  cm,  $x_{\delta} = -5,0$  cm.

## 92 Résolution de problème - Vision sous l'eau

Pourquoi voit-on flou sous l'eau sans masque ? Pourquoi dit-on qu'on que sous l'eau :

- les objets semblent plus proches :  $3/4$  de la distance réelle ;
- les objets semblent plus gros :  $4/3$  de la taille réelle ?

## 93 L'œil

1. On donne ci-dessous quelques caractéristiques de l'œil humain normal :

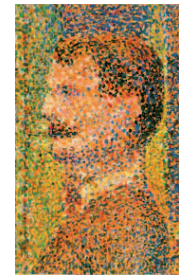
- *Résolution spatiale* : 2 points distants de 1 mm à 4 m de distance.
- *Pupille* : diamètre de 2 à 8 mm.
- *Cellules réceptrices* : la fovea, zone centrale de la rétine située à 1,5 cm derrière la pupille mesure environ 1,5 mm de diamètre et contient 400 000 cônes.

- (a) À l'aide des données, calculer le pouvoir séparateur de l'œil humain. On exprimera le résultat numérique en minutes d'arc.
- (b) Quel phénomène limite la résolution de l'œil ?
- (c) Calculer la taille de l'image sur la rétine d'un point lumineux observé.
- (d) Calculer l'ordre de grandeur du diamètre d'un cône de la rétine. Conclure.



2. Le peintre néo-impressionniste Georges Seurat était un membre de l'école du pointillisme. Ses tableaux sont constitués d'un très grand nombre de points rapprochés (0,3mm) de couleurs différentes. L'illusion du mélange des couleurs est uniquement produit dans l'œil de l'observateur.

À quelle distance d'une toile doit-on se tenir pour avoir une impression de fusion des couleurs ?



3. Commenter les différentes vues du travail d'un artiste contemporain (Chris Jordan) reproduisant un tableau de Seurat.

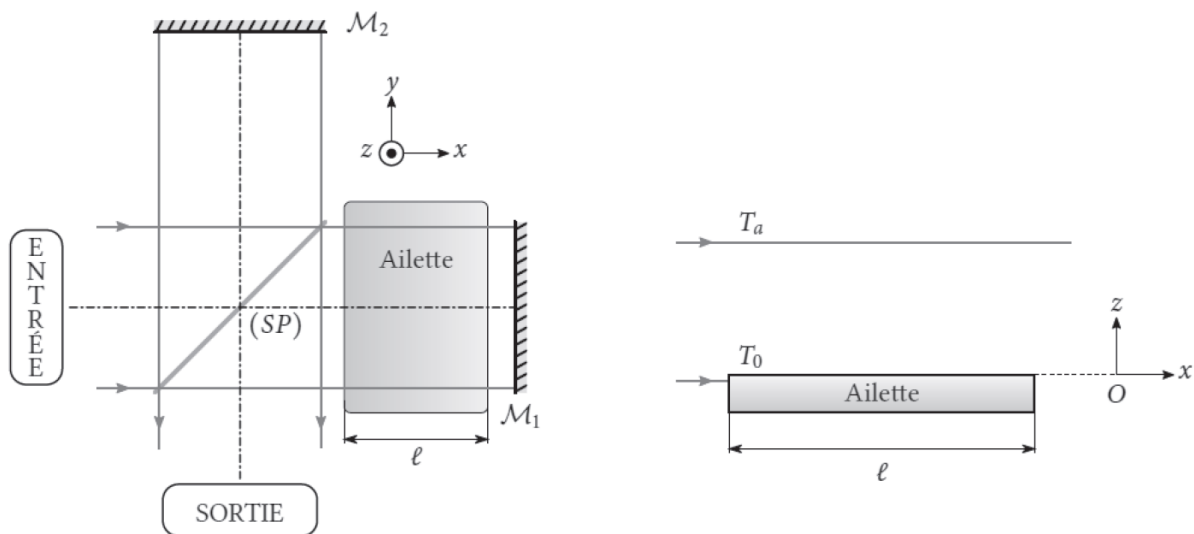


## 94 Mesure optique d'un coefficient de conducto-convection

Afin de mesurer le coefficient  $h$  de transfert conducto-convectif entre une ailette de refroidissement et l'air au dessus, on étudie par interférométrie l'air au voisinage de l'une des ailettes du dissipateur. On utilise pour cela un interféromètre de Michelson constitué de deux miroirs plans  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  et d'une séparatrice idéale ( $SP$ ) de dimension nulle n'introduisant aucun déphasage (**figure 1**).

L'ailette est placée sur l'un des bras d'un interféromètre de Michelson puis est portée à une température constante et uniforme  $T_0 = 55\text{ °C}$ , supérieure à la température ambiante  $T_a = 25\text{ °C}$ . L'air surmontant l'ailette est soumis à un gradient de température vertical, noté  $T(z)$ , et est traversé horizontalement par le flux lumineux dans l'interféromètre.

Le coefficient de conductivité thermique de l'air vaut  $\lambda_a = 26.10^{-3}$  USI.



**Figure 1** – Montage en vues de haut et de côté

L'indice d'un gaz dépendant de la température, celui de l'air situé au-dessus de l'ailette, se trouve modifié. On admet que l'indice  $n$  de l'air suit la relation

$$n(T) = 1 + \frac{C}{T} \text{ où } C \text{ est une constante positive.}$$

L'interféromètre de Michelson est réglé en configuration lame d'air, au contact optique. Il est éclairé par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\Lambda$ . Afin d'éclairer au mieux toute la zone située au-dessus de l'ailette, l'éclairage incident est constitué d'un faisceau lumineux cylindrique le plus large possible.

- 1) À l'aide de tout le matériel que vous estimez nécessaire, expliquer comment éclairer l'interféromètre de façon à produire un faisceau lumineux de diamètre constant. Préciser comment procéder expérimentalement pour positionner entre eux les différents éléments utilisés.

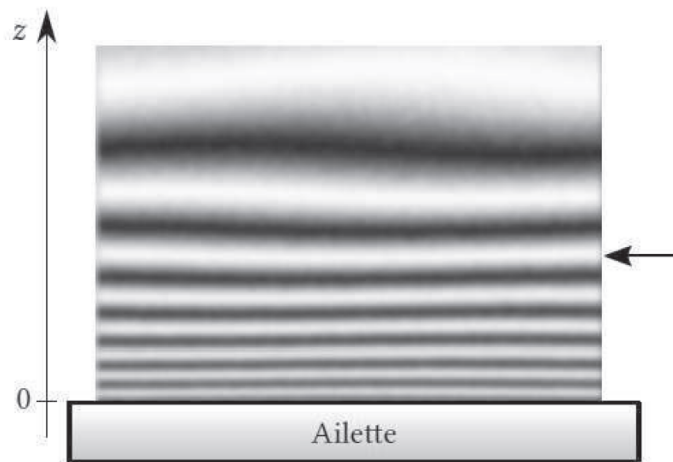
### Température en fonction de l'ordre d'interférence

Les dimensions de l'ailette sont suffisamment grandes devant le diamètre du faisceau lumineux pour qu'aucun effet de bord ne perturbe le champ d'interférence. Tout se passe donc comme si une lame d'indice  $n(T)$  et de longueur  $\ell$  était placée sur l'un des bras de l'interféromètre. On appelle  $\delta$  la différence de marche d'un rayon passant par le miroir  $\mathcal{M}_1$  par rapport à un rayon passant par  $\mathcal{M}_2$ .

- 2) Déterminer l'expression de  $\delta$  en fonction de  $n(T)$ ,  $n(T_a)$  et  $\ell$ , puis en fonction de  $T$ ,  $T_a$ ,  $C$  et  $\ell$ .
- 3) En déduire que l'intensité lumineuse est constante sur une surface isotherme.
- 4) On note  $p$  l'ordre d'interférence. Exprimer  $p$  en fonction de  $C$ ,  $\ell$ ,  $\Lambda$ ,  $T_a$  et  $T$ . En déduire l'expression de  $p_0$ , l'ordre d'interférence à la surface de l'ailette de température  $T_0$ .
- 5) Montrer que la température  $T$  associée à la frange d'ordre  $p$  vaut alors :

$$T(p) = \frac{T_a}{1 - \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{T_a}{T_0}\right)}.$$

L'interférogramme de la **figure 2** a été obtenu en sortie du dispositif. Sa hauteur est inférieure à la taille usuelle d'un miroir de l'interféromètre. En bas de l'interférogramme, la température de l'air traversé est celle de l'ailette et au sommet, on a la température ambiante.



**Figure 2** – Interférogramme

- 6) D'après le résultat de la **question Q20**, toutes les températures sont calculables dès lors que l'on connaît l'ordre d'interférence de chacune des franges. Déterminer, en le justifiant, la valeur de l'ordre d'interférence de la frange brillante repérée par une flèche sur la **figure 2**.

### Température en fonction de la cote $z$

On se propose enfin de vérifier que le profil de température de l'air au-dessus de l'ailette suit une loi de la forme

$$T(z) = \alpha + \beta \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \text{ où } \alpha, \beta \text{ sont des constantes positives et } \delta = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

- 7) Exprimer les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $T_0$  et de  $T_a$ .
- 8) Quelle fonction de la température  $T(z)$  doit-on tracer en fonction de  $z$  pour obtenir une droite de pente  $1/\delta$  ? Ce tracé, non demandé, a permis d'obtenir la valeur numérique de  $\delta$ .
- 9) Déterminer l'expression littérale du flux thermique surfacique dans l'air à la surface de l'ailette. Sachant que ce flux thermique surfacique vaut aussi  $h(T_0 - T_a)$  d'après la loi de Newton, en déduire l'expression littérale du coefficient  $h$  en fonction de  $\lambda_a$  et de  $\delta$ .
- 10) Déterminer la valeur numérique du coefficient  $h$ .

## 95 Prescription de lunettes de vue

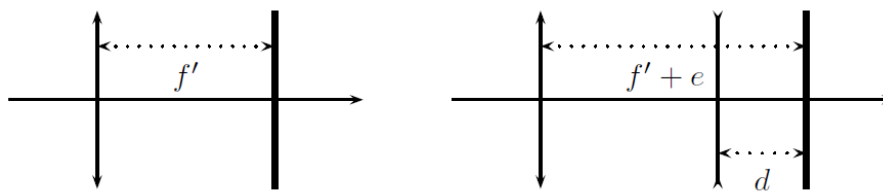


Quelles lunettes faut-il prescrire à :

1. un myope qui peut lire un texte éloigné de ses yeux jusqu'à une distance de  $20\text{cm}$  au maximum.
2. un hypermétrope qui peut lire un texte éloigné de ses yeux jusqu'à une distance de  $50\text{cm}$  au minimum.

## 96 Tripleur de focale

On réalise la photographie d'objets situés à grande distance au moyen d'un objectif, assimilé à une lentille mince unique de focale  $f' > 0$ . Le plan de la pellicule est confondu avec le plan focal image de l'objectif (voir la figure ci-dessous, à gauche).



1. Quelle est la dimension  $D$  d'une image sur le plan de la pellicule si l'objet s'étend sur une largeur angulaire  $\theta$ ? Application numérique : calculer  $\theta$  pour  $f' = 300\text{ mm}$  et  $D = 36\text{ mm}$ .
2. Pour un objet donné, augmenter  $D$  consiste à augmenter  $f'$  donc l'encombrement de l'appareil. On veut ici réaliser l'équivalent d'un tripleur de focale, c'est-à-dire un dispositif qui réalise une image de dimension triple de celle obtenue avec l'objectif seul, tout en ayant un encombrement inférieur à  $3f'$ .

On écarte pour cela (voir la figure de droite) l'objectif de la pellicule d'une distance  $e$  avant d'insérer une seconde lentille (divergente sur le schéma) entre les deux. Cette lentille est à la distance  $d$  du plan de la pellicule et sa distance focale est notée  $\varphi'$ ; elle doit introduire un grandissement égal à  $+3$ , sans changer le sens de l'image.

Exprimer  $\varphi'$  et  $d$  en fonction de  $e$ . Faire l'application numérique pour  $e = 200\text{ mm}$ .

3. Le dispositif joue-t-il son rôle de tripleur lorsqu'on l'insère devant un autre objectif?

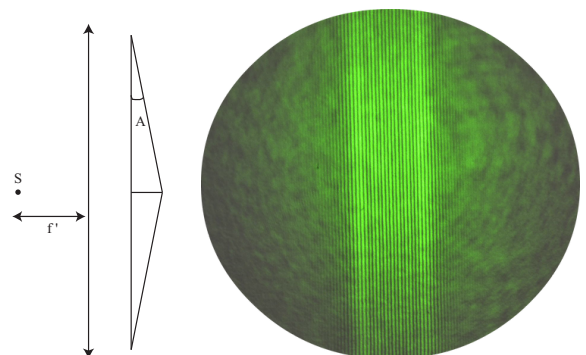
Réponses : 2.  $\varphi' = -\frac{3}{4}e$  et  $d = \frac{3}{2}e$ .

## 97 Biprisme de Fresnel

On place une source ponctuelle monochromatique  $S$  au foyer objet d'une lentille convergente. Le système éclaire un biprisme de Fresnel d'indice  $n$  (deux prismes accolés par leurs bases d'angles au sommet  $A$  très faibles).

1. Tracer les faisceaux lumineux. Délimiter le champ d'interférence.
2. On place un écran à une distance  $D$  du biprisme pour observer la figure d'interférence. Calculer l'éclairement  $E$  en un point  $M(x)$  de l'écran. Donner l'interfrange et le nombre de franges lumineuses.

Réponses :  $I = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi(n-1)Ax}{\lambda} \right) \right]$ .



## 98 Résolution de problème - Réseau holographique

D'après

diverses sources : un cours de l'ESPCI, un article de science de l'ingénieur et «<http://www.lyc-vinci-levallois.ac-versailles.fr> »

### Fabriquer un réseau en photographiant des interférences.

Aujourd'hui les « réseaux holographiques » qu'on obtient directement en photographiant des franges sur des polymères photosensibles ont tendance à remplacer les réseaux gravés.

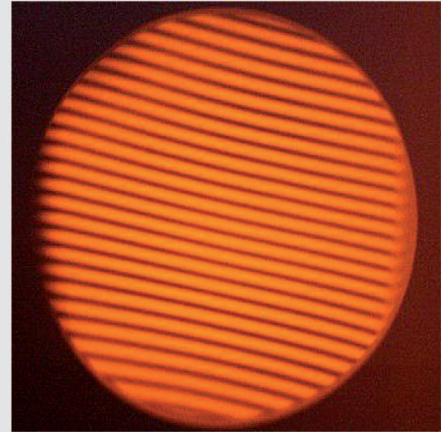
Il s'agit de produire un interférogramme à partir de la figure d'interférence de 2 faisceaux après séparation d'amplitude.

L'angle qui sépare les 2 faisceaux incidents sur la plaque holographique déterminera le pas du réseau et donc son nombre de traits au mm.

Les "traits" du réseau sont matérialisés par les franges sombres et brillantes de l'interférogramme.

Pratiquement le procédé se décompose en 3 étapes :

- la première concerne l'enregistrement des interférences sur un support photosensible ;
- la seconde implique un procédé chimique de développement du support, et dure typiquement un bon quart d'heure avec des plaques argentiques,
- la dernière est le processus dans lequel un laser diffracte sur le réseau sinusoïdal codé dans le support photosensible.



On photographie les franges créées par un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air sur la pellicule photosensible d'un appareil photographique de focale  $f' = 50 \text{ mm}$  placé à  $70 \text{ cm}$  des miroirs de l'interféromètre éclairé par une lampe au sodium.

Déterminer l'angle  $\alpha$  du coin d'air pour que le réseau généré soit de 300 traits par  $\text{mm}$ .

## 99 Résolution de problème - Expérience "Laser-Lune"

Extraits de l'expérience « laser-lune » (disponible en ligne : [culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/laser-distance-terre-lune.xml](http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/laser-distance-terre-lune.xml))

par Marie-Christine Artru. - Centre de recherche d'astrophysique de Lyon, ENS Lyon

### Déterminer la distance terre-lune et ses variations grâce à un laser

L'expérience « laser-lune » de l'Observatoire de La Côte d'Azur (OCA) a pour but la détermination précise de la distance terre-lune et de ses variations.

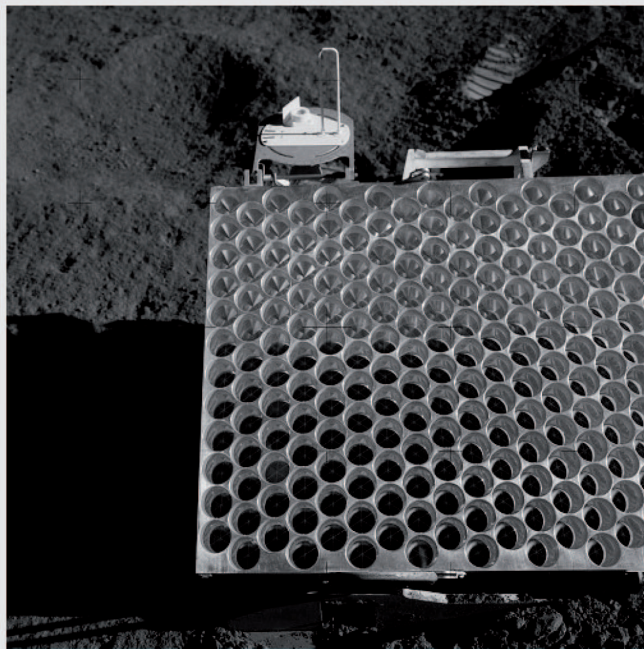
Le principe est la mesure de la durée d'aller-retour d'une impulsion laser émise du sol terrestre vers un réflecteur lunaire, soit  $\tau = 2,56$  s entre l'émission d'une impulsion et la réception du signal de retour correspondant. Actuellement, la distance terre-lune est déterminée au centimètre près, la précision atteinte sur la mesure de  $\tau$  étant de  $\delta\tau \approx 100$  ps.

Dans le cas du laser-lune la longueur d'onde est  $\lambda = 532$  nm (laser YAG-Nd doublé). Le diamètre du faisceau à la sortie du laser est de 1,2 cm. Le laser émet une centaine d'impulsions en 10 s. Chaque impulsion du laser émet une énergie  $E = 0,3$  J sur une durée de  $0,3 \mu\text{s}$  (puissance-crête de 1 MW!).

Le réflecteur lunaire est un panneau composé d'une mosaïque d'éléments catadioptriques, de type « coins de cube ». La proportion moyenne des photons détectés après réflexion sur la lune est inférieure à 1 sur  $10^{19}$ .

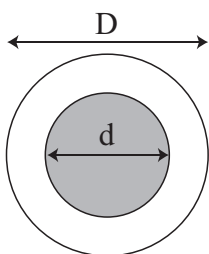
à droite : réflecteur déposé sur la Lune par les astronautes de la mission Appolo XV. C'est le plus grand des réflecteurs déposés sur la lune (dimensions 1 m x 0,6 m).

Source : NASA, Appolo XV Map and Image Library, image n° AS15-85-11468



Quel est le nombre de photons qui arrivent pour chaque impulsion sur le réflecteur posé sur la Lune, après un aller Terre-Lune ?

## 100 Thermomètre à mercure



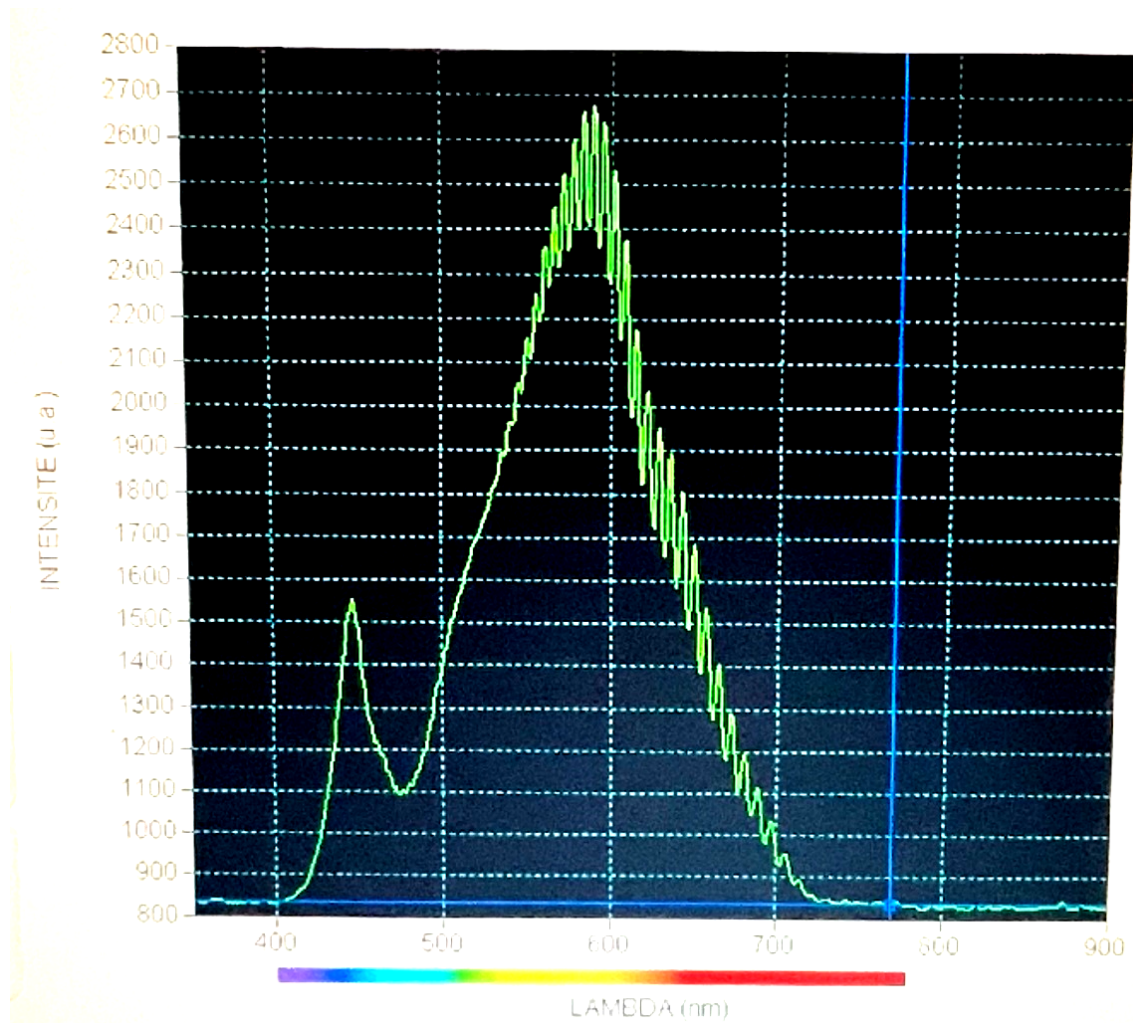
Un thermomètre à mercure est constitué d'un tube en verre de diamètre extérieur  $D = 5\text{mm}$ , et de diamètre intérieur  $d$  inconnu. Ce tube creux est rempli de mercure.

1. Quelle est la taille du diamètre intérieur  $d$  pour que l'on ait l'impression visuelle que le tube n'est constitué que de mercure ?
2. Que se passe-t-il si l'on plonge le thermomètre dans l'eau ?



## 101 Résolution de problème - Epaisseur d'une lame de Mica

On éclaire une lame de mica transparente, à faces parallèles, d'épaisseur  $e$  inconnue et d'indice  $n = 1,57$  avec une source de lumière blanche. On place un spectromètre à fibre juste derrière la lame et on enregistre le spectre ci-dessous. En déduire l'épaisseur de la lame.



---

**THERMODYNAMIQUE**


---

**102 Résolution de problème - Jet d'eau de Genève**

On fournit ci-dessous quelques informations techniques issues de la fiche touristique de la ville de Genève relative à son célèbre jet d'eau (cf photographie ci-contre).

- Débit :  $500 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$
- Puissance des pompes :  $1 \text{ MW}$
- Puissance de l'éclairage :  $9 \text{ kW}$

À l'aide de ces données, estimer l'ordre de grandeur de la hauteur du jet.


**103 Résolution de problème - Chauffage par frottement**


Pierre se frotte les mains pendant 10 s. Estimer l'échauffement  $\Delta T$  produit dans la paume des mains.

**104 Compresseur et création d'entropie**

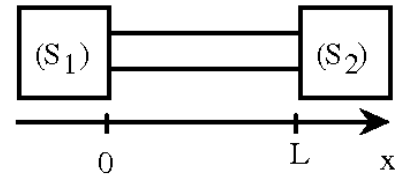
Dans un compresseur fonctionnant en régime permanent, de l'air est comprimé, de façon adiabatique, à partir de l'état  $P_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_1 = 293 \text{ K}$ , jusqu'à une pression  $P_2 = 3,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . On supposera le gaz parfait. On prendra  $C_p = 29 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ . On définit le coefficient de performance  $\eta$  comme le rapport du travail isentropique massique  $w_{is}$  que consommerait le compresseur sur le travail réel  $w_{réel}$  absorbé par la machine. On donne  $\eta = 0,8$ .

1. Donner la valeur de la température finale  $T_2$  ainsi que celle du travail  $w_{is}$  dans le cas idéal (compresseur isentropique).
2. Déterminer les nouvelles valeurs  $T_2'$  et  $w_{réel}$  pour le compresseur réel. Définir et calculer la création d'entropie par unité de masse du fluide comprimé.

Réponses : 1.  $T_2 = 401 \text{ K}$  et  $w_{is} = \frac{C_p}{M}(T_2 - T_1) = 108 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$ , 2.  $T_2' = 429 \text{ K}$  et  $s_c = \frac{C_p}{M} \ln\left(\frac{T_2'}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 66,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

## 105 Échange thermique à travers une barre

Une barre calorifugée, de longueur  $L$ , d'axe  $Ox$ , de section  $S$ , de capacité calorifique massique  $c_B$ , de masse volumique  $\rho$  et de conductivité thermique  $\lambda$  est reliée à deux corps  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .



1. On suppose que  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont deux sources de chaleur de températures  $T_1$  et  $T_2 < T_1$ . Calculer  $T(x)$  en régime permanent.
2.  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont maintenant deux corps de capacités calorifiques  $C_1$  et  $C_2$  et de températures initiales  $T_{10}$  et  $T_{20}$ . Dans l'approximation d'un régime quasi-permanent, déterminer le temps au bout duquel  $T_1 - T_2 = \frac{T_{10} - T_{20}}{2}$ .
3. Discuter la validité de l'approximation de régime quasi-permanent.
4. Proposer un circuit électrique analogue.

Réponse : 2.  $t = \tau \ln 2$  avec  $\tau = \frac{L}{\lambda S} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ . 3.  $C_B \ll \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ .

## 106 Neige artificielle

Un canon à neige pulvérise dans l'air froid ( $T_{ext} = -15^\circ C$  et  $P_0 = 1bar$ ) des gouttelettes d'eau liquide de rayon  $R = 10\mu m$  et de température  $T_i = 10^\circ C$  supposée uniforme. Chaque gouttelette entretient avec l'air des échanges thermiques modélisés par un flux conducto-convectif donné par :

$$d\Phi = h(T - T_{ext})dS \quad \text{où} \quad h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$



On supposera le régime quasi-permanent est atteint dans tout le problème.

1. Calculer le temps nécessaire pour qu'une gouttelette atteigne la température  $T_s = -5^\circ C$ , appelée *température de surfusion* jusqu'à laquelle l'eau peut rester liquide en l'absence de perturbations.
2. À  $T = T_s$ , l'état de surfusion est brutalement rompu. Calculer alors la fraction massique de glace qui s'est formée.
3. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.
4. Justifier que le régime permanent est bien atteint.

Données :  $c_{eau} = 4.18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\ell_{fus}(0^\circ C) = 333 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et  $\lambda_{th,eau} = 0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Réponses : 1.  $t_1 = \tau \ln \left( \frac{T_i - T_{ext}}{T_s - T_{ext}} \right) = 1.3 \text{ s}$  avec  $\tau = \frac{c_{eau} \rho_{eau} R}{3h} = 1.4 \text{ s}$ . 2.  $x = \frac{c \Delta T}{\ell_{fus}} = 6.3\%$ . 3.  $\Delta t = \frac{(1-x)\ell_{fus} \rho R}{3h(T_s - T_{ext})} = 10.4 \text{ s}$ .

4.  $\tau_{cond} = \frac{\rho c R^2}{\lambda} \simeq 7 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

## 107 Réservoir d'azote liquide

Une sphère de rayon  $R = 1m$  contenant de l'azote liquide (qui commence à se vaporiser à  $-196^\circ C$ ) est entourée d'une gaine sphérique en polystyrène d'épaisseur  $e = 1cm$  et de conductivité thermique  $\lambda_{th} = 0.1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . La face externe de la gaine est à  $8,6^\circ C$ , tandis que sa face interne est à  $-196^\circ C$ .

Calculer la puissance reçue par l'azote par conduction.

Combien de temps  $\tau$  faut-il pour que l'azote soit totalement sous forme gazeuse ? On donne la chaleur latente de vaporisation de l'azote liquide sous 1 bar :  $L_v = 199 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et sa masse volumique :  $\rho_{N_2,\ell} = 806 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Réponse :  $\mathcal{P} = \frac{\lambda_{th} 4\pi R^2}{e} \Delta T = 26 \text{ kW}$  et  $\tau = \frac{\rho_{N_2,\ell} 4\pi R^3 L_v}{3\mathcal{P}} \simeq 2 \text{ h } 15 \text{ mn}$

## 108 Moteur Diesel

On admettra que les mélanges gazeux considérés sont assimilables à des **gaz parfaits**, que les capacités thermiques massiques à pression et volume constants sont indépendantes de la température et que leur rapport vaut  $\gamma = 1,40$ .

L'excès d'air nécessaire à la combustion des carburants sera considéré comme suffisant pour que dans toutes les phases des cycles, le mélange gazeux comprimé, détendu, chauffé et refroidi puisse être assimilé à cet air. On ne tiendra donc compte de la masse des carburants que pour évaluer les quantités de chaleurs reçues de la source chaude.

### Question préliminaire

1. Les mélanges ayant une masse molaire  $M$  égale à celle de l'air, déterminer les valeurs numériques des capacités thermiques massiques à pression constante  $c_P$  et à volume constant  $c_V$ . On prendra  $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  pour la constante des gaz parfaits et  $M = 29,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  pour la masse molaire de l'air.

### Etude générale du cycle moteur

Le cycle d'un moteur diesel peut être décrit par la suite de transformations suivantes :

- compression adiabatique réversible de l'air de  $A$  à  $B$  ;
- combustion isobare, par injection de carburant, de  $B$  à  $C$  ;
- détente adiabatique réversible de  $C$  à  $D$  ;
- refroidissement isochore de  $D$  à  $A$ .

2. Tracer ce cycle dans le diagramme de Clapeyron ( $p$  en ordonnée et  $V$  en abscisse).

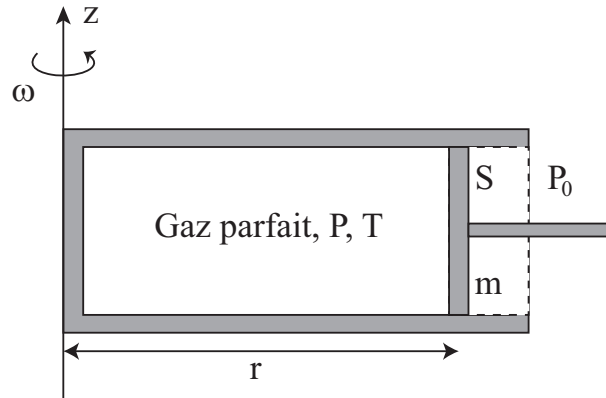
On suppose que la quantité de chaleur reçue de la source chaude provient exclusivement de la combustion interne.

3. Exprimer les transferts thermiques reçus par le mélange au cours des transformations  $A - B$ ,  $B - C$ ,  $C - D$  et  $D - A$  (notés  $Q_{AB}$ ,  $Q_{BC}$ ,  $Q_{CD}$  et  $Q_{DA}$ ) en fonction de la masse du mélange, des capacités thermiques massiques  $c_P$  et  $c_V$  et des températures des différents états.
4. Exprimer toutes les températures en fonction de  $T_A$  et des rapports volumétriques  $\alpha = \frac{V_A}{V_B}$  et  $\beta = \frac{V_A}{V_C}$ .
5. Montrer que l'expression du rendement  $r$  du cycle (rapport entre le travail fourni et la quantité de chaleur reçue de la source chaude) en fonction de  $\gamma$  et des rapports volumétriques  $\alpha$  et  $\beta$  est :

$$r = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\beta}{\alpha^\gamma} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

## 109 Piston tournant

On s'intéresse à un piston calorifugé de section  $S = 4 \text{ cm}^2$  mis en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $z$ . Celui-ci contient un gaz diatomique supposé parfait, de masse molaire  $M$  initialement à la pression  $P_0 = 1 \text{ bar}$  et à la température  $T_0 = 298 \text{ K}$  avant la mise en rotation. Le piston fait alors une longueur  $\ell_0 = 8 \text{ cm}$  et pèse  $m = 1 \text{ kg}$  (on pourra supposer que son centre de masse est placé à une distance  $\ell_0$  de l'axe de rotation).



- On suppose tout d'abord que les grandeurs caractérisant le gaz sont uniformes.
  - On met très progressivement le piston en rotation jusqu'à  $\omega$ . Déterminer la pression finale  $P_{eq}$  dans le piston sachant que  $\ell_{eq} = 12\text{cm}$ .
  - Déterminer la valeur de  $\omega$  à l'état final.
  - Déterminer la température  $T_{eq}$  finale.
- On cherche à revenir sur l'hypothèse de départ sur le caractère uniforme des grandeurs thermodynamiques dans le cylindre.
  - Donner l'expression de la pression  $P(r)$  dans le cylindre en fonction de  $r$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $r_{eq}$ ,  $P_0$ ,  $R$ ,  $T_0$  et  $\gamma$ .
  - En déduire la valeur de la pression en  $r = 0$  et en  $r = r_{eq}$  en prenant la valeur de  $\omega$  déterminée à la première question.
  - Conclure.

## 110 Résolution de problème - Chaussure de ski

On considère une chaussure de ski.

Données :

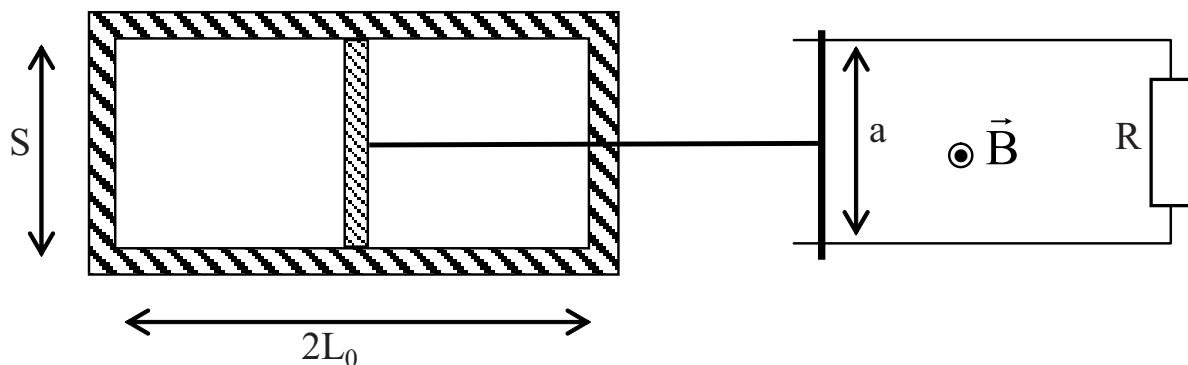
- épaisseur de la mousse du chausson : 5 mm ;
- épaisseur de la coque : 5 mm ;
- conductivité thermique de la mousse :  $0,02 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;
- conductivité thermique du plastique :  $0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;
- surface moyenne de la chaussure :  $0,18 \text{ m}^2$ .



- Calculer la puissance thermique moyenne dissipée par le pied dans la chaussure.
- On souhaite améliorer le confort du skieur. On insère une semelle chauffante. Elle est chauffée par un fil de cuivre de diamètre 0,15 mm associé à une pile de 9 volts.  
On souhaite réduire de moitié la puissance thermique perdue précédemment. Déterminer la longueur du fil à utiliser.

## 111 Systèmes couplés

On considère un cylindre de section  $S$  de longueur  $2L_0$  séparé en deux compartiments par un piston mobile sans frottement. Les parois et le piston sont calorifugés.



Le piston est relié à une barre métallique par une tige rigide. La barre glisse sans frottement sur deux rails horizontaux conducteurs, séparés d'une distance  $a$ , reliés entre eux par une résistance  $R$ . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique perpendiculaire au plan du circuit. Le piston sépare le cylindre en deux volumes égaux qui contiennent un gaz parfait à la température  $T_0$  et à la pression  $P_0$ .

- À l'instant initial on déplace la barre vers la droite d'une longueur  $x_0 \ll L_0$  et on la lâche sans vitesse initiale. Expliquer qualitativement l'évolution du système. Puis établir l'équation différentielle vérifiée par la position de la barre. On supposera les transformations réversibles.
- On donne  $x_0 = 1\text{cm}$ ,  $P_0 = 1\text{bar}$ ,  $L_0 = 1\text{m}$ ,  $S = 0,2\text{m}^2$ ,  $a = 30\text{cm}$ ,  $R = 10\Omega$ ,  $B = 0,1\text{T}$ , et  $m = 0,1\text{kg}$ . Connaissant l'ordre de grandeur de  $\gamma$ , donner la forme de la solution de l'équation différentielle de la question précédente.
- Proposer une méthode utilisant ce montage pour en déduire  $\gamma$ .

Réponses : 1.  $\ddot{x} + \frac{B^2 a^2}{mR} \dot{x} + \frac{2P_0 \gamma S x}{L_0 m} = 0$ , 2.  $x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t)$  avec  $\tau = \frac{2mR}{(aB)^2}$  et  $\Omega = \sqrt{\frac{2\gamma P_0 S}{mL_0}}$ , 3.  $\gamma = \frac{\Omega^2 mL_0}{2P_0 S}$ .

## 112 Étoile sphérique en équilibre hydrostatique

Une étoile sphérique fluide (centre  $O$ , masse  $m$ , rayon  $R$ ), supposée homogène, se trouve en équilibre dans le vide interstellaire sous l'action des forces pressantes et des forces internes de gravitation.

Au point  $M$  tel que  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ , le champ de gravitation intérieur à l'étoile est radial et a pour expression :

$$\vec{g}(r) = -Kr\vec{u}_r$$

$K$  étant une constante. L'étoile est constituée d'un fluide incompressible, de masse volumique  $\rho$  (type étoile à neutrons).

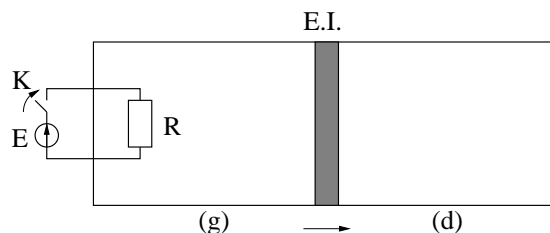
- Grâce au théorème de Gauss utilisé en gravitation, déterminer la valeur de la constante  $K$  en fonction de  $\rho$  et de la constante universelle de gravitation  $G$ .
- Déterminer la pression  $p_C$  qui règne au centre  $O$  en fonction de  $K, m$  et  $R$ , puis en fonction de  $G$  et  $m$ . Évaluer cette pression en bars en supposant que l'étoile a la masse du Soleil :  $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ . On donne  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ , et on rappelle que la force de pression volumique s'exerçant sur un volume élémentaire s'écrit dans le cas général  $\vec{f}_P = -\text{grad}P$ .
- En supposant l'étoile composée d'hydrogène, assimilable à un gaz parfait, déterminer la température  $T_C$  au centre de l'étoile, en fonction de  $G, m, R$ , de la constante de Boltzmann  $k_B$  et de la masse  $m_H$  de l'atome d'hydrogène.

Donner un ordre de grandeur de  $T_C$  en supposant que l'étoile a un rayon mille fois supérieur à celui de la Terre. On rappelle la constante des gaz parfaits  $\mathcal{R} = 8,13 - J.K^{-1}.mol^{-1}$ . Commenter.

Réponse : 1.  $K = \frac{4\pi}{3} G\rho$ . 2.  $p_C = \frac{3mK}{8\pi R} = \frac{Gm\rho}{2R} = \frac{3Gm^2}{8\pi R^4} \sim 1,4 \cdot 10^9 \text{ bar}$ . 3.  $T_C = \frac{Gmm_H}{2Rk_B} = \frac{GmM_H}{2R\mathcal{R}} \sim 10^6 \text{ K}$ .

## 113 Transformations couplées

Un cylindre horizontal, adiabatique, est séparé en deux parties par une paroi, mobile sans frottements, et adiabatique. À partir d'un état initial identique pour chaque compartiment (1 mole de gaz parfait,  $P_0, T_0, V_0$ ), on chauffe lentement le compartiment de gauche à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à  $P_g = 5P_0$ .



- Déterminer les paramètres d'état à gauche (indice g) et à droite (indice d) :  $V_g, T_g, V_d, P_d$  et  $T_d$  dans l'ordre de votre choix. Le gaz est un gaz parfait diatomique, de rapport  $C_P/C_V = \gamma$ .
- Faire un bilan d'énergie pour chaque compartiment (et pour le système global) :  $W_g, Q_g, \Delta U_g$  et  $W_d, Q_d, \Delta U_d$ .

En déduire l'énergie thermique  $Q$  fournie par la résistance.

Réponse : 1.  $P_g = P_d = 5.P_0, V_d = V_0.5^{-1/\gamma}, T_d = T_0.5^{(\gamma-1)/\gamma}, V_g = V_0(2 - 5^{-1/\gamma}), T_g = T_0.5.(2 - 5^{-1/\gamma})$ . 2.  $Q_d = 0, \Delta U_d = \frac{5}{2}R(T_d - T_0) = W_d; \Delta U_g = \frac{5}{2}R(T_g - T_0), W_g = -W_d, Q_g = \Delta U_g - W_g; \Delta U_g + \Delta U_d = Q_g = Q$ .

## 114 Détente d'azote dans une turbine

De l'azote, assimilé à un gaz parfait (masse molaire  $M = 28 \text{ g.mol}^{-1}, \gamma = 1,4$ ) s'écoule en régime permanent dans une turbine, avec un débit massique  $D_m = 4 \text{ kg.s}^{-1}$ . À l'entrée de la turbine, la pression est de  $P_1 = 4 \text{ bar}$  et la vitesse du fluide  $v_1 = 20 \text{ m.s}^{-1}$ ; à la sortie, la pression est  $P_2 = 2 \text{ bar}$ , la vitesse du fluide  $v_2 = 180 \text{ m.s}^{-1}$  et la température  $T_2 = 298 \text{ K}$ . Le gaz dans la turbine reçoit de la part de l'extérieur une puissance mécanique de  $80 \text{ kW}$ .

- En supposant que la transformation subie par l'azote est isotherme, déterminer la puissance thermique reçue par le fluide.
- Calculer l'entropie créée par seconde dans la turbine.
- On suppose désormais que la turbine est calorifugée. Déterminer quelle doit alors être la température du fluide en entrée, et quelle est l'entropie créée par seconde, sachant que  $T_2 = 298 \text{ K}$  en sortie.

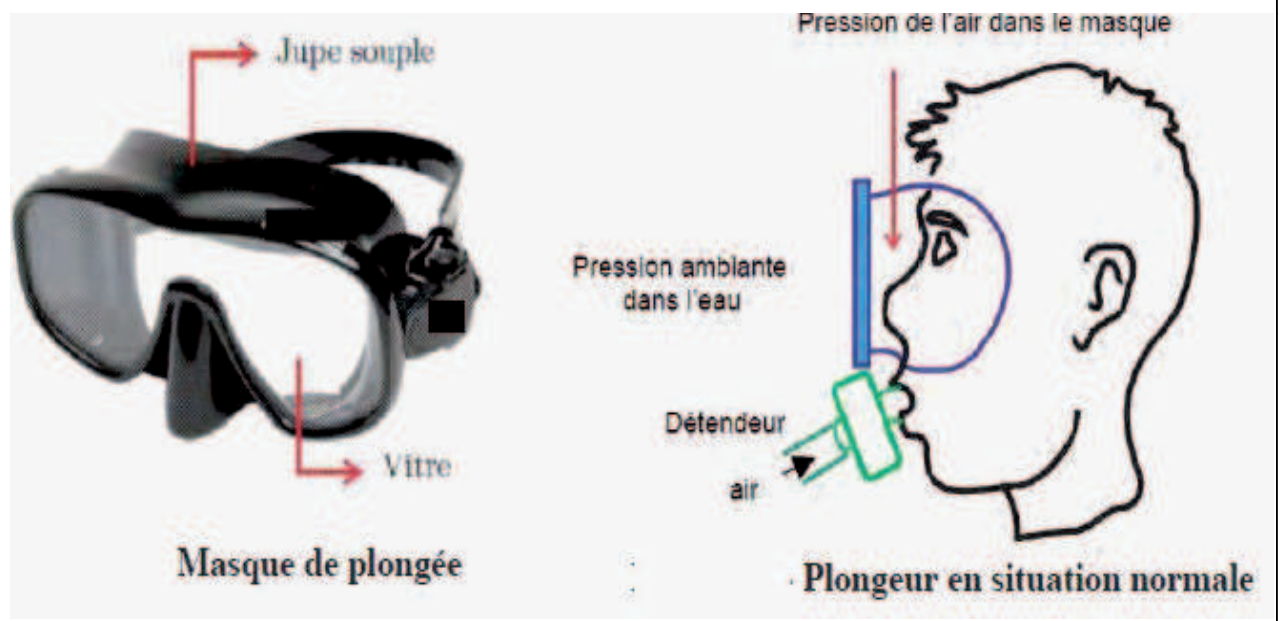
Réponse : 1.  $P_{th} = \frac{D_m}{2}(v_2^2 - v_1^2) - P = -16 \text{ kW}$ . 2.  $\dot{S}_c = -D_m \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) - \frac{P_{th}}{T} = 877 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . 3.  $T_2 - T_1 = \frac{M(\gamma-1)}{R\gamma D_m} \left( P_m - D_m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right)$  et  $T_1 = 294 \text{ K}$ .  
4.  $\dot{S}_c = D_m \left( \frac{R}{M(\gamma-1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \right) = 863 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

## 115 Plongée sous-marine

- Rappeler, sans démonstration, l'équation fondamentale de la statique des fluides.
- En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  de l'eau de mer en un point de cote  $z$ .
- Des photos sous-marines ont été prises à une profondeur de  $8000 \text{ m}$ . Quelle est la force exercée sur l'objectif de dimensions  $10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  (il est assimilé à un rectangle)? Conclure sur la solidité des matériaux utilisés à de telles profondeurs.

**Analyse de document : le placage du masque**

Le placage du masque est un accident barotraumatique fréquemment rencontré chez un plongeur débutant. Cet accident survient à faible profondeur chez le plongeur qui ne souffle que par la bouche l'air expiré. Lors de la descente, il y a un moment où le masque se plaque sur le visage. Le masque ainsi plaqué a perdu environ un tiers de son volume intérieur. Lorsque la différence entre la pression sanguine du plongeur et la pression de l'air contenu dans le masque, devient supérieure à 0,4 bar, il y a rupture des capillaires de la membrane superficielle de l'œil et de la muqueuse nasale, ce qui entraîne l'apparition d'hématomes sur le visage ou de saignement de nez. Ces troubles, en général sans gravité, peuvent être évités simplement en soufflant par le nez régulièrement.



4. Expliquer pourquoi, lors de la descente, il arrive un moment où le masque se plaque sur le visage du plongeur.
5. Pourquoi le plongeur doit-il souffler par le nez régulièrement durant la descente pour éviter les troubles liés au placage du masque ?
6. Calculer la profondeur avant laquelle il est indispensable de souffler par le nez pour éviter les troubles liés au placage du masque.



## 116 Résolution de problème - Coefficient de performance d'une pompe à chaleur

Issu de la page

<http://pompe-a-chaleur.comprendrechoisir.com/comprendre/cop-coefficient-performance>

**Récupérer plus d'énergie thermique que l'énergie électrique consommée.**

On appelle coefficient de performance ou COP, le rapport "énergie thermique restituée/énergie électrique consommée".

Avec un coefficient de performance de 3, une pompe à chaleur qui consomme 1 kWh d'électricité produit 3 kWh de chauffage.

Quand on parle donc d'un COP 3 (+7°C ; 65°C) pour une pompe à chaleur air - eau par exemple, cela signifie que :

- lorsqu'il fait 7 degrés dehors,
- la pompe à chaleur consomme 1kWh d'électricité
- pour générer 3kWh de chauffage
- en chauffant l'eau à 65°C.



Vérifier que le coefficient de performance d'une pompe à chaleur chauffant l'eau à 65°C lorsqu'il fait 7 °C dehors pourrait être de 3.

## 117 Résolution de problème - Projet "Ice Dream"

Extraits de la page web disponible à l'adresse "[www.3ds.com/fr/icedream/](http://www.3ds.com/fr/icedream/)"  
firme Dassault

**Remorquer un iceberg pour avoir de l'eau douce**

Le projet icedream est l'idée de l'ingénieur français Georges Mougin qui développe et affine son concept révolutionnaire depuis plus de 40 ans : remorquer des icebergs et les exploiter pour produire de l'eau douce!

Les fondamentaux du projet pilote sont donc les suivants : un iceberg d'environ 10 millions de tonnes, un remorqueur qui met 140 jours à relier Terre-Neuve et les Iles Canaries.

**Données :**

Puissance thermique  $P_{th}$  échangée par un système à la température  $T$  en contact sur une surface  $S$  avec un fluide à la température  $T_{fluide}$  dans le modèle conducto-convectif de Newton :

$$P_{th} = h (T_{fluide} - T) S$$

avec

- le coefficient de transfert thermique de l'air :

$$h \approx 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

- le coefficient de transfert thermique de l'eau :

$$h \approx 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Enthalpie de fusion de la glace :  $L_{fus} = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$



photomontage (Uwe Kils).

Sachant que la densité de la glace vaut  $d = 0.917$ , estimer la proportion de l'iceberg qui fond par jour. Conclure.

## 118 Résolution de problème - Perçage par Laser

On veut percer une pièce métallique à l'aide d'un laser. On utilise un laser de puissance de 5 W de longueur d'onde 450 nm dont le faisceau a un diamètre de 0,25 mm.

La pièce métallique à percer est cylindrique de rayon 1 cm et d'épaisseur 1 mm, en Fer (masse volumique :  $7,86 \text{ g.cm}^{-3}$ , capacité thermique :  $444 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , conductivité thermique :  $80 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , température de fusion :  $1538^\circ\text{C}$ , enthalpie de fusion :  $267 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ).

L'expérience se fait dans le vide, la pièce métallique étant maintenue par un support thermostaté à  $20^\circ\text{C}$  sur toute sa surface latérale.



Évaluer, en explicitant votre raisonnement et les hypothèses que vous serez amenées à prendre, si il est possible de percer un trou dans la pièce métallique dans ces conditions.

## 119 Méthode Flash-Laser (avec Python)

On considère une pièce cylindrique de rayon  $r$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , de capacité thermique massique  $c$ , de masse volumique  $\rho$  et d'épaisseur  $e$ .

- On suppose d'abord l'épaisseur  $e$  très petite de façon à pouvoir supposer la température uniforme  $T(t)$  au sein de la pièce à un instant donné. La pièce est chauffée uniformément en volume par une source de puissance  $P$  mise en route à l'instant  $t = 0$ , instant auquel la température intérieure  $T$  initiale vaut  $T_0$ , température de l'extérieur.
  - Établir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T$  de la pièce en considérant que le flux thermique des pertes conducto-convectives est modélisé par une loi de Newton de la forme  $P_{th} = h(T - T_0)S$ ,  $h$  est le coefficient d'échange et  $S$  la surface de la pièce.
  - En déduire l'expression de la température  $T$  de la pièce en fonction du temps en introduisant un temps caractéristique  $\tau$ .
  - On suppose que le chauffage s'effectue pendant une durée  $t_0$  très inférieure à  $\tau$ . En déduire une expression approchée de la température sur l'intervalle de temps  $[0, t_0]$ . Quelle est la valeur maximale  $T_{\max}$  atteinte par  $T$  ?
  - Donner ensuite l'expression de  $T$  sur l'intervalle  $[t_0, \infty]$ .
  - En supposant que  $\forall t_0, Pt_0 = E$  (constant), que devient l'allure de la température si  $t_0 \rightarrow 0$  ?
- On s'intéresse désormais à la conduction axiale au sein de la pièce.
  - Établir l'équation de la diffusion thermique (pour  $T(x, t)$ ) au sein du solide.
  - En utilisant le modèle de Parker (voir l'annexe), donner l'expression de la température réduite sur la face arrière de la pièce définie par  $u(t) = (T(e, t) - T_0) / (T_{\max} - T_0)$ . Approcher cette expression pour les instants supérieurs au temps caractéristique de la diffusion (d'après le modèle de Parker).
  - Compléter le script PYTHON fourni pour donner les représentations graphique analytique exacte et approchée de la température réduite.
  - En déduire que le temps de demi-montée  $t_{1/2}$  (pour lequel  $u$  vaut  $1/2$ ) permet de déterminer la diffusivité thermique du matériaux.
- Étude du Dural.
  - À l'aide de l'expérience de Balageas (détaillée dans l'annexe), estimer la diffusivité  $D$  du Dural.
  - Comparer les temps caractéristiques des pertes convectives (pour  $h = 5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ) et de la conduction au sein de la pièce. Que penser de l'hypothèse consistant à négliger les pertes convectives ?
  - Estimer l'énergie apportée par la source à la face avant.
  - Quelles critiques peuvent être formulées concernant le modèle de Parker ?

## Annexes

### 119.1 Méthode de Parker

La technique flash laser a été développée par Parker (1960) afin d'obtenir des mesures rapides de la conductivité thermique d'échantillons de petites dimensions. Elle consiste à envoyer une impulsion très brève sur la face avant d'un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ensuite, l'analyse de l'évolution de la température sur la face arrière en fonction du temps permet la détermination de la diffusivité thermique. Le Modèle de Parker consiste à considérer un disque parfaitement isolé d'épaisseur  $e$  et de rayon  $r$ . Initialement, l'échantillon reçoit une impulsion énergétique de très courte durée, l'absorption de l'énergie s'effectue en surface de façon uniforme. Les pertes convectives sont supposés nuls sur toutes les faces et le flux thermique se propage parallèlement à l'axe optique. La résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de Laplace. À une profondeur  $z$  donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit où  $D$  est la diffusivité thermique du matériau :

$$T(z, t) = T_0 + (T_{\max} - T_0) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left( \frac{n\pi z}{e} \right) \exp \left( \frac{-n^2 \pi^2 D t}{e^2} \right) \right)$$

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour les basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail. La figure 1 donne un exemple de montage :

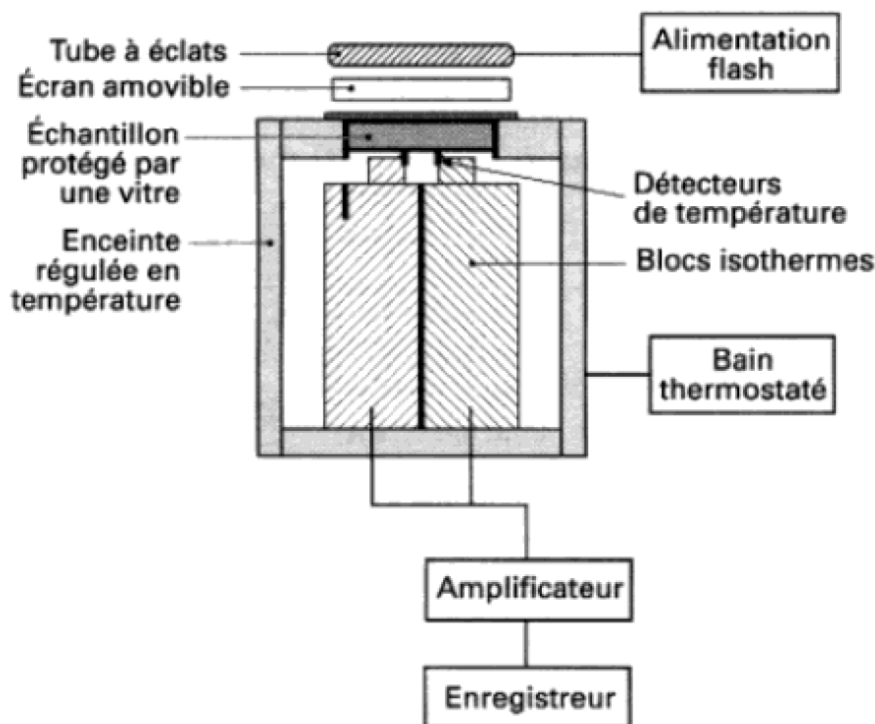


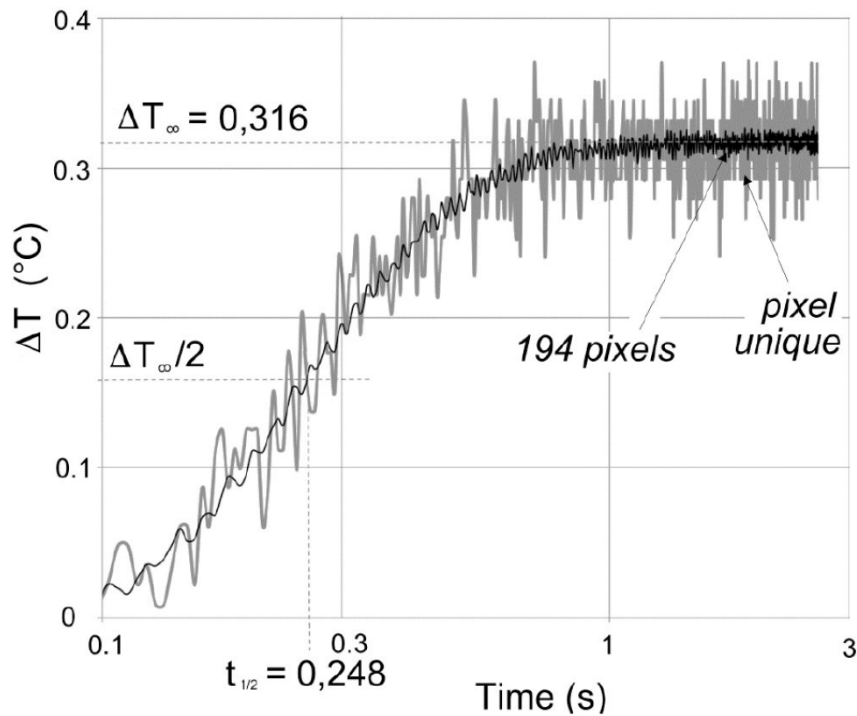
Figure 1 Exemple de montage expérimental de méthode Flash-Laser

### 119.2 Étude du Dural

Le Dural (ou duralumin ou encore duraluminium) est un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique en raison de sa grande résistance aux contraintes et de sa plus faible densité que l'acier. Sa densité n'est que de 2,8. Sa capacité thermique massique est  $c = 880 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Des mesures de diffusivité en faces arrière ont été réalisées (Daniel Balageas, ONERA Département Matériaux et Structures) sur une plaque de Dural, illuminée par 2 lampes flash créant des illuminations de 4 ms

(maximum de l'intensité à moins de 2 ms) avec au niveau de l'échantillon en face avant une énergie surfacique  $\epsilon$ . La température surfacique était enregistrée par une caméra Jade LW Cedip à la fréquence image de 200 Hz. Une mesure en face arrière est faite afin de disposer d'une valeur à priori fiable de la diffusivité (méthode de Parker). Deux thermogrammes sont présentés : la température d'un pixel unique (courbe grise) et celle de la moyenne d'une zone circulaire centrale de 194 pixels, centrée sur ce pixel. La moyenne d'une zone de 194 pixels conduit à un rapport signal sur bruit de 62 .



**Figure 2** Thermogramme d'une plaque de Dural de surface  $S = 0,01 \text{ m}^2$  et d'épaisseur  $e = 1 \text{ cm}$

---

**PHYSIQUE STATISTIQUE**


---

## 120 Estimation de la masse de l'atmosphère terrestre

En considérant l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme à  $0^\circ\text{C}$ , déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de la masse  $M_a$  de l'atmosphère terrestre.

Il est rappelé que l'épaisseur de l'atmosphère est grande devant  $h = 8 \text{ km}$  (hauteur caractéristique à  $0^\circ\text{C}$ ) et petite devant le rayon terrestre  $R = 6400 \text{ km}$ .



## 121 Balance de précision

Une balance de précision est réalisée avec un ressort de très faible raideur  $K$  et de longueur à vide  $l_0$  dont on mesure la longueur  $l$  quand on suspend une masse.

1. Quel est la longueur  $l_{eq}$  si on suspend une masse  $m$  ?
2. Le système est plongé dans de l'air à la température  $T$ . Quelle est la valeur de la longueur moyenne  $\bar{l}$  du ressort quand une masse  $m$  est suspendue ?
3. On pose désormais  $u = l - l_{eq}$ . Quelle est l'énergie potentielle du système ?
4. Donner, en utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, l'écart type  $\Delta u$ .
5. Quelle masse minimale peut-on mesurer avec ce système ? Donner un ordre de grandeur de cette masse pour  $K = 1 \text{ N.m}^{-1}$  et  $T = 300 \text{ K}$ .

Réponse : 3.  $E_p(l) = \frac{1}{2}Ku^2 + cte$ , 5.  $m_{min} = \frac{\sqrt{Kk_B T}}{g}$ .

## 122 Barrage

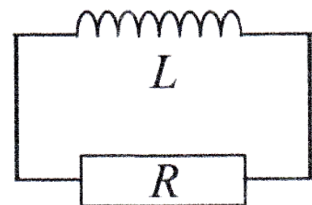
1. Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur un barrage droit, vertical, de hauteur  $h$  et de largeur  $L$  (cf Fig.a).
2. Comparer à la résultante des forces de pression s'exerçant sur un barrage en arc de cercle, vertical, de hauteur  $h$  et de largeur  $L$  (cf Fig.b). On pourra supposer pour simplifier que le profil du barrage vu du ciel est un demi cercle. Commenter.



## 123 Fluctuation statistique du courant

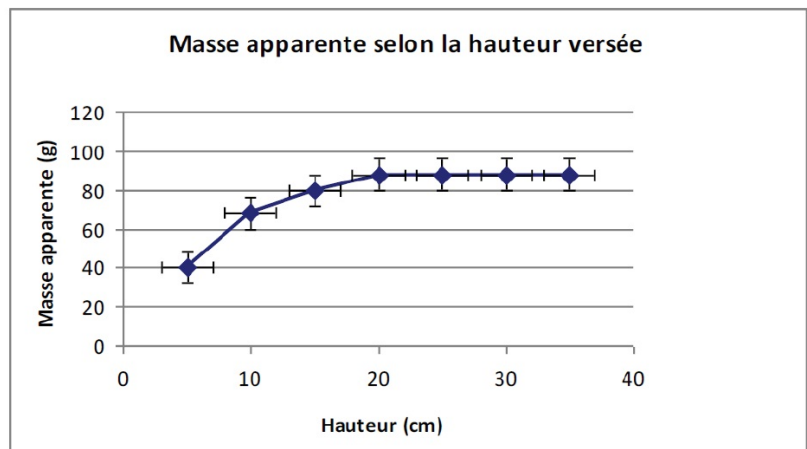
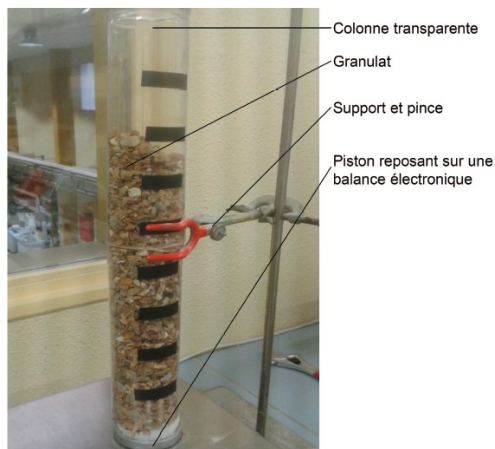
Le circuit électrique représenté ci-contre est en équilibre thermique avec un thermostat à la température  $T$ .

Déterminer l'expression de  $\Delta i$ , écart quadratique moyen de l'intensité du courant électrique circulant dans l'inductance. Application numérique pour  $L = 100 \text{ mH}$  et  $T = 300 \text{ K}$ .



## 124 Pression dans un silo à grain : modèle de Janssen

Lorsqu'on remplit progressivement une colonne verticale à l'aide d'un milieu granulaire (gravillons, sable ou même grains de céréales) et qu'on mesure la pression en bas de celle-ci, on constate que la pression n'excède jamais une certaine valeur.



1. Montrer que les hypothèses listées ci-dessous, faites par Janssen en 1895, permettent d'interpréter ce phénomène.

*On considère un cylindre de rayon  $R$  rempli de grains sur une hauteur  $h$ . La première hypothèse est de considérer le milieu granulaire comme un milieu continu incompressible de masse volumique  $\rho$ . Ensuite il vient 2 autres hypothèses :*

- Une contrainte (c'est à dire une force par unité de surface) verticale  $P_z$  engendre une contrainte horizontale  $P_r$  qui lui est directement proportionnelle :  $P_r = KP_z$
- Les lois de Coulomb s'appliquent au niveau de la paroi verticale de sorte qu'à la limite du glissement :  $T = \mu_s N$ , où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique.

2. Faire le lien avec l'expérience présentée dans la figure de droite ci-dessus. On expliquera en particulier le terme de "masse apparente".
3. Interpréter la photo ci-dessous montrant un silo à grain éventré.



Réponse : 1.  $P_z(z) = \rho g \delta \left[ 1 - \exp\left(-\frac{z-h}{\delta}\right) \right] + P_0 \exp\left(-\frac{h}{\delta}\right)$  avec  $\delta = \frac{R}{2\mu_s K}$ .

## 125 Hydrogène stellaire

Dans l'atmosphère supposée isotherme d'une étoile de type A l'énergie cinétique moyenne des atomes d'hydrogène est  $\langle e_C \rangle = 1,1 \text{ eV}$ .

Quelle est la température de surface de cette étoile ? Déterminer les proportions d'atomes d'hydrogène qui se trouvent dans les deux premiers états excités. On rappelle que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés selon  $E_n = \frac{-13,6}{n^2} \text{ eV}$ .

## 126 Fuite de l'atmosphère

- Calculer numériquement pour une température de 300K, la vitesse quadratique moyenne du dihydrogène et du diazote. On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8.31 J.K^{-1}.mol^{-1}$  et la masse molaire de l'azote :  $M(N) = 14,0 g.mol^{-1}$ .
- On donne les vitesses de libération d'un corps au voisinage de la Terre,  $v_{\ell T} = 11 km.s^{-1}$ , et au voisinage de la Lune,  $v_{\ell L} = 2.3 km.s^{-1}$ , ainsi que la constante de gravitation universelle :  $G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$  ;  
Calculer les rapports entre les vitesses de libération et les vitesses quadratiques moyennes. Commenter.
- Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température pour que le diazote, constituant majoritaire de l'atmosphère terrestre, échappe quantitativement à l'attraction terrestre ? Commenter.
- Question subsidiaire : déterminer les vitesses de libération données à la seconde question, sachant que  $M_T = 6.0 \times 10^{24} kg$ ,  $M_L = 7.4 \times 10^{22} kg$ ,  $R_T = 6.4 \times 10^6 m$  et  $R_L = 1.8 \times 10^6 m$ .

Réponses : 1.  $u^*(H_2) = \sqrt{\frac{3RT}{2M(H)}} = 1.9 km.s^{-1}$  et  $u^*(N_2) = \sqrt{\frac{3RT}{2M(N)}} = 517 m.s^{-1}$ , 3. En supposant que le diazote s'échappe quantitativement lorsque  $v_{\ell T} \simeq 5u^*(N_2)$ , on obtient  $T \simeq \frac{2M(N)v_{\ell T}^2}{3R \times 5^2} \simeq 5000 K$ , 4.  $v_{\ell T} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$  et  $v_{\ell L} = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}$ .

## 127 Occupation des niveaux de l'atome d'hydrogène

On rappelle qu'un électron dans un atome d'hydrogène peut occuper des niveaux d'énergie  $E_n = -\frac{R_H}{n^2}$  où  $n \geq 1$  et  $R_H = 13,6 eV$ .

- Calculer le rapport  $\alpha$  des probabilités d'occupation des deux premiers niveaux à  $T = 300 K$ . Que dire des occupations des niveaux supérieurs dans le cas où  $\alpha \ll 1$  ?
- A quelle température  $\alpha$  vaut 0,1 ?
- Estimer à quelle température une partie notable des atomes d'un gaz d'hydrogène s'ionisent.
- Que dire de la molécule de dihydrogène à cette température sachant que son énergie de liaison est  $D(H-H) = 432 kJ.mol^{-1}$ .

La charge élémentaire vaut  $e = 1,6.10^{-19} C$ .

## 128 Paramagnétisme et ferromagnétisme

On considère le modèle à deux niveaux du paramagnétisme de Brillouin.

Soit un solide à la température  $T$ , constitué de  $N$  atomes, placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . La projection  $m_z$  du moment magnétique selon  $\vec{e}_z$  peut prendre les valeurs  $\pm m$ .

- Déterminer l'expression des probabilités d'occupation de chacun des états pour un atome.
- En déduire l'expression du moment magnétique moyen du solide  $\overline{m_{z,tot}}$  en projection selon  $\vec{e}_z$ , en fonction du champ magnétique  $B$  et de la température  $T$ .  
Tracer l'allure de  $\overline{m_{z,tot}}$  en fonction de  $B$  à température fixée. Discuter les cas limites.

Dans certaines substances dites ferromagnétiques (aimants), le champ magnétique engendré par les différents atomes prend des valeurs notables et ne peut pas être négligé par rapport au champ extérieur  $\vec{B}$ . Autrement dit, il faut alors prendre en compte les interactions entre les atomes. L'expression de  $\overline{m_{z,tot}}$  reste valide, à condition de remplacer  $B$  par  $B + \lambda \overline{m_{z,tot}}$  où  $\lambda$  est une constante.

- Grâce à une interprétation graphique, montrer que le moment magnétique  $\overline{m_{z,tot}}$  est non nul même en l'absence de champ magnétique, dans une certaine gamme de températures.
- Que peut-on prévoir si on chauffe un aimant ?

---

**MECANIQUE QUANTIQUE**


---

## 129 Atome d'hydrogène

Dans son état fondamental d'énergie  $E_0$ , l'électron (de masse  $m$ ) d'un atome d'hydrogène H dont le proton est supposé fixe en  $O$  (origine des coordonnées) est décrit par une fonction d'onde à symétrie sphérique :

$$\Psi_{\text{stat}}(r, t) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \exp\left(-i\frac{E_0 t}{\hbar}\right)$$

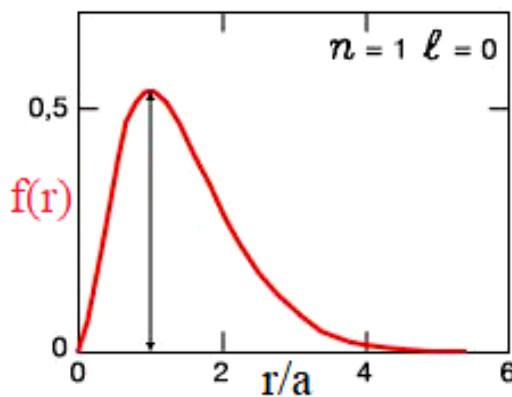
où  $r$  est la distance à  $O$ ,  $A$  une constante réelle positive et  $a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m e^2}$ . On donne pour  $\alpha > 0$  :

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x) dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Données numériques :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m.m}^{-1}; \quad m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

- Déterminer la valeur de  $A$ .
- En utilisant le volume d'une coquille sphérique comprise entre les sphères de rayon  $r$  et  $r+dr$ , déterminer la probabilité pour que l'électron soit situé dans cette coquille en la mettant sous la forme :  $d\mathcal{P} = f(r)dr$  et en donnant l'expression de  $f(r)$ .
- Pour quelle valeur  $r_0$  de  $r$  la densité linéique de probabilité  $f(r)$  est-elle maximale? Quelle est la valeur moyenne  $\langle r \rangle$ ? A.N. : calculer  $\langle r \rangle$ .
- Donner l'expression de l'énergie potentielle  $V(r)$  de l'électron.
- En utilisant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, en déduire l'expression littérale de l'énergie  $E_0$  de cet état fondamental, en fonction de  $e, \epsilon_0$  et  $r_0$ . A.N. Calculer  $E_0$  en Joules puis en eV.



## 130 Paquet d'onde gaussien

On étudie un quanton libre ( $V = 0$ ) dans un modèle unidimensionnel où sa fonction d'onde est de la forme  $\Psi = \Psi(x, t)$ . La position de ce quanton peut prendre toute valeur sur l'axe ( $Ox$ ) entre  $-\infty$  et  $+\infty$

- On cherche un état stationnaire  $\Psi_{\text{stat}}(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$  associé à une énergie  $E > 0$  donnée. En utilisant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, déterminer l'expression générale de  $\varphi(x)$ . On introduira :  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  et deux constantes complexes  $A$  et  $B$ .

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à l'état stationnaire qui se propage dans la direction  $+\vec{u}_x$  et on notera  $A$  la constante associée.



2. Pourquoi un tel état ne peut décrire convenablement l'état quantique de la particule ? Pour remédier à ce problème on considère une superposition continue de ces états stationnaires que l'on écrit sous la forme :

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp(ikx) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right) dk$$

où le coefficient  $A(k)$  dépend de  $k$  selon l'expression :

$$A(k) = A_0 \exp(-a^2 k^2)$$

où  $A_0$  et  $a$  sont deux constantes réelles positives. On parle de paquet d'onde gaussien. Quelle est la dimension de  $a$  ?

Pour simplifier, on étudie ce paquet d'onde à l'instant  $t = 0$ .

- Déterminer l'expression de  $\Psi(x, 0)$ .
- Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence  $\rho_X(x, t = 0)$  en fonction de  $x$ . Indiquer ses caractéristiques remarquables : maximum, largeur à mi-hauteur.
- Déterminer la constante  $A_0$ .
- Montrer sans calcul que  $\langle X \rangle(t = 0) = 0$ . Calculer l'indétermination quantique  $\Delta X(t = 0)$  sur la position du quanton à l'instant  $t = 0$ .

Données : on pourra utiliser les intégrales gaussiennes suivantes, avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  :

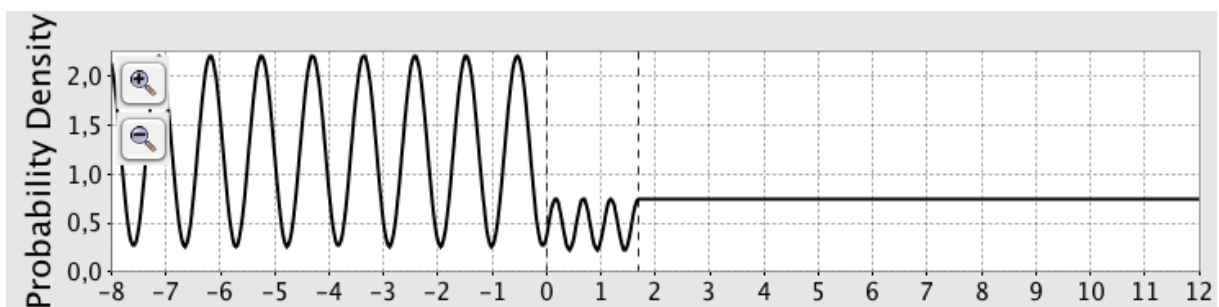
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha u^2 + \beta u) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

### 131 Particule dans un potentiel inconnu

- On s'intéresse à un état stationnaire unidimensionnel de l'équation de Schrödinger. La figure ci-dessous représente la densité de probabilité en fonction de la position  $x$ . L'état stationnaire considéré ici est-il un état lié ou un état de diffusion ?



- Quelle interprétation peut-on donner des oscillations de la densité de probabilité de présence pour  $x < 0$  ? Le même comportement est-il observable en mécanique classique ?
- L'énergie potentielle  $V(x)$  est constante par morceaux. Déterminer son allure possible en fonction de  $x$ .
- La fonction d'onde associée à cet état stationnaire est de la forme  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ . Proposer une expression pour  $\varphi(x)$  dans chacune des trois zones de l'espace.

## 132 Étalement d'un paquet d'onde

On considère une particule quantique libre de masse  $m$ .

1. Retrouver rapidement la relation de dispersion correspondante.

On considère que l'état de la particule quantique est représenté par un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives, dont les vecteurs d'ondes sont distribués autour d'une valeur moyenne  $k_0$  avec une dispersion  $\Delta k$ , qui détermine l'extension spatiale initiale  $\Delta x_0$  du paquet d'ondes à l'instant  $t = 0$ . La pulsation moyenne correspondant à  $k_0$  est notée  $\omega_0$  (évolution temporelle de la partie réelle de la fonction d'onde simulée sur le graphe du bas).

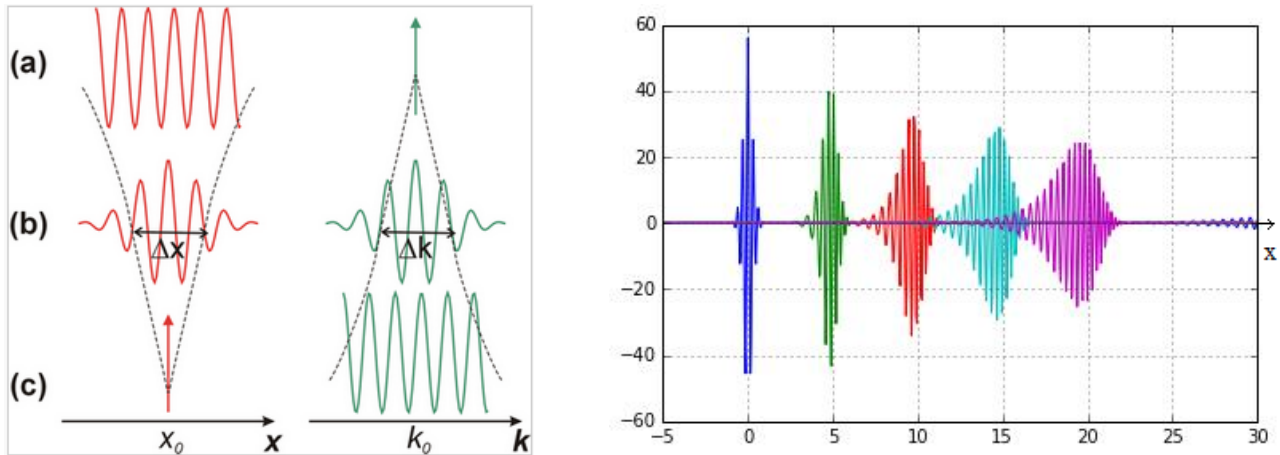


FIGURE 1 – (à gauche) Vues spatiale (position) et fréquentielle (impulsion) de (a) une onde, (b) un paquet d'onde et (c) un corpuscule. L'onde étant de fréquence pure, son impulsion est définie mais elle n'est pas localisée dans l'espace. Inversement, le corpuscule est localisé mais n'a pas de fréquence déterminée. Le cas général est celui du paquet d'onde qui est distribué en fréquence comme en espace. Du fait de la dualité entre les deux représentations l'étalement spatial est inversement proportionnel à l'étalement fréquentiel. (à droite) Étalement du paquet d'onde lors de la propagation à plusieurs instants.

2. Rappeler la définition de la vitesse de groupe  $v_{g0}$  et déterminer son expression.
3. Montrer en utilisant la relation de dispersion qu'à la largeur  $\Delta k$  correspond une dispersion de la vitesse de groupe  $\Delta v_g$  autour de la valeur moyenne  $v_{g0}$ . Exprimer  $\Delta v_g$  en fonction de  $\hbar$ ,  $m$  et  $\Delta x_0$ .
4. En déduire la largeur du paquet d'ondes  $\Delta x(t)$  après un déplacement d'une durée  $t$  depuis l'origine. Déterminer l'instant  $t_0$  pour lequel la largeur du paquet d'ondes a doublé.
5. Application numérique : calculer  $t_0$  et commenter pour :
  - un électron, de masse  $m = 10^{-30}$  kg, initialement confiné dans un atome  $\Delta x_0 = 10^{-10}$  m.
  - une gouttelette d'eau, de rayon égal à  $10\mu\text{m}$ .

### 133 Résolution de problème - Délocalisation des électrons par mésomérie

D'après les extraits de divers articles Wikipédia  
*Carotène, butadiène, mésomérie*

**L'alternance liaison simple - doublet liant dans une molécule est une "boîte à électron" à une dimension**

En chimie, la mésomérie désigne une délocalisation d'électrons dans les molécules conjuguées, que l'on représente par une combinaison virtuelle de structures aux électrons localisés appelées mésomères, lorsqu'on a par exemple une alternance liaison simple - liaison double - liaison simple, comme dans un diène conjugué.

Le diène conjugué le plus simple est le buta-1,3-diène (en dessous : ses formules mésomères), un hydrocarbure de formule  $C_4H_6$  gazeux incolore et inflammable. C'est un important réactif qui est utilisé dans la synthèse de nombreux polymères.

La molécule de  $\beta$ -carotène  $C_{40}H_{56}$  possède onze doubles liaisons conjuguées. Elle peut absorber une lumière bleu-indigo et donc apparaître orange comme dans la carotte. La coloration des plumes du flamant rose est due à l'accumulation de carotène contenu dans son alimentation (à droite, photo de Aaron Logan).



1. Évaluer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde d'absorption du buta-1,3-diène dans le proche ultraviolet, sachant que la longueur typique d'une liaison dans un alcène est de l'ordre de 130 pm.
2. Sachant que la longueur d'onde maximale absorbée par le  $\beta$ -carotène est de 480 nm, estimer la longueur de la molécule.

### 134 Résolution de problème - Extraction d'un électron de conduction hors d'un métal

On considère un électron de conduction dans le cuivre. À l'intérieur du cuivre, le potentiel subi par l'électron d'énergie  $E$  est pris nul, alors qu'à l'extérieur, on le suppose constant de valeur  $V$ . L'effet photoélectrique permet d'estimer  $V - E \approx 4 \text{ eV}$ . On donne la masse de l'électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  et la constante de Planck réduite  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ .

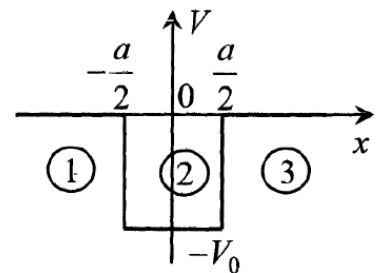
Calculer la longueur de pénétration d'un électron hors du métal.



### 135 Diffusion par un potentiel attractif - Effet Ramsauer

On considère un flux de particules monoénergétiques d'énergie  $E$ , incidente depuis  $x \rightarrow -\infty$ , se propageant suivant les  $x$  croissants, arrivant dans la zone d'action d'un potentiel donné par :

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 = \text{cte} & (\text{avec } V_0 > 0) \text{ pour } x \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right] \text{ zone (2)} \\ 0 & \text{partout ailleurs (zones (1) et (3)).} \end{cases}$$



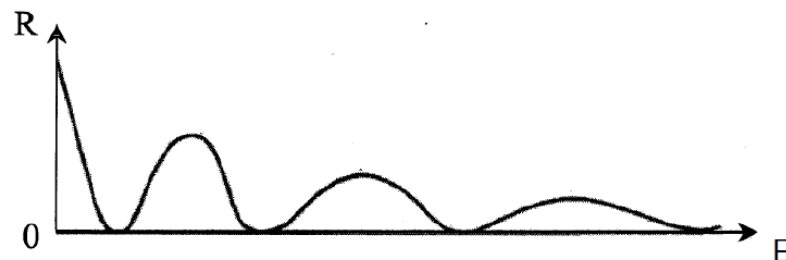
On considère le cas où  $E > 0$ .

1. Proposer une situation physique associée au modèle décrit ci-dessus.
2. Donner la forme des fonctions d'onde dans les trois domaines considérés.
3. En écrivant les conditions de raccordement, écrire les quatre relations liant les constantes d'intégration intervenant dans l'écriture des fonctions d'onde.
4. Donner, en utilisant des densités de courant de probabilité dont on précisera l'expression, les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$ .
5. On obtient, par un calcul qui n'est pas demandé :

$$R = \frac{\left(\frac{k_0^2}{2kK}\right)^2 \sin^2(ka)}{1 + \left(\frac{k_0^2}{2kK}\right)^2 \sin^2(ka)} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_0^2}{2kK}\right)^2 \sin^2(ka)}$$

et où on a posé  $k_0^2 = 2mV_0/\hbar^2$  et  $K^2 = 2mE/\hbar^2$ . On précisera l'expression de  $k$ .

L'allure du coefficient  $R$  en fonction de l'énergie  $E$  est la suivante :



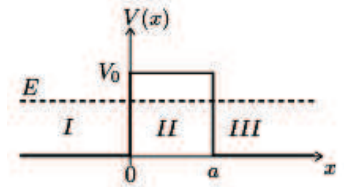
Ramsauer (1921) a montré expérimentalement que pour certaines valeurs de l'énergie  $E$  d'un faisceau monoénergétique d'électrons de basse énergie, certains gaz rares (Hélium, Néon ou Argon) sont parfaitement transparents.

- (a) Proposer une justification de l'idée de modéliser un atome de gaz rare par un centre diffusif en forme de puits plat fini.
- (b) Identifier sur le graphique ci-dessus les zones de transparence et écrire les conditions correspondantes liant  $k$  à  $a$ . Proposer ainsi une interprétation de l'effet Ramsauer en termes d'interférence entre les ondes de De Broglie associées aux électrons. On pourra s'appuyer sur une analogie optique avec les réflexions multiples dans une lame

On pourra visualiser cet effet à l'aide de la simulation disponible à l'adresse suivante :  
<https://phet.colorado.edu/fr/simulation/quantum-tunneling>

### 136 Barrière de potentiel et effet tunnel

Un électron d'énergie  $E$  se déplace sur un axe  $Ox$ , en étant soumis au potentiel  $V$  ci-contre (il arrive depuis la gauche). On suppose que  $0 < E < V_0$ . On cherche une fonction d'onde d'un état stationnaire sous la forme  $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ .

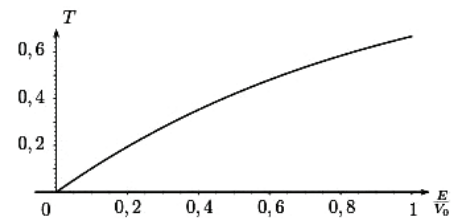


- Déterminer la forme des parties spatiales de fonction d'onde  $\varphi_I(x)$ ,  $\varphi_{II}(x)$  et  $\varphi_{III}(x)$  dans les régions respectives  $I$ ,  $II$  et  $III$  (on utilisera comme notation pour les coefficients :  $A_I, B_I, A_{II}, B_{II}, A_{III}, B_{III}$  où  $A_I$  correspond au faisceau incident).
- Écrire les relations de continuité.
- Définir le coefficient de transmission  $T$  en fonction des courants de probabilité et exprimer  $T$  en fonction des constantes d'intégration adéquates.

En résolvant le système de la question 2, on obtient

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0}{E} \frac{1}{(1 - E/V_0)} \sinh^2\left(\frac{a}{\delta}\right)}$$

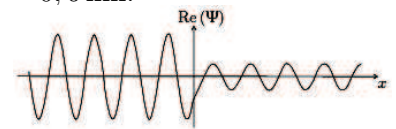
que l'on représente graphiquement en fonction de  $\frac{E}{V_0}$  pour  $a = 0.1nm$ . Commentaires ?



Avec  $E = 1\text{ eV}$  et  $V_0 = 2\text{ eV}$ , calculer  $T$  pour  $a = 0,1\text{ nm}$ ,  $a = 0,5\text{ nm}$  et  $a = 0,6\text{ nm}$ .

Pour  $a = 0,1\text{ nm}$ , on représente la partie réelle de la fonction d'onde en fonction de l'abscisse  $x$  à un instant  $t$ .

Pourquoi parle-t-on d'effet tunnel ?



- Interpréter les résultats pour une seule particule incidente puis si on recommence l'expérience de manière indépendante un très grand nombre  $N$  de fois. Donner une expression simplifiée de  $T$  si  $a \gg \delta$ .

### 137 Résolution de problème - Autonomie d'une lampe à vélo



La lampe de vélo représentée ci-dessus et dont la puissance est d'une dizaine de watts fonctionne avec des DEL (Diodes ElectroLuminescentes). Ce type de dipôle est une source lumineuse fondamentalement quantique. Elle est alimentée par 3 piles rechargeables LR03 de 1,5V. Deux d'entre elles sont représentées sur la photo voisine.

Estimer numériquement l'autonomie de la lampe.

### 138 Radioactivité $\alpha$

La radioactivité  $\alpha$  consiste en l'émission par un noyau  ${}^A_Z X$  d'une particule  $\alpha$  (noyau d'hélium  ${}^4_2 He$ ) :  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$ . Dans une théorie élémentaire de la radioactivité  $\alpha$  proposée par Gamow en 1928, on considère que la particule  $\alpha$  pré-existe dans le noyau  $X$ , considéré comme résultant de la réunion du noyau  $Y$  et de la particule  $\alpha$ .

La loi d'interaction entre ces deux particules est définie par leur énergie potentielle  $V(r)$  représentée en fonction de leur distance  $r$ .

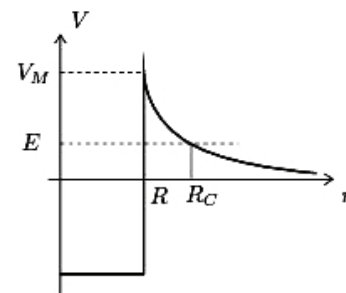
Si  $r > r_0 A^{1/3} \cong R$  ( $\cong$  rayon du noyau  $Y$ , car la particule  $\alpha$  est quasi-ponctuelle), l'énergie potentielle  $V$  est due à la seule répulsion électrostatique entre les  $Z-2$

protons de  $Y$  et les 2 protons de  $He$  :  $V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Si  $r < R$ , les interactions nucléaires attractives interviennent ; on peut les schématiser par un puits de potentiel très profond.

Données :  $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}$  m et  $m_P \simeq m_N = 1,67 \times 10^{-27}$  kg.

L'énergie de la particule  $\alpha$  est  $E = 4,78$  MeV.



Le coefficient de transmission peut s'écrire  $\ln(T) \simeq -2 \int_R^{R_C} \sqrt{\frac{2m_\alpha (V(r) - E)}{\hbar^2}} dr \simeq -\frac{341}{\sqrt{E \text{ (en MeV)}}} + 74,8$ .

1. On considère un atome  $X$  de radium  ${}^{226}_{88} Ra$ . Calculer  $R$  et  $R_c$ , où  $R_c$  est tel que  $V(R_c) = E$  (cf figure).
2. Expliquer pourquoi l'émission  $\alpha$  ne peut se faire que par effet tunnel.

3. On considère que la particule  $\alpha$  de vitesse  $v$  rebondit un certain nombre de fois sur la paroi. A chaque collision avec la paroi située en  $r = R$ , la probabilité pour que la particule franchisse la barrière est  $T$ .

Soit  $t_0$  la durée entre deux collisions ; calculer  $t_0$  et  $\tau = \frac{t_0}{T}$  (durée de vie de la particule  $\alpha$  dans le puits de potentiel).

4. L'énergie  $E$  des particules  $\alpha$  peut varier entre 4,0 et 9,0 MeV pour les différents émetteurs  $\alpha$ . Avec le modèle précédent, montrer que  $t_0$  est presque le même pour tous les émetteurs  $\alpha$ . En déduire une formule approchée numérique de  $\ln(\tau)$  en fonction de  $E$  exprimé en MeV.

### 139 Marche de potentiel

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel  $V(x)$  (marche de potentiel) défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \quad (\text{région I}) \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \quad (\text{région II}) \end{cases}$$

On envisage le cas d'une particule quantique incidente d'énergie  $E > V_0$ . On pose :

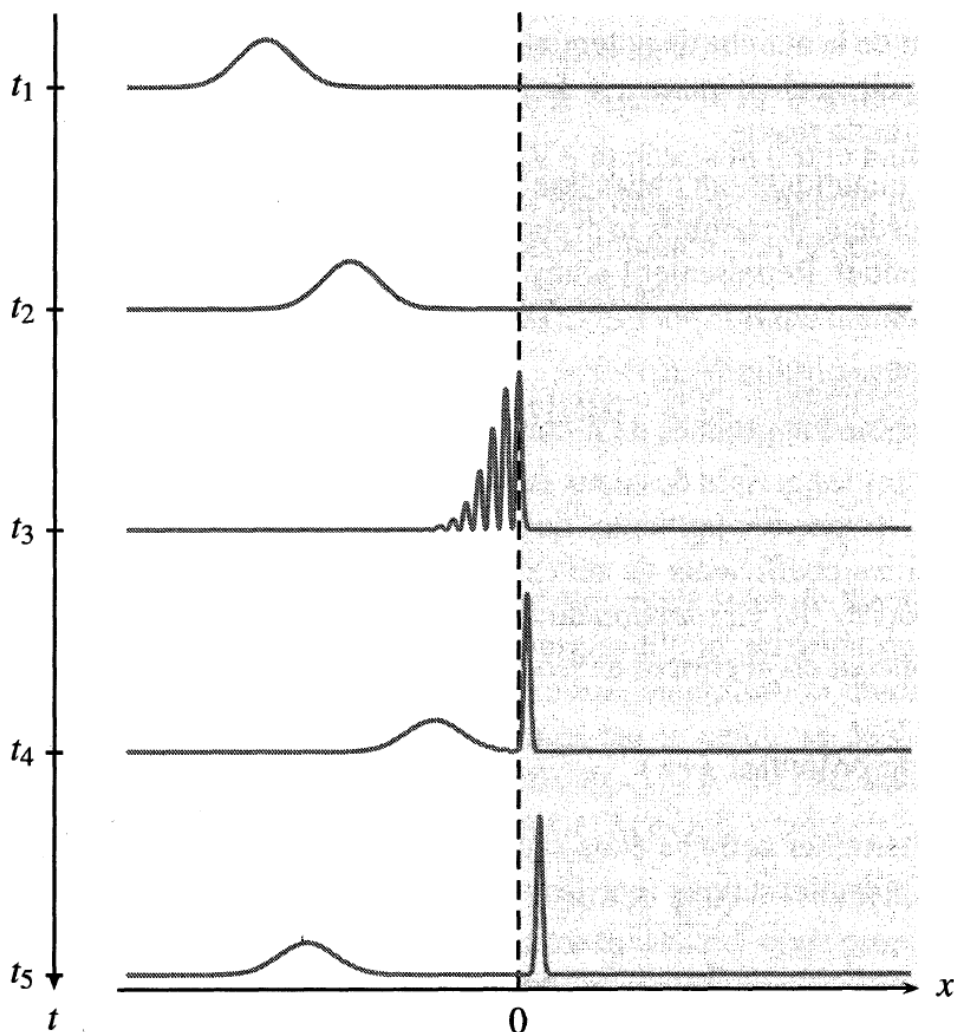
$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

1. Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde propre :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \exp(ik_1 x) + rA \exp(-ik_1 x) & \text{pour } x < 0 \quad (\text{région I}) \\ At \exp(ik_2 x) & \text{pour } x \geq 0 \quad (\text{région II}) \end{cases}$$

où  $A$  est une constante non nulle.

2. Écrire les relations de raccordement en  $x = 0$  et en déduire les expressions de  $r$  et de  $t$ . Examiner le cas où  $E \gg V_0$  et commenter.
3. En superposant des états stationnaires d'énergies voisines de  $E$ , on forme un paquet d'ondes représentant une particule quantique incidente. La figure ci-dessous représente l'évolution dans l'espace et dans le temps de ce paquet d'ondes. La zone grisée correspond à la région II dans laquelle  $V(x) = V_0$ . Le temps s'écoule du haut vers le bas de la figure.

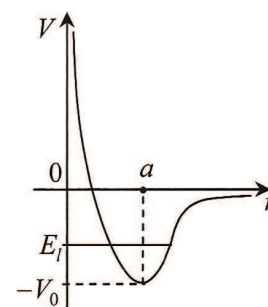


Commenter aussi précisément que possible ces graphes.

4. Dans la situation où  $E < V_0$ , l'expression de la fonction d'onde propre dans la région I peut être conservée. Expliquer cependant comment est modifié  $k_2$  et par suite, le coefficient  $r$ . En déduire alors l'expression de la probabilité de réflexion  $R$  de la particule. Commenter.

### 140 Deutéron

Le deutéron est le noyau de l'atome d'hydrogène constitué d'un neutron de masse  $m_n$  et d'un proton de masse  $m_p$ . On traite ce problème à deux corps en considérant une particule fictive de masse réduite  $m = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$  soumise au potentiel de Yukawa, qui modélise l'interaction nucléaire et dont l'allure est donnée ci-contre. On observe expérimentalement que le deutéron est le seul état lié stable du système proton-neutron, et que son énergie de liaison vaut  $E_\ell = 2,2 \text{ MeV}$ . L'ordre de grandeur de la portée de l'interaction nucléaire est  $a \simeq 1 \text{ fm}$  qui est donc le rayon du noyau.

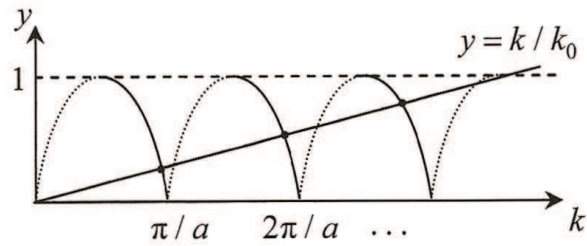


1. Commenter physiquement la forme de ce potentiel et proposer, en se plaçant à une dimension radiale, une modélisation simplifiée utilisant un potentiel constant par morceaux dans trois régions distinctes que l'on précisera.
2. Donner la forme des fonctions d'onde de l'état stationnaire du système dans les trois régions considérées.

En déduire une équation de quantification de la forme : 
$$\begin{cases} |g(ka)| = \frac{k}{k_0} \\ h(ka) < 0 \end{cases} \text{ avec } k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \text{ où les}$$

fonctions  $f$  et  $g$  sont à préciser.

3. Vérifier que les solutions de l'équation de quantification peuvent être obtenues graphiquement à l'aide du diagramme  $(y, k)$  ci-dessous. Les niveaux d'énergie  $y$  sont déterminés par l'intersection entre la droite d'équation  $y = k/k_0$  et la p



Montrer graphiquement que la condition  $V_0 \gg |E_\ell|$  doit être vérifiée pour qu'il n'existe qu'un seul état lié. Dédurre, dans le cadre de cette condition, une expression littérale approchée ainsi qu'un ordre de grandeur de  $V_0$  (on vérifiera *a posteriori* l'hypothèse  $V_0 \gg |E_\ell|$ ). Quelle est la signification physique de cette condition ? Pourquoi le deutéron est-il utilisé dans les accélérateurs du type synchrotron pour produire des neutrons de haute énergie ?

Données :  $m_n \simeq m_p \simeq 1,67 \times 10^{-27}$  kg.



## 141 Double puits quantique asymétrique

Un puits quantique est une structure cristalline obtenue par croissance de plusieurs couches de matériaux semi-conducteurs. Nous étudierons dans ce problème un des multiples dispositifs envisageables, le double puits asymétrique, représenté sur la figure 1. En appliquant un champ électrique sur ce dispositif, on peut modifier notablement la structure des niveaux quantiques du système, et contrôler ainsi la dynamique des électrons de conduction. Les applications potentielles concernent les détecteurs de lumière dans le moyen ou lointain infra-rouge, les lasers, et les dispositifs photo-voltaiques.

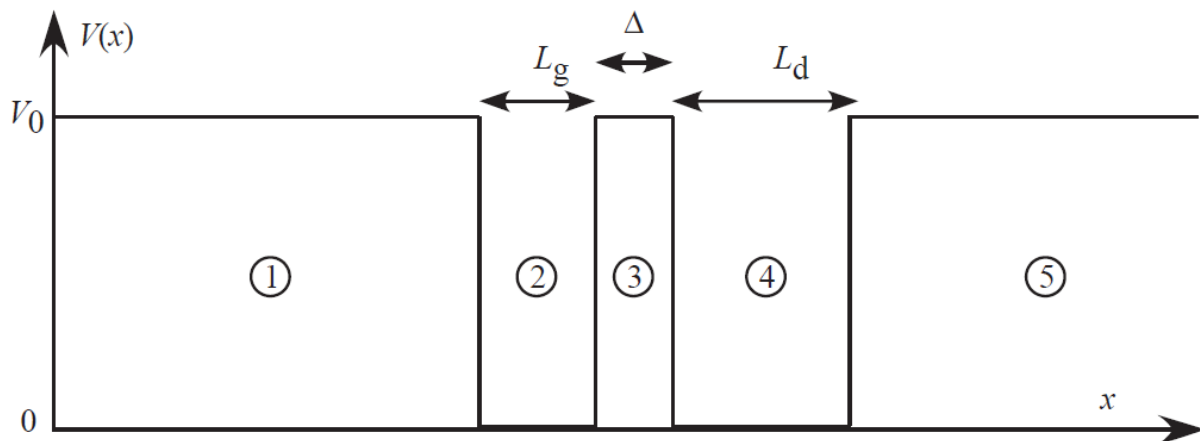


FIGURE 1 – Double puits asymétrique représenté ici en absence de champ électrique extérieur. Le potentiel ressenti par un électron vaut  $V(x) = V_0$  dans les régions 1,3,5, où l'échantillon est composé de AlGaAs. Ce potentiel vaut 0 dans les régions 2 et 4, composées de GaAs.

### Structure des niveaux d'énergie en absence d'effet tunnel

On suppose dans cette partie que  $V_0$  est infini. On admettra que le mouvement d'un électron au sein d'un semi-conducteur est régi par les mêmes lois que dans le vide, à condition de remplacer la masse par une « masse effective » qui a pour valeur  $m = 6,1 \times 10^{-32}$  kg dans le semi-conducteur considéré ici. On rappelle la constante de Planck réduite  $\hbar = 1,055 \times 10^{-34}$  J.s et la charge de l'électron  $q = -1,6 \times 10^{-19}$  C.

1. Rappeler les énergies propres dans un puits carré infini de largeur  $L$ .
2. En déduire les énergies propres dans le double puits asymétrique dans le cas  $V_0 = \infty$ .
3. Les largeurs des puits valent  $L_g = 10$  nm et  $L_d = 3L_g/2 = 15$  nm. Calculer en milli-électronvolt (meV) la position des 6 premiers niveaux d'énergie du système. Y a-t-il des niveaux d'énergie dégénérés ? On précisera pour chaque niveau si l'électron est localisé dans le puits étroit (région 2) ou le puits large (région 4).
4. De quelle énergie faudrait-il abaisser ou monter l'énergie du fond du puits large (région 4) par rapport à celle du puits étroit (région 2) pour que le niveau fondamental du double puits soit dégénéré ? On donnera le résultat sous forme littérale, puis en meV.
5. On cherche à réaliser ce déplacement relatif des fonds des deux puits par un champ électrique. Quel est l'ordre de grandeur du champ électrique  $\mathcal{E}$  nécessaire, sachant que l'épaisseur de la barrière séparant les deux puits est  $\Delta = 3$  nm ?

**NB. On ne demande pas ici de calcul quantitatif précis, mais seulement une estimation qualitative.**

### Prise en compte de l'effet tunnel en physique ondulatoire

On suppose dans cette partie que  $V_0$  est fini et on s'intéresse aux états stationnaires d'énergie  $E$  inférieure à  $V_0$ .

1. Rappeler la forme de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des 5 régions indiquées sur la figure 1. On posera  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  et  $K = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ .

2. Indiquer la forme des solutions retenues sur chacun des cinq intervalles, sous forme de combinaisons linéaires de fonctions exponentielles (éventuellement complexes) de la variable  $x$ .

3. Rappeler le principe du raccordement des solutions aux frontières entre les différentes régions et expliquer l'origine de la quantification de l'énergie.

**N.B. On ne cherchera pas à faire explicitement les calculs de raccordement qui sont relativement longs dans le cas qui nous intéresse ici.**

4. La résolution numérique de la recherche des énergies dans le double puits donne les résultats indiqués dans la table 1. Comparer les valeurs obtenues aux prédictions de la question 2.3 et dessiner qualitativement l'allure des fonctions d'onde correspondantes.

niveau	énergie (meV)
1	22
2	46
3	87
4	183
5	195
6	344

TABLE 1 – Niveaux d'énergie dans un double puits asymétrique avec  $L_g = 10$  nm,  $L_d = 15$  nm,  $\Delta = 3$  nm,  $V_0 = 1$  eV.

## 142 Résolution de problème - particule dans un puits quantique

On considère un électron dans un puits de potentiel vide de profondeur infinie entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L = 200$  pm. La densité de probabilité de présence de l'électron dans le piège s'annule notamment en  $x = 0, 30L$  et en  $x = 0, 40L$  mais jamais entre ces deux positions.

L'électron tombe alors dans le niveau d'énergie immédiatement inférieur en émettant de la lumière. De combien l'énergie de l'atome a-t-elle variée ? Calculer la longueur d'onde du photon émis lors de la désexcitation de l'électron.

---

**CHIMIE**


---

**143 Alliage  $\text{Ni}_x\text{Al}_y$** 

Le nickel et l'aluminium donnent à l'état solide des alliages. Pour une composition particulière, le solide peut présenter la structure ordonnée suivante : la maille est cubique d'arête  $a = 359 \text{ pm}$  et comporte un atome d'aluminium à chaque sommet du cube et un atome de nickel au centre de chaque face.

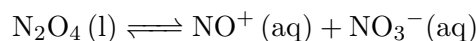
1. Dessiner la maille de cet alliage.
2. Déterminer la composition (exprimée en pourcentage atomique) de cet alliage.
3. Calculer la masse volumique de cet alliage.

Données :  $M(\text{Ni}) = 58,7 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M(\text{Al}) = 27,0 \text{ g.mol}^{-1}$ .

**144 Dérivés oxygénés de l'azote**

L'ion nitrosyle  $\text{NO}^+$  dérive du monoxyde d'azote  $\text{NO}$  qui est paramagnétique comme le dioxyde d'azote  $\text{NO}_2$ . Ces deux oxydes se dimérisent facilement en  $\text{N}_2\text{O}_2$  et  $\text{N}_2\text{O}_4$  qui présentent tous les deux une liaison N-N.

1. Proposer des formules de Lewis pour l'ion  $\text{NO}^+$ , les discuter.
2. Proposer des formules de Lewis pour  $\text{NO}$ , les discuter puis justifier sa facile dimérisation.
3. Faire de même pour le dioxyde d'azote  $\text{NO}_2$ .
4. Justifier le caractère paramagnétique de  $\text{NO}$  et de  $\text{NO}_2$ .
5. Identifier la nature de la réaction d'équation bilan :

**145 Dismutation de l'acide nitreux**

L'acide nitreux  $\text{HNO}_2$  est une espèce instable. Sa transformation conduit à la formation de monoxyde d'azote  $\text{NO}$  (g) et d'ions nitrate  $\text{NO}_3^-$ .

1. Écrire la réaction d'oxydoréduction engagée lors de cette réaction (avec un coefficient stœchiométrique relatif à  $\text{NO}_3^-$  égal à 1).
2. Calculer les potentiels standard  $E^0$  des deux couples oxydant-réducteur engagés.
3. Calculer l'enthalpie libre standard de réaction  $\Delta_r G^0$  de la réaction à 298 K.
4. Pour quelle valeur de la pression partielle en monoxyde d'azote une solution décimolaire d'acide nitreux serait-elle stable en présence d'acide nitrique ( $\text{H}_3\text{O}^+, \text{NO}_3^-$ ) de concentration  $c = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ?

Données à 298 K :

$$pK_A(\text{HNO}_2/\text{NO}_2^-) = 3,35$$

Couple	$\text{NO}_2^-/\text{NO}$ (g)	$\text{NO}_3^-/\text{NO}_2^-$
$E^0$ (V)	1,18	0,85

## 146 Dissolution et refroidissement

Pour fabriquer un fixateur photographique, on utilise du thiosulfate de sodium pentahydraté de formule brute  $[\text{Na}_2 \text{S}_2\text{O}_3, 5\text{H}_2\text{O}]_s$  que l'on dissout dans l'eau. On constate lors de la dissolution de ce sel une diminution de la température de la solution.

On fournit les données suivantes :

	$\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{aq}$	$\text{Na}^+_{aq}$	$[\text{Na}_2 \text{S}_2\text{O}_3, 5\text{H}_2\text{O}]_s$	$\text{H}_2\text{O}_{liq}$
$\Delta_f H^\circ$ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	-644,3	-239,7	-2602	-285,9

La capacité thermique molaire à pression constante de l'eau liquide est  $c_{p, \text{H}_2\text{O}_{liq}}^\circ = 75,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . La masse volumique de l'eau est considérée comme constante sur le domaine de température envisagé :  $\mu = 996 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On donne les masses molaires atomiques suivantes en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$  : Na : 23,0, S : 32,1, O : 16,0 et H : 1,0.

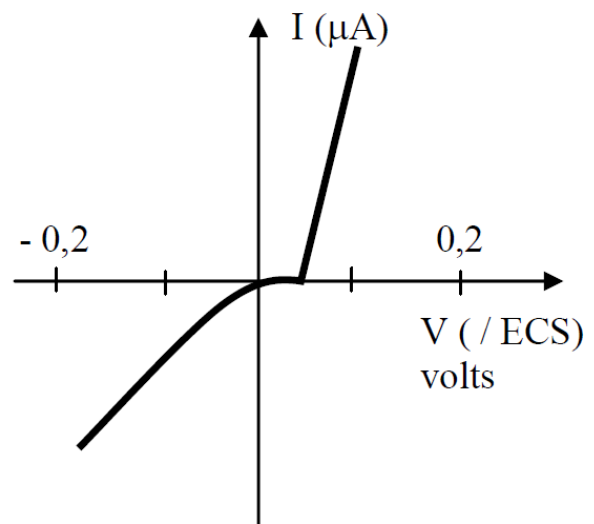
1. Écrire la réaction de mise en solution du sel en prenant comme référence une mole de ce sel.
2. Calculer l'enthalpie standard de réaction de ce processus. Commenter.
3. Pour préparer une solution de fixation, on dissout à la pression standard  $p^\circ$ ,  $m = 200 \text{ g}$  de thiosulfate de sodium pentahydraté dans un volume  $V = 1,0 \text{ L}$  d'eau. Calculer le transfert thermique mis en jeu lors de ce processus. On notera que la dissolution est totale car on n'atteint pas la solubilité maximale de ce sel.
4. Quelle doit-être la température  $\theta_e$  (exprimée en  $^\circ\text{C}$ ) de l'eau avant dissolution pour que la température finale en fin de dissolution soit  $\theta_f = 25,0^\circ\text{C}$ ? On considère qu'il n'y a pas de transfert thermique avec le milieu extérieur. La capacité thermique de la solution est approximée à celle de l'eau liquide.

## 147 Courbes intensité-potentiel du cuivre

La courbe ci-contre représente  $I = f(V)$  pour une électrode de cuivre plongeant dans une solution de sulfate de cuivre  $\text{CuSO}_4$  à  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

1. Écrire les réactions électrochimiques mises en jeu au niveau de l'électrode selon que  $I > 0$  ou  $I < 0$ .
2. Déterminer la valeur théorique de  $V$  pour laquelle  $I = 0$ . Y a-t-il accord avec la courbe? Lorsque  $I = 0$ , des réactions ont-elles lieu à la surface de l'électrode?
3. Définir et estimer la surtension anodique et la surtension cathodique.
4. Quand on augmente (en valeur absolue) la tension appliquée, un palier apparaît sur l'une des deux branches. Laquelle? Pourquoi? Ce palier peut-il se prolonger indéfiniment?
5. Décrire précisément (avec un schéma) un montage expérimental permettant de réaliser ces mesures.
6. L'électrode de référence utilisée est une électrode au calomel saturée (ECS), que l'on peut décrire par  $\text{KCl}(s)/\text{KCl}(aq)/\text{Hg}_2\text{Cl}_2(s)/\text{Hg}(l)$ . Expliquer pourquoi elle peut servir d'électrode de référence.

Données :  $E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34\text{V}$  et  $E^\circ(\text{ECS}) = 0,25\text{V}$



## 148 Calculs de pH

On prépare le mélange suivant dans un litre d'eau :  $0,1 \text{ mol}$  de  $\text{CN}^-$  et  $0,15 \text{ mol}$  de  $\text{HF}$ . Indiquer la réaction prépondérante et calculer le  $\text{pH}$ .

Données :  $\text{p}K_A(\text{HCN}/\text{CN}^-) = 9,3$ ;  $\text{p}K_A(\text{HF}/\text{F}^-) = 3,2$

## 149 Dosage d'une solution d'ammoniaque

On dose 10 mL d'une solution d'ammoniaque  $NH_3$  de concentration inconnue par une solution d'acide chlorhydrique  $HCl$  de concentration égale à 0,10 mol.L<sup>-1</sup>. La réaction est suivie par conductimétrie en mesurant la conductivité  $\sigma$  de la solution au fur et à mesure de l'addition d'acide chlorhydrique.

On donne  $pK_a(NH_4^+/NH_3) = 9,2$  et on désigne par :

- $C_a = 0,10$  mol.L<sup>-1</sup> la concentration de l'acide chlorhydrique.
- $V_b = 10$  mL le volume d'ammoniaque utilisé.
- $C_b$  la concentration initiale de la solution d'ammoniaque.
- $V_a$  (exprimé en mL) le volume d'acide chlorhydrique versé.
- $\lambda_i$  la conductivité molaire de l'ion  $i$ , assimilée à la conductivité molaire à dilution infinie  $\lambda_i^\circ$ .

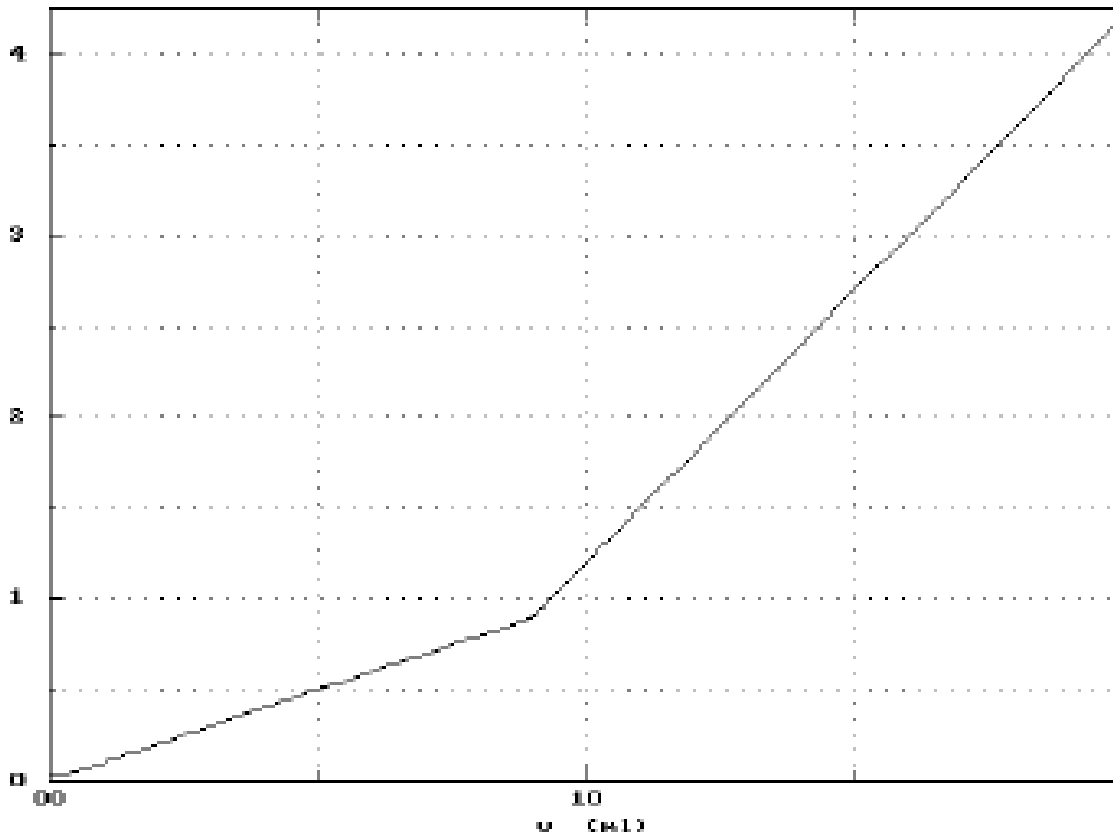
Le tableau ci-dessous donne les conductivités molaires à dilution infinie de différents ions à 298 K.

Ion	$H_3O^+$	$OH^-$	$Cl^-$	$NH_4^+$
$\lambda^\circ$ (mS.m <sup>2</sup> .mol <sup>-1</sup> )	34,98	19,92	7,63	7,34

1. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de dosage. Montrer que cette réaction est quasiment totale.

La courbe obtenue  $\sigma' = \sigma \times (V_a + V_b)$  en fonction de  $V_a$  est représentée sur la figure ci-dessous.

On trace cette fonction afin d'obtenir des portions de droites et de s'affranchir du phénomène de dilution.



2. Justifier précisément l'allure de cette courbe (sens de variation, variations linéaires) :

- (a) première partie de la courbe ;
- (b) deuxième partie de la courbe.
- (c) Pourquoi la pente varie-telle de cette façon entre les deux parties ?

3. En déduire la concentration initiale de la solution d'ammoniaque.

## 150 Détermination d'une quantité de cuivre

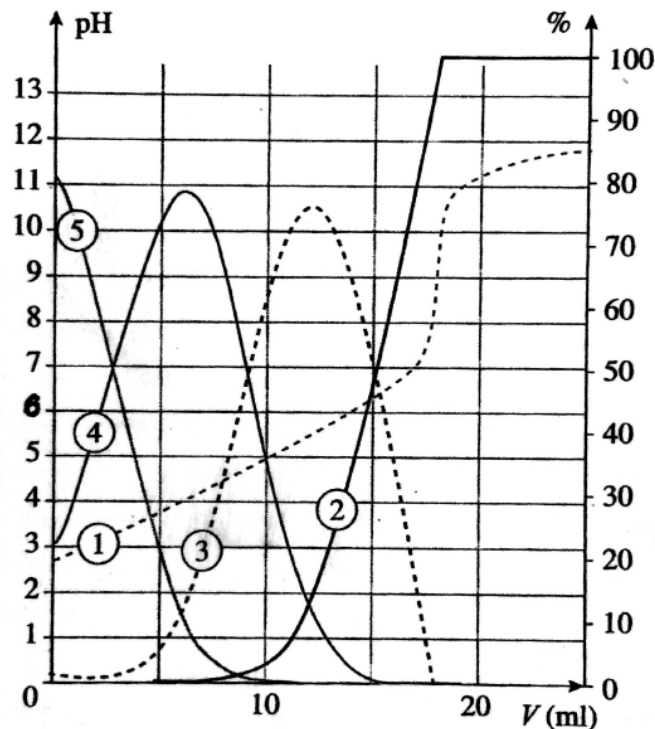
Pour déterminer la quantité de cuivre déposée sur une lame de verre, on dissout le cuivre dans 10 mL d'une solution aqueuse et on ajoute progressivement, à l'aide d'une burette, un volume  $V$  de  $FeCl_3$  à  $0,20 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ .

1. Faire un schéma du dispositif expérimental.
2. Tracer l'allure de la courbe  $E = f(V)$  et interpréter les différents domaines.
3. Le volume à l'équivalence est  $V_{eq} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ L}$ . En déduire la quantité de matière de cuivre déposée sur le verre.
4. Déterminer le potentiel à l'équivalence.

Données :  $E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = 0,34 \text{ V}$  ;  $E^\circ(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = 0,77 \text{ V}$

## 151 Simulation du dosage de l'acide citrique

L'acide citrique est un triacide noté  $H_3A$ . On dose un volume  $V_0 = 20,0 \text{ mL}$  d'une solution d'acide citrique de concentration  $c$  par une solution de soude de concentration  $c_B = 0,050 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . Afin d'interpréter le graphe expérimental obtenu, on réalise une simulation de ce dosage. La simulation par le logiciel *Simultit* est donnée ci-après.



Le maximum de la courbe dérivée,  $\frac{d\text{pH}}{dV_B}$ , non représentée sur le graphe, a pour abscisse  $V_{eq} = 18,0 \text{ mL}$ .

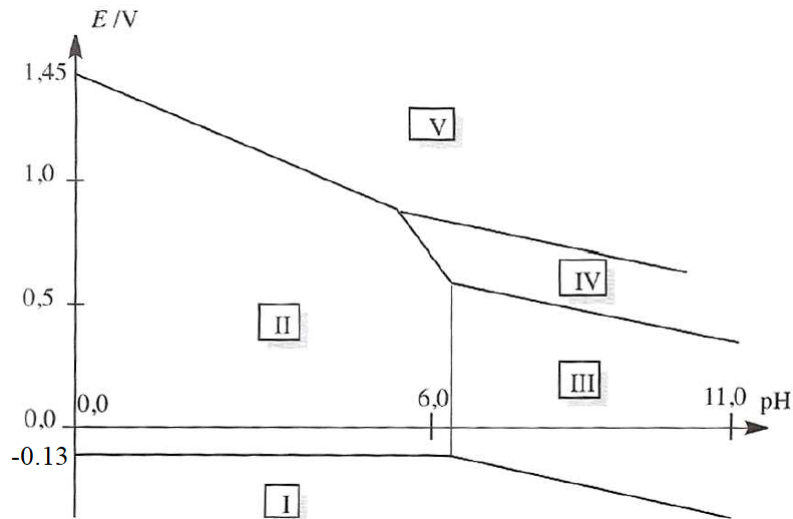
1. Identifier chacune des courbes représentées.
2. Déterminer la concentration  $c$  utilisée pour la simulation.
3. Déterminer les  $pK_{A_i}$  de l'acide citrique.
4. Montrer que les trois acidités de l'acide citrique ne sont pas dosées séparément et le justifier. Écrire les équations des réactions correspondantes et calculer leurs constantes de réaction respectives.

## 152 Diagramme E-pH du plomb

On donne à 298 K les potentiels standards des couples suivants :

couple	$\text{Pb}^{2+}(\text{aq})/\text{Pb}(\text{s})$	$\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}$	$\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})$
$E^0$ (V)	-0,13	1,23	0,00

On donne le diagramme potentiel-pH simplifié du plomb, la concentration de tracé étant  $c_0 = 1,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .



- Indiquer sur ce diagramme les domaines de prédominance ou d'existence des espèces suivantes :  $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$ ,  $\text{Pb}(\text{s})$ ,  $\text{PbO}(\text{s})$ ,  $\text{PbO}_2(\text{s})$  et  $\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$ .
- Déterminer le potentiel standard du couple  $\text{PbO}_2/\text{Pb}^{2+}$  par lecture du diagramme potentiel-pH. Donner l'équation numérique de la frontière entre les espèces  $\text{PbO}_2$  et  $\text{Pb}^{2+}$ .
- Tracer sur le même graphe le diagramme potentiel-pH de l'eau en prenant une pression de tracé  $P^0 = 1,0 \text{ bar}$ .
- Que peut-on dire de la stabilité du plomb en solution aqueuse? Discuter en fonction du pH de la solution.
- Quelle réaction se produit entre le plomb et le dioxyde de plomb en milieu acide? Comment nomme-t-on une telle réaction?

## 153 Ordre initial d'une réaction

Pour la réaction  $\text{Fe}^{3+} + \text{I}^- \longrightarrow \text{Fe}^{2+} + \frac{1}{2} \text{I}_2$ , on a réalisé deux séries d'expériences à 25°C.

- On mesure la vitesse initiale  $v_0$  de la réaction avec une valeur constante de  $[\text{I}^-]_0 = 3,45 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$  et des valeurs variables de  $[\text{Fe}^{3+}]_0$ .

$[\text{Fe}^{3+}]_0$ (mmol · L <sup>-1</sup> )	1,43	7,51	17,31	24,21
$v_0$ (μmol · L <sup>-1</sup> · s <sup>-1</sup> )	0,15	0,79	1,82	2,54

Déterminer l'ordre partiel par rapport à  $\text{Fe}^{3+}$ .

- Cette fois-ci,  $[\text{Fe}^{3+}]_0 = 1,42 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$  est maintenu constant et c'est  $[\text{I}^-]_0$  qui varie.

$[\text{I}^-]_0$ (mmol · L <sup>-1</sup> )	3,45	8,31	11,82	14,11
$v_0$ (μmol · L <sup>-1</sup> · s <sup>-1</sup> )	0,15	0,87	1,75	2,52

Déterminer l'ordre partiel par rapport à  $\text{I}^-$ .

- En déduire la loi de vitesse et calculer la valeur de la constante de vitesse.

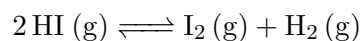
## 154 Acide perchlorique

L'acide perchlorique  $HClO_4$  est un acide fort.

1. Rappeler la définition d'un acide et d'un acide fort.
2. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de cet acide avec l'eau.
3. Calculer les concentrations des ions présents dans une solution de 250 mL contenant  $4 \cdot 10^{-3}$  mol d'acide.
4. Déterminer le  $pH$  de la solution.
5. On veut préparer à partir de cette solution une solution d'un litre ayant un  $pH$  égal à 3. Déterminer le facteur de dilution nécessaire puis le volume de solution-mère à prélever.

## 155 Étude d'un équilibre entre gaz

On étudie l'équilibre en phase gazeuse :



à la température  $T = 900 \text{ K}$ . Dans un récipient de volume  $V = 6,00 \text{ L}$ , on introduit  $2,00 \text{ mol}$  d'iodure d'hydrogène gazeux  $\text{HI} (\text{g})$ .

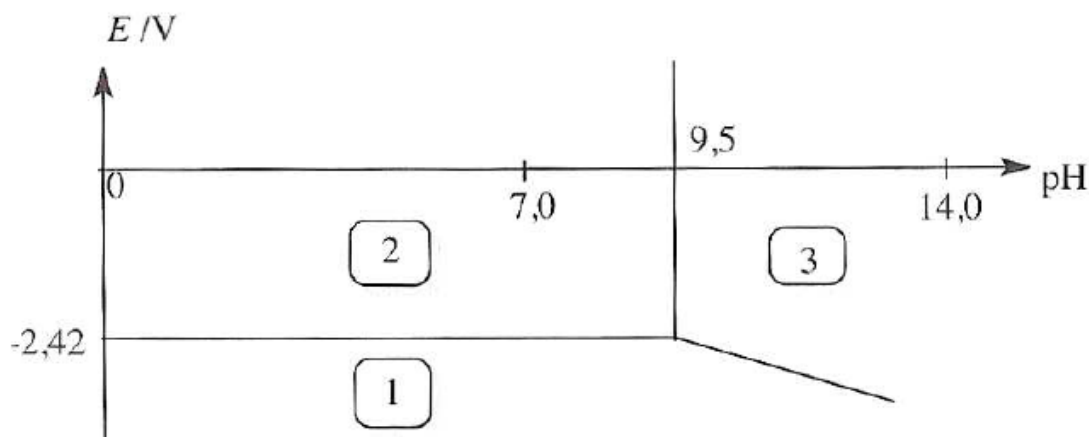
À l'équilibre, la pression partielle en dihydrogène, notée  $P_{\text{H}_2}$  est égale à 3,10 bar.

1. Calculer la pression initiale dans le récipient. Calculer la pression totale  $P_{\text{tot}}$  à l'équilibre.
2. Exprimer la constante d'équilibre  $K_1^0$  en fonction de  $P_{\text{H}_2}$  et  $P_{\text{tot}}$ . Calculer sa valeur numérique.
3. Calculer la valeur du coefficient de dissociation  $\alpha$  de l'iodure d'hydrogène  $\text{HI}$  à l'équilibre.
4. Le mélange gazeux initial est désormais constitué par :  $2,00 \text{ mol}$  d'iodure d'hydrogène  $\text{HI} (\text{g})$ ,  $1,00 \text{ mol}$  de dihydrogène  $\text{H}_2 (\text{g})$  et  $1,00 \text{ mol}$  de diiode  $\text{I}_2 (\text{g})$ . On a toujours  $V = 6,00 \text{ L}$  et  $T_1 = 900 \text{ K}$ . Le système est-il à l'équilibre ? Sinon, dans quel sens évolue-t-il ?
5. On renouvelle l'expérience à une autre température  $T_2 = 769 \text{ K}$ . On trouve pour la constante d'équilibre  $K_2^0(T_2) = 2,18 \cdot 10^{-2}$ . Déduire le signe de l'enthalpie standard de la réaction. Calculer numériquement sa valeur (on se placera dans l'approximation d'Ellingham).
6. Calculer la valeur de l'entropie standard de la réaction.

## 156 Diagramme E-pH du magnésium

Le diagramme potentiel-pH du magnésium est tracé ci-dessous pour une concentration de travail  $c_0 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Les espèces intervenant dans le diagramme sont  $\text{Mg}(\text{s})$ ,  $\text{Mg}^{2+}$  et  $\text{Mg}(\text{OH})_2(\text{s})$ .

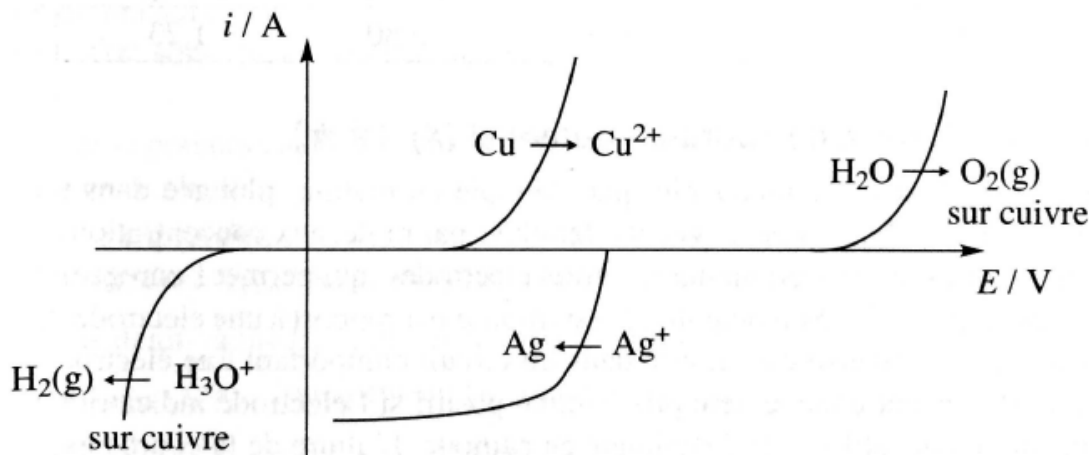


1. Indiquer à quelle zone du diagramme correspondent chacune des espèces du magnésium considérées.
2. Déterminer le potentiel standard du couple  $\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}(\text{s})$  d'après le diagramme potentiel-pH.
3. Calculer le produit de solubilité  $K_s$  de l'hydroxyde de magnésium  $\text{Mg}(\text{OH})_2(\text{s})$

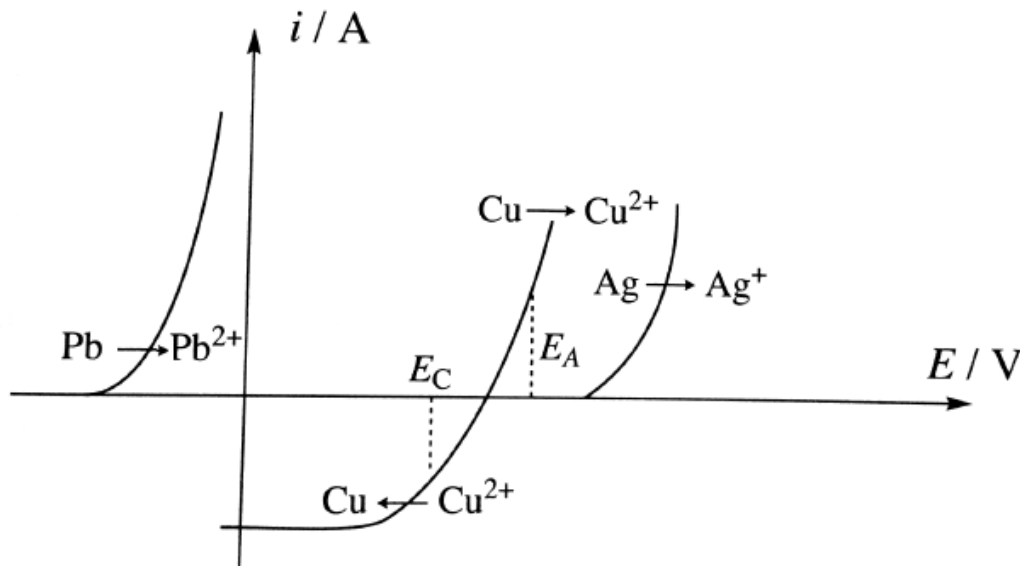


### 157 Raffinage électrolytique du cuivre

Une lame de cuivre plonge dans une solution de nitrate d'argent. Les courbes intensité-potential relatives aux différents couples en présence sont représentées ci-dessous.



1. Écrire l'équation-bilan de la réaction qui a lieu. Déterminer sa constante d'équilibre à 298 K. Commenter la valeur obtenue.
2. À l'aide des courbes intensité-potential, prévoir si cette réaction est rapide ou lente (un schéma est souhaité).
3. Le raffinage électrolytique du cuivre consiste à placer du cuivre impur comme anode dans une solutions concentrée du sulfate de cuivre. Une électrode support (en acier inoxydable) est placée en vis-à-vis pour y déposer le cuivre par réduction cathodique. Les seules impuretés qui seront considérées ici sont le plomb Pb et l'argent Ag. Le système est modélisé de façon simple par une électrode de cuivre comportant des particules d'argent pur et de plomb pur. Les courbes intensité-potential relatives aux différents couples en présence sont représentées ci-dessous.  $E_A$  désigne le potentiel auquel est portée l'anode et  $E_C$  est le potentiel de la cathode.



Écrire la(les) réaction(s) observée(s) à l'anode. Même question à la cathode.

4. Expliquer l'intérêt de cette méthode quant à la purification du cuivre.

Données à 298 K :

Couple	Pb <sup>2+</sup> /Pb (s)	Cu <sup>2+</sup> /Cu (s)	Ag <sup>+</sup> /Ag (s)	O <sub>2</sub> (g)/H <sub>2</sub> O (l)
$E^0$ (V)	-0,13	0,34	0,80	1,23

## 158 Résolution de problème - Composition d'un gong

Le gong désigne une variété d'instruments de musique de percussion en métal, originaires de l'Asie du Sud-Est. Sa sonorité est, entre autres, liée au matériau utilisé pour sa fabrication : le bronze, alliage de cuivre et d'étain. Cette sonorité dépend du pourcentage d'étain constituant le bronze.



Pour analyser le bronze d'un gong, on plonge un échantillon de 3,00 g d'un gong dans un demi-litre d'acide chlorhydrique de concentration décimolaire. Un gaz se dégage. Son volume est mesuré grâce à un tube à dégagement introduit dans une éprouvette graduée remplie d'eau. En fin d'expérience le volume de gaz dégagé est de 153 mL.

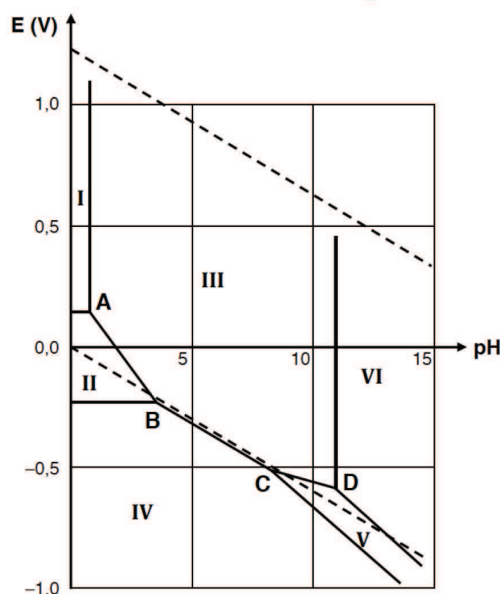
**Quel est le pourcentage massique d'étain du bronze constituant le gong ?**

**Quelques diagrammes E-pH :**

□ Diagramme E-pH de l'étain : Il fait intervenir les espèces  $\text{SnO}_2(s)$ ,  $\text{Sn}(s)$ ,  $\text{Sn}_{(aq)}^{2+}$ ,  $\text{Sn}_{(aq)}^{4+}$ ,  $\text{SnO}_3^{2-}(aq)$  et  $\text{HSnO}_2^-(aq)$ .

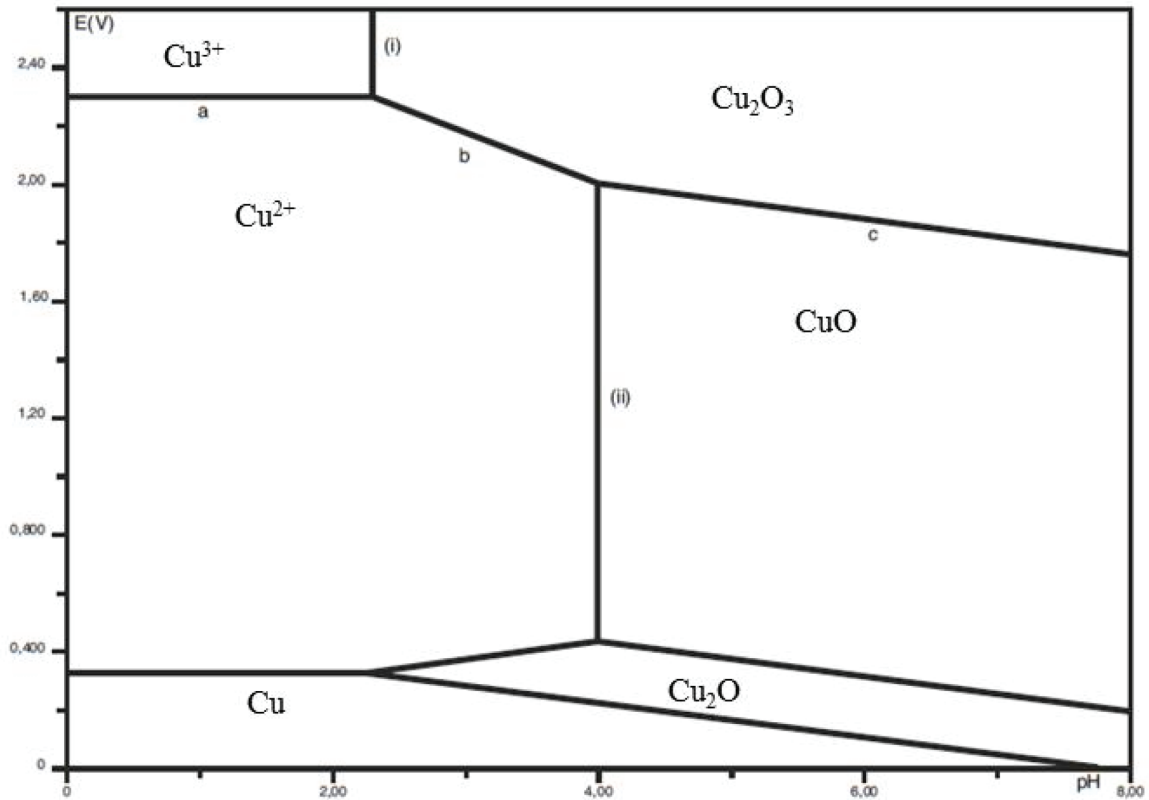
Espèce	$\text{Sn}(s)$	$\text{Sn}^{2+}$	$\text{HSnO}_2^-$	$\text{Sn}^{4+}$	$\text{SnO}_2$	$\text{SnO}_3^{2-}$
Domaine	IV	II	V	I	III	VI

Le tracé a été effectué à 25°C pour une concentration totale en espèces dissoutes de  $1 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .



On donne  $M(\text{Sn}) = 118,7 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

□ Diagramme E-pH du cuivre : Il fait intervenir les espèces  $\text{Cu}_{(s)}$ ,  $\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$ ,  $\text{CuO}_{(s)}$ ,  $\text{Cu}_{(aq)}^{2+}$ ,  $\text{Cu}_{(aq)}^{3+}$  et  $\text{Cu}_2\text{O}_3_{(s)}$ . Le tracé a été effectué à 25°C pour une concentration totale en espèces dissoutes de 1 mol/L.



## 159 Corrosion uniforme et corrosion différentielle

Lorsqu'on plonge un morceau de fer dans une solution aqueuse d'acide chlorhydrique désaérée (en l'absence de dioxygène dissous), concentrée à  $c^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ , on observe une lente dissolution de la pièce de fer ainsi qu'un léger dégagement gazeux à sa surface. Lorsqu'on dépose une goutte d'eau sur une plaque de fer préalablement décapée, on observe un dépôt de rouille (hydroxyde de fer III) à la périphérie de la goutte et une altération de la plaque au centre de la goutte.

1. Donner la nature de la corrosion dans chacun des cas présentés, à savoir corrosion uniforme ou corrosion différentielle.
2. Dans le cas du morceau de fer dans la solution acide, interpréter le phénomène en écrivant les demi-équations rédox mises en jeu ainsi que l'équation-bilan et en utilisant les courbes intensité-potentiel.
3. Faire de même dans le second cas.

Données :  $E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}_s}^0 = -0,44 \text{ V}$ ,  $E_{\text{H}^+/\text{H}_2,\text{gaz}}^0 = 0,00 \text{ V}$ ,  $E_{\text{O}_2,\text{gaz}/\text{H}_2\text{O}}^0 = 1,23 \text{ V}$ , surtension pour  $\text{H}^+/\text{H}_2,\text{gaz}$  sur  $\text{Fe}_s$  :  $\eta_c = -0,40 \text{ V}$ , surtension pour  $\text{O}_2,\text{gaz}/\text{H}_2\text{O}$  sur  $\text{Fe}_s$  :  $\eta_c = -0,50 \text{ V}$ , concentration en ions fer  $C = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$  et pression de dioxygène ambiante.

## 160 Résolution de problème - Protection de la coque d'un bateau

On désire protéger pendant une année la coque en acier du bateau décrit dans le document 4 à l'aide d'une anode sacrificielle dont il faudra trouver la nature et la masse globale, éventuellement répartie en plusieurs endroits de la coque.

Données :  $M_{Pb} = 207,1 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M_{Sn} = 118,7 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M_{Ni} = 58,7 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M_{Fe} = 55,8 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M_{Zn} = 65,4 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M_{Al} = 27,0 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M_{Mg} = 24,3 \text{ g.mol}^{-1}$ .

La corrosion est un phénomène bien connu des marins. Les bateaux dont la coque est en acier en sont victimes et doivent en être protégés. Une méthode de protection consiste à poser à la surface de la coque des blocs de métal que l'on appelle « anodes sacrificielles ».

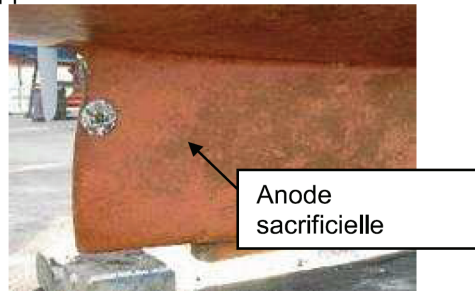


Image provenant du site [www.hisse-et-oh.com](http://www.hisse-et-oh.com)

L'objectif de l'exercice est d'évaluer, à l'aide des documents ci-après, la masse de l'anode sacrificielle nécessaire à la protection d'un bateau.

### Document 1. Le phénomène de corrosion

La corrosion d'un métal M est sa transformation à l'état de cation métallique  $M^{k+}$  par réaction avec le dioxygène dissous dans l'eau. Le métal perd un ou plusieurs électrons.

### Document 2. Potentiels standard de différents métaux

Pour prévoir les réactions d'oxydoréduction, on peut s'appuyer en première approche sur l'échelle suivante, appelée échelle des potentiels standard. Tous les couples oxydant/réducteur peuvent être classés par leur potentiel standard.

Échelle des potentiels standards de quelques couples à 20°C :

Élément	Couple	Potentiel standard (V)
Plomb	$Pb^{2+} / Pb$	-0,126
Étain	$Sn^{2+} / Sn$	-0,138
Nickel	$Ni^{2+} / Ni$	-0,257
Fer	$Fe^{2+} / Fe$	-0,447
Zinc	$Zn^{2+} / Zn$	-0,760
Aluminium	$Al^{3+} / Al$	-1,67
Magnésium	$Mg^{2+} / Mg$	-2,37

Lorsque deux métaux sont en contact et peuvent être oxydés par le dioxygène, c'est celui dont le couple a le potentiel standard le plus faible qui s'oxyde : il constitue l'anode et protège l'autre métal qui ne réagira pas.

**Document 3. Protection d'un bateau avec coque en acier**

Lors de l'oxydation de l'anode sacrificielle, il s'établit un courant de protection au niveau de la surface de la coque immergée. Sa densité de courant moyenne, intensité de courant par unité de surface, vaut :  
 $j = 0,1 \text{ A.m}^{-2}$ .

Ce courant a son origine dans la charge électrique échangée lors de la réaction d'oxydo-réduction. L'intensité  $I$  d'un courant électrique peut s'exprimer en fonction de la charge électrique  $Q$  échangée au cours de la réaction pendant une durée  $\Delta t$  :

$I = \frac{Q}{\Delta t}$  où, dans le système international,  $I$  s'exprime en ampère (A),  $Q$  en coulomb (C) et  $\Delta t$  en seconde (s).

**Document 4: bateau commercial avec coque en acier**

Le bateau commercial ci-dessus, en construction à Gdansk en Pologne, possède une coque en acier qui est donc composée essentiellement de fer.

**161 Étude d'une pile à combustible au méthanol**

On constitue une pile en solution aqueuse dans laquelle le méthanol liquide est dissous dans l'eau. Il est oxydé en dioxyde de carbone gazeux à l'une des électrodes, tandis que le dioxygène gazeux est réduit en eau à l'autre. L'électrolyte est une solution aqueuse d'acide phosphorique. Les deux électrodes sont séparées par une membrane poreuse, que l'on supposera imperméable au méthanol mais perméable à l'acide phosphorique.

1. Proposer un matériau pour les électrodes. Justifier.
2. Faire un schéma de cette pile en justifiant, vues les données, la polarité des électrodes. Donner le nom des électrodes et le sens de circulation des électrons dans le circuit extérieur.
3. Donner une représentation conventionnelle de cette pile.
4. Lorsque la pile débite, écrire les équations des réactions se produisant à chaque électrode, ainsi que la réaction d'oxydoréduction globale de fonctionnement.
5. Donner l'expression littérale du potentiel de chaque électrode. Les gaz seront supposés parfaits et les solutions suffisamment diluées.
6. Exprimer la constante d'équilibre de la réaction de fonctionnement de la pile en fonction des potentiels standard des couples (relation à démontrer).
7. La pile débite un courant de 50 mA pendant 2 heures. Quelle masse de méthanol a été consommée ?
8. Un des problèmes techniques actuels est l'oxydation incomplète du méthanol en acide méthanoïque. Écrire cette demi-réaction d'oxydoréduction. Comment modifie-t-elle la quantité d'électricité produite par une quantité donnée de méthanol consommée ?

9. Un second problème est le passage du méthanol à travers la membrane qui sépare les deux compartiments de la pile. En quoi ce passage est-il gênant ?

Données :

Masses molaires en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$  : H : 1,0; C : 12,0; O : 16,0

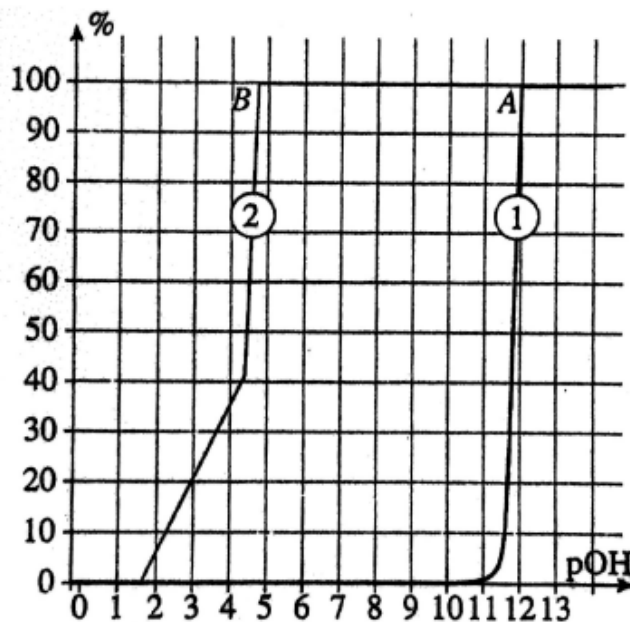
Constante de Faraday :  $\mathcal{F} = 9,65 \cdot 10^4 \text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$

On note  $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,059 \text{V}$  à  $25^\circ\text{C}$

## 162 Précipitations compétitives

En présence d'ions hydroxydes  $\text{HO}^-$ , les ions magnésium (II) donnent un précipité blanc d'hydroxyde de magnésium (II) et les ions mercure (II) donnent un précipité orangé d'hydroxyde de mercure (II). Lorsqu'on ajoute une solution de nitrate de mercure (II) à une solution contenant un précipité blanc d'hydroxyde de magnésium (II), la phase solide se colore immédiatement en orange.

1. Que peut-on conclure de ces observations ?



2. Le document précédent correspond à la simulation de l'ajout d'une solution d'ions hydroxyde à une solution équimolaire en ions  $\text{Mg}^{2+}$  et  $\text{Hg}^{2+}$ , toutes deux à  $0,100 \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les graphes tracés représentent le pourcentage de cations métalliques présents dans la solution en fonction de  $\text{pOH} = -\log[\text{HO}^-] = -\log \omega$ .

Identifier les deux courbes tracées. Que représentent les deux points anguleux A et B ? En déduire les produits de solubilité de  $\text{Mg}(\text{OH})_2$  et de  $\text{Hg}(\text{OH})_2$ . On négligera la dilution.

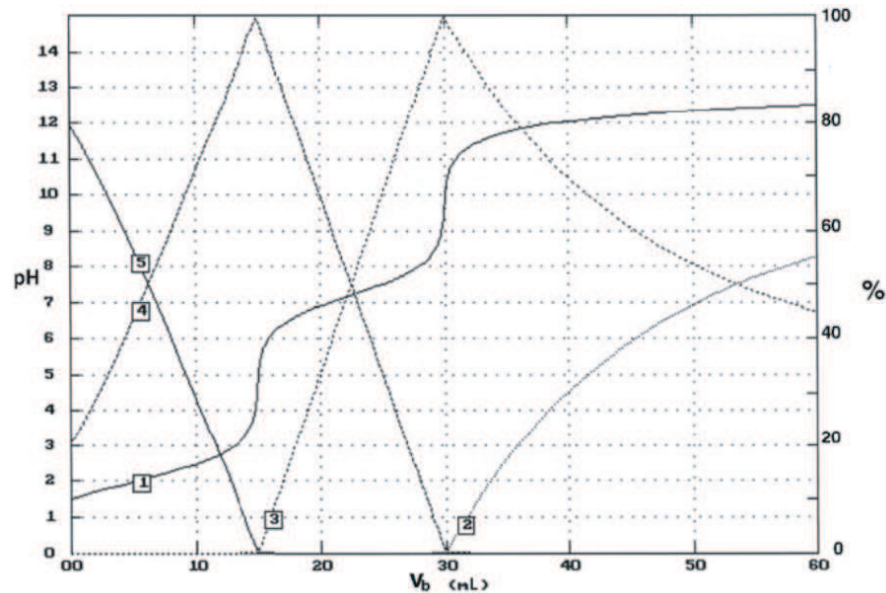
3. Déterminer la constante de la réaction qui se produit lorsqu'on ajoute des ions  $\text{Hg}^{2+}$  à un précipité d'hydroxyde de magnésium (II).

## 163 Dosage d'un mélange d'acides

- Définir un acide fort puis un acide faible. Tracer le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques de l'acide phosphorique.
- On dose  $10,0 \text{mL}$  d'une solution d'acide sulfurique à  $0,100 \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  par de la soude ( $\text{Na}^+, \text{OH}^-$ ) à  $0,100 \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On suit le dosage par pH-métrie et  $V_b$  désigne le volume de soude versé.
  - Tracer l'allure de la courbe de dosage  $\text{pH} = f(V_b)$ .
  - Calculer la valeur de  $V_b$  à l'équivalence.

3. On dose 10,0 mL d'une solution d'acide phosphorique à  $0,150 \text{ mol.L}^{-1}$  par de la soude ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{OH}^-$ ) à  $0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ .  $V_b$  désigne le volume de soude versé. On donne la courbe  $\text{pH} = f(V_b)$  (courbe 1) et les courbes de distribution (pourcentage) des espèces acido-basiques faibles  $\text{H}_3\text{PO}_4$ ,  $\text{H}_2\text{PO}_4^-$ ,  $\text{HPO}_4^{2-}$  et  $\text{PO}_4^{3-}$  en fonction de  $V_b$ . A titre d'exemple, la courbe de distribution de  $\text{H}_3\text{PO}_4$  est définie par :

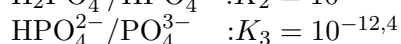
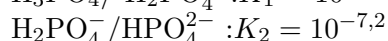
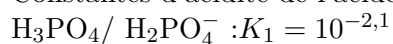
$$\% \text{H}_3\text{PO}_4 = \frac{[\text{H}_3\text{PO}_4]}{[\text{H}_3\text{PO}_4] + [\text{H}_2\text{PO}_4^-] + [\text{HPO}_4^{2-}] + [\text{PO}_4^{3-}]} = f(V_b).$$



- (a) Attribuer chaque courbe de distribution (courbes 2, 3, 4 et 5) à une espèce acido-basique. Retrouver les valeurs des  $\text{p}K_A$  de l'acide phosphorique.
- (b) Ecrire les réactions de dosage dans les différents plages de volume.
- (c) Relever le volume à la première équivalence et vérifier que sa valeur est cohérente avec les concentrations données.
- (d) Pourquoi n'observe-t-on que deux « sauts de pH » alors qu'on dose un triacide ? On écrira la réaction correspondant au dosage de la troisième acidité et on calculera sa constante d'équilibre avant de conclure.
4. On dose 10,0 mL d'un mélange d'acide sulfurique (de concentration  $C_1 = 0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ ) et d'acide phosphorique (de concentration  $C_2 = 0,150 \text{ mol.L}^{-1}$ ) par de la soude ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{OH}^-$ ) à  $0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ . On suit le dosage par pH-métrie. On repère deux équivalences pour des volumes  $V_{b1} = 35,0 \text{ mL}$  et  $V_{b2} = 50,0 \text{ mL}$ . La première équivalence correspond au virage de l'hélianthine et le second saut de correspond au virage du rouge de crésol.
- (a) Indiquer les espèces dosées dans chaque plage de volume.
- (b) Vérifier la cohérence des valeurs et avec les volumes relevés.

#### Données :

— Constantes d'acidité de l'acide phosphorique :



— L'acide sulfurique sera considéré comme un diacide fort.

— Produit ionique de l'eau :  $\text{p}K_e = 14$

— Zones de virage des indicateurs colorés : hélianthine (rouge si  $\text{pH} < 3$  et jaune si  $\text{pH} > 4$ ) et rouge de crésol (jaune si  $\text{pH} < 7$  et rouge si  $\text{pH} > 9$ ).

---

**EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS (ENSEA-Mines)**

---

1. Forces d'inertie dans un référentiel tournant à  $\omega$  constant
2. Interféromètre de Michelson en coin d'air
3. Résonance
4. Diffusion thermique dans une barre calorifugée
5. Ondes évanescentes
6. Pompe à chaleur
7. Lois de Laplace en thermodynamique
8. Évolution de la température et de la pression dans l'atmosphère
9. Trous d'Young, source ponctuelle à courte distance et observation à grande distance. Perte de contraste par élargissement spectral.
10. Condensateur plan.