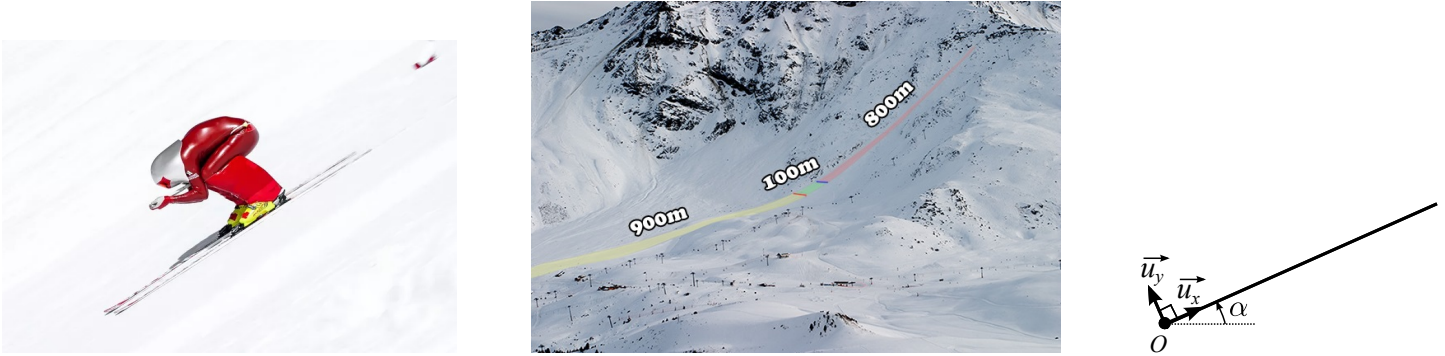


Exercices d'oraux - type Centrale 2

1 Kilomètre lancé à ski

On considère une piste de kilomètre lancé (KL) de pente moyenne de 60% (un déplacement horizontal $d_{horiz} = 100\text{ m}$ correspond à un déplacement vertical $d_{vert} = 60\text{ m}$).

On pose α l'angle moyen de la piste avec la direction horizontale. On définit le repère suivant :



Un skieur (masse $m = 80\text{ kg}$) descend cette piste selon la droite de plus grande pente.

On note v la norme de sa vitesse \vec{v} par rapport à la piste.

On suppose que l'air exerce une force de frottement fluide \vec{f} proportionnelle à la vitesse au carré, avec un coefficient de proportionnalité $\beta \simeq 5 \times 10^{-2}\text{ SI}$.

On prend aussi en compte les frottements solides entre les skis et la piste; le coefficient de frottement dynamique correspondant est $k_d \simeq 0,1$.

- Déterminer la valeur de l'angle α en radian.


Quelle est l'unité de β ?

Donner l'expression de \vec{v} dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et en déduire la relation entre v et \dot{x} .

- Effectuer une étude dynamique pour obtenir l'équation différentielle gérant l'évolution de v en fonction du temps (on l'écrira sous forme canonique, sans chercher à la résoudre).
- En déduire la vitesse limite v_{lim} atteinte par le skieur.

On mesure une vitesse du skieur de $252\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ (record mondial, mars 2014).

Commenter, en supposant que cette vitesse correspond au régime permanent.

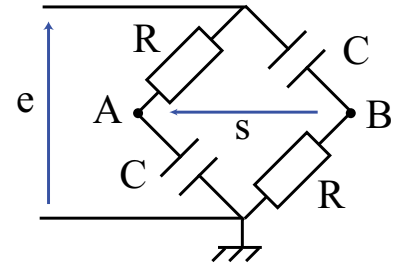
-  En utilisant python, résoudre l'équation différentielle précédente. La vitesse limite est-elle vraiment atteinte? Discuter de l'influence des différents paramètres en lien avec le problème physique posé. On pourra s'aider du fichier *KL.py* disponible sur le site de la classe.


2 Déphaseur

1. Montrer que la fonction de transfert du circuit de la figure ci-contre peut s'écrire, en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{s(\omega)}{\underline{e}(\omega)} = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec une pulsation ω_c appelée pulsation critique dont on précisera la valeur en fonction de R et C .



2. Caractériser ce filtre par l'étude asymptotique de sa fonction de transfert, à basse et haute fréquence, et pour $\omega = \omega_c$. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau faisant figurer les équivalents de la fonction de transfert, du gain, du gain en décibels et de la phase.
3. En déduire le tracé du diagramme de Bode complet : $G_{dB}(\log(\omega))$ et $\varphi(\log(\omega))$.
4. On cherche à utiliser ce montage pour déphaser un signal d'entrée généré par un GBF.
- Expliquer pourquoi il n'est pas possible de brancher directement le GBF à l'entrée e et l'oscilloscope à la sortie s . Comment peut-on résoudre ce problème ?
 - On souhaite tout d'abord déphaser un signal sinusoïdal de 320Hz de $-\pi/2$. Proposer une valeur de R et de C qui permette de réaliser cette opération en prenant en compte les contraintes expérimentales.
 -  On souhaite maintenant observer l'influence du filtre précédent lorsque le signal d'entrée est un signal créneau de fréquence 320Hz . En modifiant le programme python `Dephaseur.py`, prédire l'allure du signal obtenu en sortie. On utilisera deux méthodes pour réaliser le filtrage. Le signal d'entrée est-il simplement déphasé? On proposera une explication.

3 Fil de Litz

Un conducteur de conductivité électrique γ réelle occupe le demi espace $x > 0$. On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

1. Propagation d'une onde dans le conducteur

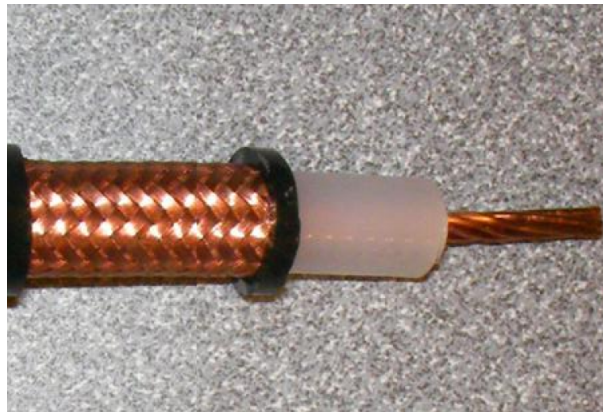
- Rappeler la loi d'Ohm locale ainsi que les équations de Maxwell dans l'ARQS.
- Établir l'équation différentielle dont est solution le champ électrique, $\vec{E}(x, t)$, dans le conducteur. La mettre sous la forme

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

avec D à exprimer. Commenter l'équation obtenue.

- Soit une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant dans le conducteur selon les x croissants, de représentation complexe : $\underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(kx - \omega t)}$. Établir la relation de dispersion de cette OPPH. On exprimera k^2 en fonction des données.
- Montrer que $\underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}$; avec δ , à exprimer en fonction des données. Caractériser la forme d'onde obtenue et donner la signification physique de δ , ainsi que son ordre de grandeur à 50 Hz pour le cuivre.
- Application.


Un fil de Litz permet de transporter des signaux à haute fréquence. A partir des résultats précédents, expliquer la constitution du fil de Litz présenté dans la figure ci-dessous.



2. Interface vide / conducteur.

Le demi espace $x < 0$ est le vide. Donnée :

- le champ électrique est continu en $x = 0$;
- le champ magnétique est continu en $x = 0$;
- la réflexion / transmission ne modifie pas l'état de polarisation de l'OPPH.

- Une OPPH de pulsation ω , polarisée rectilignement selon \vec{u}_y , tombe en incidence normale sur le conducteur. Déterminer l'expression des coefficients de réflexion \underline{r} et de transmission \underline{t} en amplitude de l'onde. On fera intervenir le rapport $\omega\delta/c$ dans les expressions de \underline{r} et \underline{t} . Commenter physiquement les résultats obtenus. Examiner le cas $\gamma \rightarrow \infty$.
-  Étude informatique.

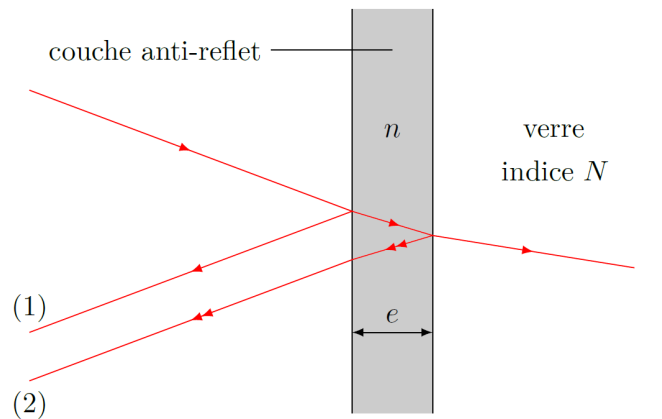
On donne un code en langage Python permettant de tracer l'animation des ondes incidente, réfléchi, leur somme, ainsi que l'onde transmise. Il vous est demandé de modifier le programme afin d'illustrer le rôle des paramètres physiques pertinents rencontrés dans cette étude.

4 Panneaux solaires anti-reflet

Les panneaux solaires les plus performants ont actuellement un rendement de 25%. On cherche à savoir ici quel gain on peut obtenir en utilisant une couche anti-reflet. L'ensemble des cellules photovoltaïques est protégé par une plaque de verre d'indice $N = 1,50$. Les coefficients de réflexion R et transmission T en puissance d'un dioptre entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 transparents sont donnés par

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$


- En considérant $n_{\text{air}} = 1$, quelle est la proportion de puissance perdue par réflexion sur un panneau ? Une couche d'épaisseur e d'un milieu transparent d'indice n tel que $1 \leq n \leq N$ est déposée sur le verre. On ne tiendra compte que des deux premières réflexions sur chacun des dioptres.



- Expliquer qualitativement comment un tel dispositif peut réduire la puissance réfléchie.
- On suppose que l'onde incidente, d'éclairement E_0 et de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, arrive en incidence normale.
 - Quels sont les éclairements E_1 et E_2 des ondes réfléchies ?
 - Exprimer la différence de marche δ .
 - En déduire les caractéristiques de la couche anti-reflet la plus mince (épaisseur et indice). On pourra supposer que l'indice n est proche de l'unité et remarquer que $R_{1n} \simeq R_{nN}$. On validera cette hypothèse à posteriori en calculant T_{1n} .

La lumière du soleil n'est pas monochromatique, on considère alors que l'éclairement de l'onde totale réfléchie à la pulsation ω est


$$dE = 2E_0^\omega \left(1 + \cos \left(\frac{\omega \delta}{c} \right) \right) d\omega \quad \text{avec} \quad \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

-  En supposant E_0^ω constant sur tout le spectre de la lumière incidente et en calculant l'éclairement total E_r de l'onde réfléchie, montrer que le coefficient de réflexion R ne peut être strictement nul. On s'aidera pour cela du programme Python joint. Quelle doit être l'épaisseur de la couche pour une efficacité maximale ? Quel gain obtient-on par rapport à un panneau solaire dépourvu d'une telle couche ?

Il sera accordé une grande importance aux qualités d'exposition. Le candidat est invité, dès le début de son passage au tableau, à présenter le sujet préparé de manière ordonnée et argumentée.

5 Déviation d'un objet lâché du haut de la tour Montparnasse


On lâche une bille de plomb sans vitesse initiale du haut de la tour Montparnasse (210 m), un jour sans vent.

1. Pourquoi la bille ne tombe-t-elle pas exactement au pied de la tour ? Estimer la déviation que subirait la bille par rapport à un fil à plomb suspendu en haut de la tour. On justifiera clairement les approximations faites.
2.  Vérifier que le résultat obtenu à la question précédente correspond bien à celui que fournit le fichier *DeviationEst-TourMontparnasse.py* disponible sur le site de la classe. Discuter ensuite de la validité des approximations précédentes en modifiant le fichier Python de façon à faire une résolution complète du système d'équations.



6 Méthode Flash-Laser

On considère une pièce cylindrique de rayon r , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ et d'épaisseur e .

1. On s'intéresse à la conduction axiale au sein de la pièce.
 - (a) Établir l'équation de la diffusion thermique (pour $T(x, t)$) au sein du solide.
 - (b) En utilisant le modèle de Parker (voir l'annexe), donner l'expression de la température réduite sur la face arrière de la pièce définie par $u(t) = (T(e, t) - T_0) / (T_{\max} - T_0)$. Approcher cette expression pour les instants supérieurs au temps caractéristique de la diffusion (d'après le modèle de Parker).
 - (c)  Compléter le script PYTHON fourni pour donner les représentations graphiques analytique exacte et approchée de la température réduite.
 - (d) En déduire que le temps de demi-montée $t_{1/2}$ (pour lequel u vaut 1/2) permet de déterminer la diffusivité thermique du matériaux.
2. Étude du Dural.
 - (a) À l'aide de l'expérience de Balageas (détaillée dans l'annexe), estimer la diffusivité D du Dural.
 - (b) Comparer les temps caractéristiques des pertes convectives (pour $h = 5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$) et de la conduction au sein de la pièce. Que penser de l'hypothèse consistant à négliger les pertes convectives ?
 - (c) Estimer l'énergie apportée par la source à la face avant.
 - (d) Quelles critiques peuvent être formulées concernant le modèle de Parker ?

Annexes

6.1 Méthode de Parker

La technique flash laser a été développée par Parker (1960) afin d'obtenir des mesures rapides de la conductivité thermique d'échantillons de petites dimensions. Elle consiste à envoyer une impulsion très brève sur la face avant d'un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ensuite, l'analyse de l'évolution de la température sur la face arrière en fonction du temps permet la détermination de la diffusivité thermique. Le Modèle de Parker consiste à considérer un disque parfaitement isolé d'épaisseur e et de rayon r . Initialement, l'échantillon reçoit une impulsion énergétique de très courte durée, l'absorption de l'énergie s'effectue en surface de façon uniforme. Les pertes convectives sont supposés nulles sur toutes les faces et le flux thermique se propage parallèlement à l'axe optique. La résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de Laplace. À une profondeur z donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit où D est la diffusivité thermique du matériau :

$$T(z, t) = T_0 + (T_{\max} - T_0) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{e}\right) \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 Dt}{e^2}\right) \right)$$

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour les basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail. La figure 1 donne un exemple de montage :

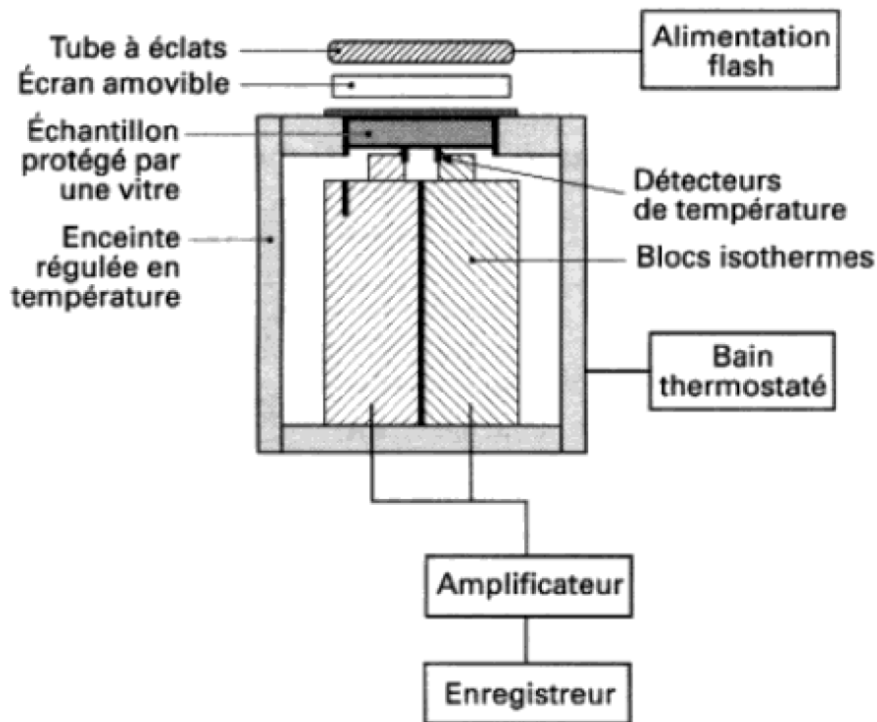


Figure 1 Exemple de montage expérimental de méthode Flash-Laser

6.2 Étude du Dural

Le Dural (ou duralumin ou encore duraluminium) est un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique en raison de sa grande résistance aux contraintes et de sa plus faible densité que l'acier. Sa densité n'est que de 2,8. Sa capacité thermique massique est $c = 880 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Des mesures de diffusivité en faces arrière ont été réalisées (Daniel Balageas, ONERA Département Matériaux et Structures) sur une plaque de Dural, illuminée par 2 lampes flash créant des illuminations de 4 ms (maximum de l'intensité à moins de 2 ms) avec au niveau de l'échantillon en face avant une énergie surfacique ϵ . La température surfacique était enregistrée par une caméra Jade LW Cedip à la fréquence image de 200 Hz. Une mesure en face arrière est faite afin de disposer d'une valeur à priori fiable de la diffusivité (méthode de Parker). Deux thermogrammes sont présentés : la température d'un pixel unique (courbe grise) et celle de la moyenne d'une zone circulaire centrale de 194 pixels, centrée sur ce pixel. La moyenne d'une zone de 194 pixels conduit à un rapport signal sur bruit de 62.

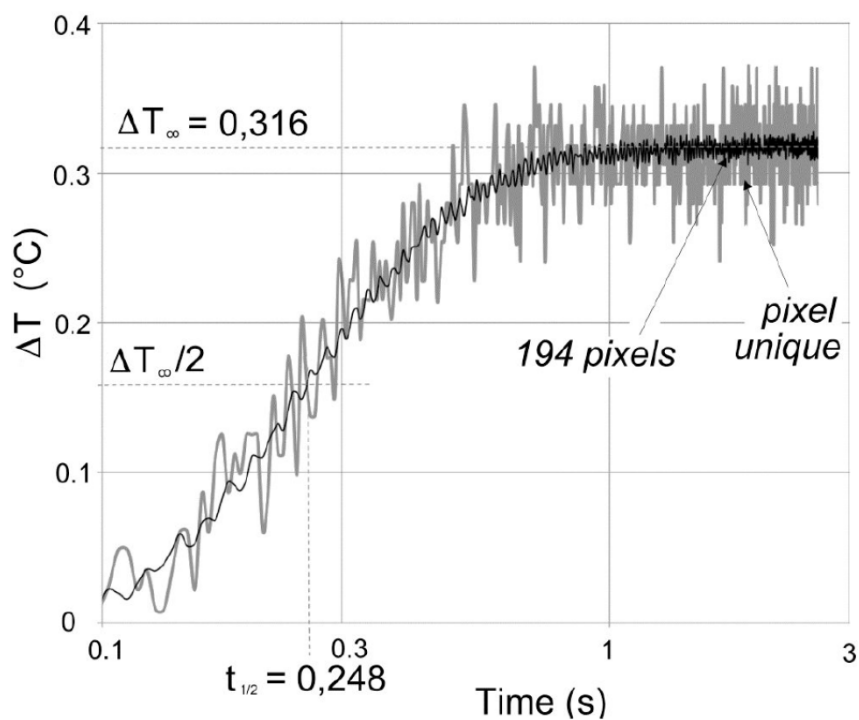


Figure 2 Thermogramme d'une plaque de Dural de surface $S = 0,01 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 1 \text{ cm}$

7 Pendule aux grandes oscillations

On considère un pendule constitué d'une masse m accrochée en un point O fixe à un fil inextensible, sans masse, de longueur ℓ . On note θ l'angle entre le pendule et la verticale. Le pendule est lâché d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

1. En utilisant une méthode énergétique, montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

On précisera l'expression de ω_0 .

2. Montrer que l'expression de la période peut s'écrire :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{\max})}}$$

On précisera l'expression de T_0 .


3. On peut montrer¹ qu'en réalisant le changement de variable suivant : $\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_{\max}/2)}$, on obtient alors $T = T_0 \mathcal{E}\left(\sin \frac{\theta_{\max}}{2}\right)$ avec

$$\mathcal{E}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \phi}}$$

où $\mathcal{E}(x)$ désigne l'intégrale elliptique de première espèce.

- (a) Montrer que l'expression précédente conduit à la formule approchée de Borda pour de petites oscillations :

$$T \underset{\theta_{\max} \rightarrow 0}{\simeq} T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16}\right)$$

- (b)  A l'aide d'un outil numérique, dans le cas particulier où $m = 0.1\text{kg}$ et $\ell = 1\text{m}$ dans le champ de pesanteur $g = 9,8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, déterminer l'angle θ_0 au delà duquel la période T s'écarte de plus de 1% de T_0 , puis de plus de 1% de l'expression de la période approchée avec la formule de Borda. On s'aidera du fichier *PenduleGrandesOscillations.py* disponible sur le site de la classe.

1. Cette démonstration n'est pas demandée ici, sauf s'il reste du temps à la fin de l'oral.

8 Théorème d'équipartition - cas du puits quantique infini

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème d'équipartition dans un cas particulier : celui du puits de potentiel infini de largeur L à "haute" température.

1. Montrer que les niveaux d'énergie accessibles pour une particule quantique de masse m piégée dans un puits de potentiel infini de largeur L peuvent s'écrire :



$$E_n = n^2 E_0 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec E_0 une constante à déterminer.

2. Quel niveau d'énergie peut-on prévoir à "très basse" température ? On précisera ce que signifie le terme de "très basse" température.
3. On considère maintenant que la température T est suffisante pour que de nombreux niveaux soient peuplés. En déduire une expression de la valeur moyenne $\langle E \rangle$ de l'énergie de la particule. En déduire qu'on peut écrire :

$$\epsilon = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp\left(-\frac{n^2}{\tau}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{\tau}\right)}$$

où ϵ et τ sont des grandeurs adimensionnées dont on précisera l'expression.

4.  On fournit le programme python `PuitsQuantiqueEquipartition.py` permettant de tracer ϵ en fonction de τ . En traçant cette figure sur plusieurs échelles de variation de τ , quelle conjecture peut-on raisonnablement faire ?
5.  On fournit un programme python `PuitsQuantiqueEquipartition2.py` permettant de tracer, pour différentes valeurs de τ , la grandeur $n^2 \exp\left(-\frac{n^2}{\tau}\right)$ en fonction de n . Justifier pourquoi, dans l'expression de ϵ , on peut approximer la somme infinie du numérateur par une intégrale. En déduire une nouvelle expression de ϵ faisant intervenir des intégrales.
6. Calculer l'expression à l'aide d'une intégration par partie et en déduire le théorème d'équipartition dans ce cas particulier.