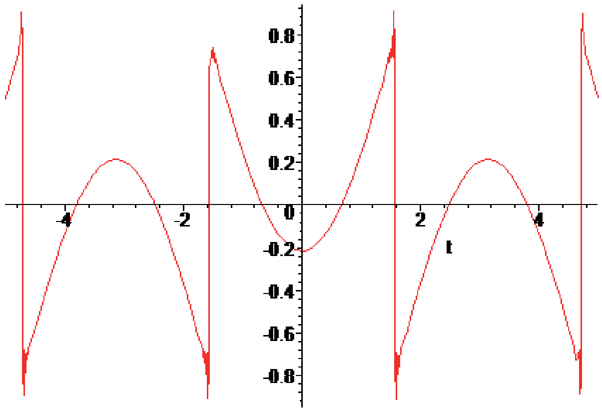
TD n°1 - Traitement du signal - Correction des exercices en autonomie

1 Réponse d'un filtre coupe-bande à un signal créneau

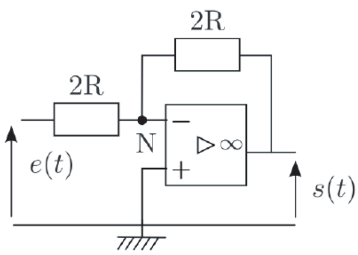
1. Si le filtre coupe-bande est très sélectif, il va seulement couper le fondamental du signal créneau, c'est à dire la composante à ω_0. Le signal de sortie correspond donc à un signal créneau auquel on a ôté une sinusoïde de même période, comme le montre la figure ci-dessous.



2. Le spectre du signal de sortie comporte des pics à $3\omega_0$, $5\omega_0$, $7\omega_0$... alors que le signal créneau à $\omega_1 = 3\omega_0$ comporte des pics à $\omega_1 = 3\omega_0$, $3\omega_1 = 9\omega_0$, $5\omega_1 = 15\omega_0$... Les deux spectres sont donc bien distincts.

2 Etude d'un filtre actif

1. En très basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, d'où le circuit équivalent ci-contre.
Il y a une unique rétroaction, négative. On suppose donc que l'AO fonctionne en régime linéaire : $V_s = \mu\varepsilon$;
en supposant aussi qu'il s'agit d'un AO idéal ($\mu \to \infty$),
on a alors $\varepsilon = 0$ soit $V_- = V_+ = 0$ ici (E_+ est reliée à la masse).
La loi des noeuds en terme de potentiel (théorème de Millman) appliquée au noeud N s'écrit :

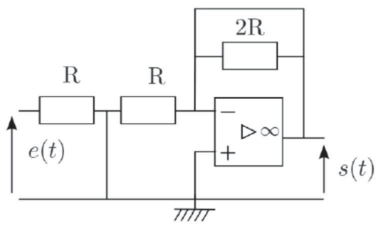


$$\frac{\underline{E} - \underline{V_-}}{2R} + \frac{\underline{S} - \underline{V_-}}{2R} - \underline{I_-} = 0$$

ou encore $$\underline{V_-} = \frac{\frac{\underline{E}}{2R} + \frac{\underline{S}}{2R} - \underline{I_-}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{\underline{E} + \underline{S}}{2} \qquad \text{(avec } \underline{I_-} = 0 \text{ pour un AO idéal)}$$

avec $\underline{V_-} = 0$ d'où $\underline{S} = -\underline{E}$: $\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = -1$ et le gain en basse fréquence est 1 : $G = |\underline{H}| \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} 1$.

En très haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé, d'où le circuit équivalent ci-contre.
De plus, tout se passe comme si un fil reliait alors la sortie de l'AO et son entrée E_- d'où $\underline{S} = \underline{V_-} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = 0$:
le gain en haute fréquence est 0 : $G = |\underline{H}| \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
Le filtre est donc probablement un filtre passe-bas.



2. Soit A le noeud commun aux branches R, R et $2C$.
   La loi des noeuds en terme de potentiel (théorème de Millman) appliquée à l'entrée E_- de l'AO s'écrit :

$$\frac{\underline{V_A}-\underline{V_-}}{R}+\frac{\underline{S}-\underline{V_-}}{\underline{Z_{eq}}}-\underline{I_-}=0 \qquad \text{ou encore} \qquad \underline{V_-}=\frac{\frac{\underline{V_A}}{R}+\frac{\underline{S}}{\underline{Z_{eq}}}-\underline{I_-}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{\underline{Z_{eq}}}}$$

   avec $\underline{I_-}=0$ (AO idéal), $\underline{V_-}=0$ et $\underline{Z_{eq}}=\dfrac{2R\times /j\frac{C}{2}\omega}{2R+2/j\frac{C}{2}\omega}=\dfrac{2R}{1+jRC\omega}$.

   D'où $\underline{S}=-\dfrac{\underline{Z_{eq}}}{R}\underline{V_A}=-\dfrac{2}{1+jRC\omega}\underline{V_A}$.
   Déterminons $\underline{V_A}$: la loi des noeuds en terme de potentiel (théorème de Millman) appliquée en A s'écrit :

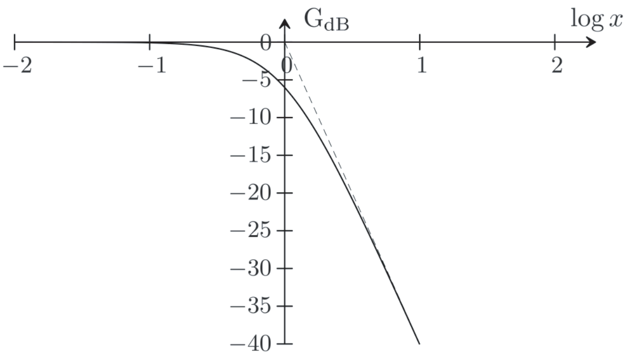
$$\frac{\underline{E}-\underline{V_A}}{R}+\frac{\underline{V_-}-\underline{V_A}}{R}+\frac{0-\underline{V_A}}{1/2jC\omega}=0 \text{ ou encore } \underline{V_A}=\frac{\frac{\underline{E}}{R}+\frac{\underline{V_-}}{R}+2jC\omega\times 0}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+2jC\omega}=\frac{\underline{E}+\underline{V_-}}{2+2jRC\omega}$$

   soit $\underline{V_A}=\dfrac{\underline{E}}{2\left(1+jRC\omega\right)}$. On a donc finalement $\underline{S}=-\dfrac{2}{1+jRC\omega}\underline{V_A}=-\dfrac{1}{1+jRC\omega}\dfrac{\underline{E}}{(1+jRC\omega)}$

$$\text{d'où } \boxed{\underline{H}=-\frac{\underline{S}}{\underline{E}}=\frac{-1}{\left(1+jx\right)^2}} \text{ avec } x=\frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \omega_0=\frac{1}{RC}.$$

   Note : on a bien une expression homogène (x est sans dimension) et les valeurs limites trouvées précédemment : $G=|\underline{H}|\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ et $G=|\underline{H}|\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$

3. Le gain de cette fonction de transfert est $G=|\underline{H}|=\left|\dfrac{1}{1+jx}\times\dfrac{1}{1+jx}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{1+x^2}$.
   On a donc :
   — Pour $x\ll 1$ ($\omega\ll\dfrac{1}{RC}$) : $G\sim 1$ d'où $G_{dB}=20\log\left(G\right)\simeq 0$
   donc la courbe $G_{dB}=f\left(\log\left(x\right)\right)$ présente en $x\ll 1$ une asymptote horizontale à 0 dB.
   — Pour $x\gg 1$ ($\omega\gg\dfrac{1}{RC}$) : $G\sim\dfrac{1}{x^2}$ d'où $G_{dB}=20\log\left(G\right)\simeq -40\log\left(x\right)$
   d'où une asymptote oblique de pente -40 dB/décade et passant par l'origine.
   — Pour $x=1$ ($\omega=\dfrac{1}{RC}$) : $G\sim\dfrac{1}{2}$ d'où $G_{dB}=20\log\left(G\right)\simeq -6,0\,\text{dB}$.
   On en déduit la courbe suivante :



4. La pulsation de coupure ω_c est telle que $G\left(\omega_c\right)=\dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$
   soit, en posant $x_c=RC\omega_c$ et avec $G_{max}=1$ ici : $G\left(x_c\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{1+x_c^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d'où $x_c = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ ($\simeq 0,64$) soit $\boxed{\omega_c = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{RC}} < \omega_0$ pour ce filtre d'ordre 2.

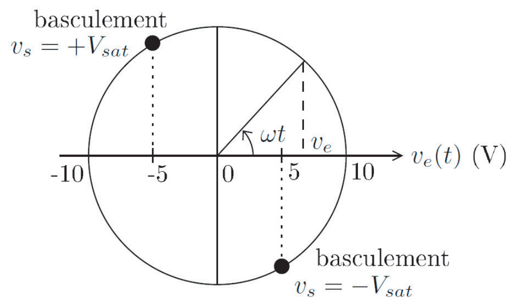
3 Comparateur à hystérésis

L'amplificateur opérationnel est idéal, donc les courant i^+ et i^- sont nuls. Il n'y a pas de rétroaction sur l'entrée inverseuse, donc l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime non linéaire. En conséquence, il ne faut surtout pas étudier le circuit en passant par les complexes : les grandeurs du circuit ne sont pas des grandeurs sinusoïdales de même pulsation que l'entrée (l'amplificateur étant saturé, la sortie vaudra toujours $\pm V_{sat}$, mais la tension ne sera pas forcément un créneau (et donc *a fortiori* n'aura pas nécessairement la même période que le signal en entrée)).

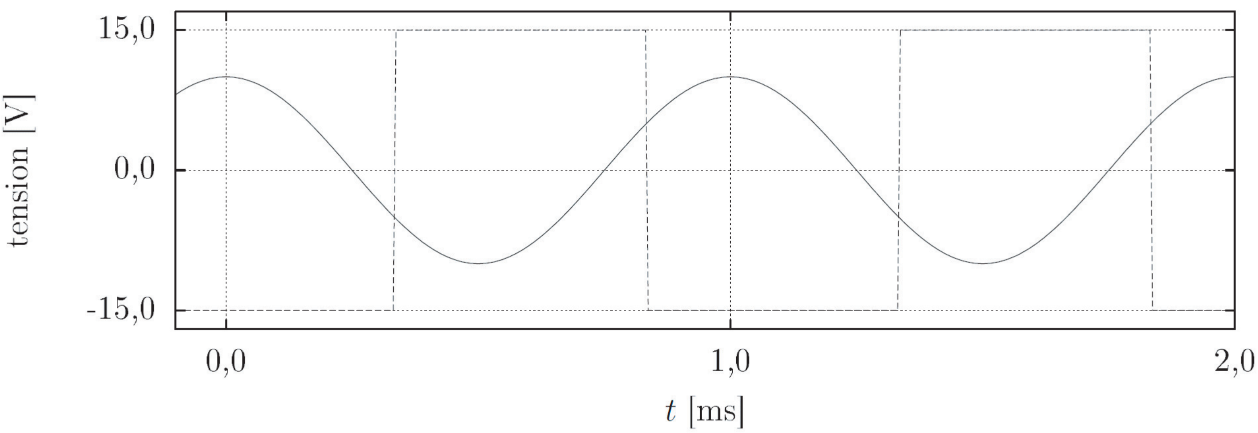
On obtient la tension v^+ par un pont diviseur de tension : $v^+ = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_s = \dfrac{v_s}{3}$

À $t=0$, $v_s = -V_{sat}$, donc $v^+ = -\dfrac{V_{sat}}{3} = 5$ V. La tension de sortie reste saturée à $-V_{sat}$ tant que $v^+ < v^-$, soit $v_e(t) > -\dfrac{V_{sat}}{3}$.

Notons t_1 l'instant pour lequel $v_e(t_1) = -\dfrac{V_{sat}}{3} \Longrightarrow \cos(\omega t_1) = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow t_1 = \dfrac{2\pi}{3\omega} \simeq \dfrac{1}{3.10^3} \simeq 0,33$ ms.
À $t = t_1$, la tension de sortie bascule et vaut $v_s = +V_{sat} \Longrightarrow v^+ = \dfrac{V_{sat}}{3} = 5$ V. La tension de sortie reste alors constante tant que $v^+ > v^-$, soit jusqu'à l'instant t_2 tel que $v_e(t_2) = \dfrac{V_{sat}}{3} \Longrightarrow \cos(\omega t_2) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow t_2 = \dfrac{5\pi}{3\omega} \simeq 0,83$ ms.

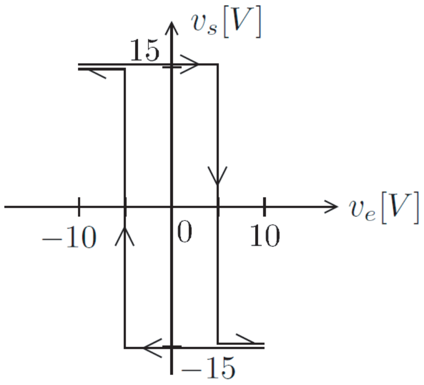


La tension de sortie bascule alors à nouveau, et on retourne au cas $v_s = -V_{sat}$, tant que $v^+ < v^-$ soit jusqu'à $t_3 = \dfrac{8\pi}{3\omega} \simeq 1,33$ ms.
On peut alors tracer les tensions $v_e(t)$ (en traits pleins) et $v_s(t)$ (en tirets) :



Ce comparateur s'appelle comparateur à hystérésis car la tension de sortie ne dépend pas que de la valeur de la tension v_e, mais aussi de son sens de parcours : si $v_e = 0$ V en valeurs croissantes, alors $v_s(t) = +V_{sat}$; mais si $v_e = 0$ V en valeurs décroissantes alors $v_s(t) = -V_{sat}$.

En représentant $v_s(v_e)$, on obtient :


$v_s[V]$
15
$v_e[V]$
−10
0
10
−15