

## Filtrage d'un signal périodique

### Introduction

En première année, vous avez étudié en particulier les **filtres linéaires** et leur réponse à un **signal sinusoïdal**.

Nous rappellerons dans un premier temps la distinction entre *systèmes linéaires* et *non-linéaires*, avant de focaliser notre étude sur les systèmes linéaires, qui sont les plus couramment utilisés et dont la réponse est plus facile à interpréter.

On rappelle également l'intérêt de limiter l'étude des filtres aux réponses à un signal sinusoïdal :

- la tension délivrée par le réseau est elle-même sinusoïdale (50 Hz)
- **Théorème de Fourier** : tout signal périodique de fréquence  $f$  peut être décomposé en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences  $f, 2f, 3f...$  Ainsi, si l'on connaît la réponse d'un filtre à tout signal sinusoïdal, on connaîtra sa réponse à tout signal périodique.

Dans ce chapitre, nous introduirons les outils nécessaires à la compréhension détaillée du filtrage d'un signal, par exemple dans la chaîne d'amplification ci-dessous.

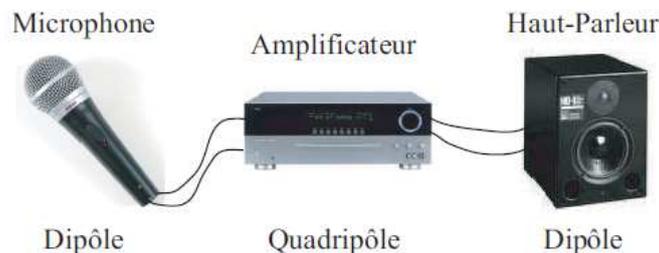


FIGURE 1 – Exemple de circuit électrique nécessitant l'emploi de filtres : une chaîne d'amplification.

## I Généralités sur les systèmes linéaires et non-linéaires

### I.1 Définition d'un système linéaire

A tout système physique à une entrée et une sortie peut être associé un *opérateur mathématique* (par exemple opérateur d'intégration, de dérivation, de troncature, de décalage...) qui transforme une grandeur d'entrée  $e(t)$  en grandeur de sortie  $s(t)$ .

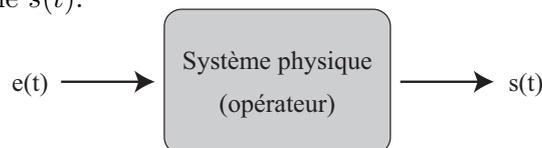


FIGURE 2 – Modélisation d'un système physique.

On dit que le système physique est *linéaire* si l'opérateur associé est lui-même linéaire, c'est à dire si **l'équation différentielle qui relie le signal de sortie  $s(t)$  au signal d'entrée  $e(t)$  est une équation différentielle linéaire**.

Un système linéaire vérifie donc en particulier le *principe de superposition* :

$$\text{si } \begin{cases} e_1(t) \longrightarrow s_1(t) \\ e_2(t) \longrightarrow s_2(t) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lambda e_1(t) + \mu e_2(t) \longrightarrow \lambda s_1(t) + \mu s_2(t) \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes.}$$

## I.2 Cas particulier des systèmes linéaires régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

### • Définition :

Dans le cadre du cours de MP, nous nous limiterons à l'étude de systèmes régis par des *équations différentielles linéaires à coefficients constants* de la forme :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

On rappelle que l'*ordre k du système* est défini par l'ordre de l'équation différentielle ( $k$  est le maximum de  $n$  et  $m$ ).

### • Stabilité

Un système est dit *stable* si le signal de sortie reste borné pour toute valeur d'entrée maintenue constante.

### Critère

On retiendra qu'un système est stable si les coefficients de son équation différentielle homogène sont tous de même signe pour des systèmes d'ordre 1 ou 2.

•  $\underline{n=1}$  :  $a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = 0$  ; la solution est du type :  $s(t) = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}t}$  ; cette solution converge si et seulement si  $a_0$  et  $a_1$  sont de même signe. On a déjà rencontré ce type d'équation différentielle lors de la charge d'un condensateur :  $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$ .

•  $\underline{n=2}$  :  $a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = 0$  ; on se contentera de remarquer que si  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont de même signe, on se ramène à une équation différentielle similaire à celle décrivant le régime transitoire d'un circuit RLC, et la solution est donc stable. On rappelle que l'équation homogène décrivant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série est donnée par :  $\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$ .

## I.3 Exemples de systèmes linéaires et non-linéaires

### a) Exemples en mécanique

• *Linéaire* : masse suspendue à un ressort en présence de frottements fluides à faible vitesse (force de frottement proportionnelle à  $v$ ).

• *Non-linéaire* : déplacement dans l'air d'un objet à grande vitesse (force de frottement proportionnelle à  $v^2$ ). Masse très lourde suspendue à un ressort (déformation du ressort). Frottements solides.

### b) Exemples en électronique

• *Linéaire* : montage électrique comprenant des résistances, des inductances, des capacités ou des amplificateurs opérationnels en régime linéaire.

• *Non-linéaire* : montage électrique comprenant des amplificateurs opérationnels en régime saturé, des multiplieurs, des diodes, ou des transistors.

### c) Exemples en électromagnétisme

• *Linéaire* : équations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène et isotrope.

• *Non-linéaire (hors-programme)* : relation entre l'aimantation et l'excitation dans un milieu magnétique (cycle d'hystérésis).

## II Réponse harmonique d'un système linéaire

### II.1 Régime sinusoïdal permanent

Considérons un système linéaire invariant à l'entrée duquel on applique un signal sinusoïdal  $e(t)$  de pulsation  $\omega$ , que l'on peut représenter en notation réelle ou complexe :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{R}e[\underline{e}] = \mathcal{R}e[\underline{E}e^{j\omega t}] \quad \text{avec} \quad \underline{E} = Ee^{j\varphi}$$

Or d'après les résultats énoncés en première année<sup>[1]</sup> : lorsqu'un système linéaire est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , après un régime qu'on appelle **transitoire**, on atteint le **régime permanent** pour lequel toutes les grandeurs oscillantes du système (élongation, vitesse, tension, courant...) sont également sinusoïdales, **de pulsation identique**  $\omega$ . Donc en régime permanent, on pourra toujours rechercher le signal de sortie sous la forme :

$$s(t) = S \cos(\omega t + \psi) = \mathcal{R}e[\underline{s}] = \mathcal{R}e[\underline{S}e^{j\omega t}] \quad \text{avec} \quad \underline{S} = Se^{j\psi}$$

### II.2 Spectre d'un signal

On rappelle que le **spectre**  $s(\omega)$  d'un signal  $s(t)$  correspond à la décomposition de celui-ci en ses différentes composantes sinusoïdales (ou harmoniques). On notera que la phase n'apparaît pas sur ce diagramme<sup>[2]</sup>. On donne deux exemples simples ci-dessous :

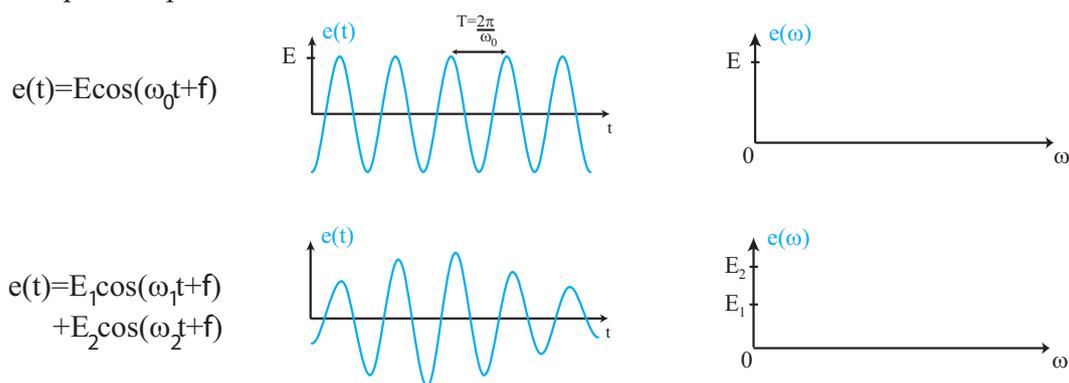


FIGURE 3 – Spectre de deux signaux simples.

Transition : Lorsque les signaux sont plus complexes, le spectre peut être obtenu grâce aux séries de Fourier ou à la transformée de Fourier.

1. On rappelle que cette propriété vient du fait que toute combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de même pulsation et de leurs dérivées est proportionnelle à une fonction sinusoïdale de même pulsation (on peut s'en convaincre facilement en utilisant Python par exemple) :

$$a \cos(\omega t + \varphi_a) + b \cos(\omega t + \varphi_b) = c \cos(\omega t + \varphi_c)$$

$$\frac{d}{dt} [a \cos(\omega t + \varphi_a)] = -a \sin(\omega t + \varphi_a) = -a \cos(\omega t + \varphi_a + \frac{\pi}{2})$$

2. Les pics sont donc positifs car un pic négatif correspondrait à une phase de  $\pi$  et est donc visible sur le diagramme de phase.

### a) Utilisation des séries de Fourier pour un signal $s(t)$ périodique de période $T_0$

Le signal s'écrit alors comme une superposition discrète, éventuellement infinie, de fonctions sinusoïdales.

On démontre, dans le cours de mathématiques, que toute fonction  $T_0$ -périodique bornée et continue par morceaux  $s(t)$  peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) dt \quad \text{valeur moyenne, avec } t_0 \text{ quelconque}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{pour } n \geq 1$$

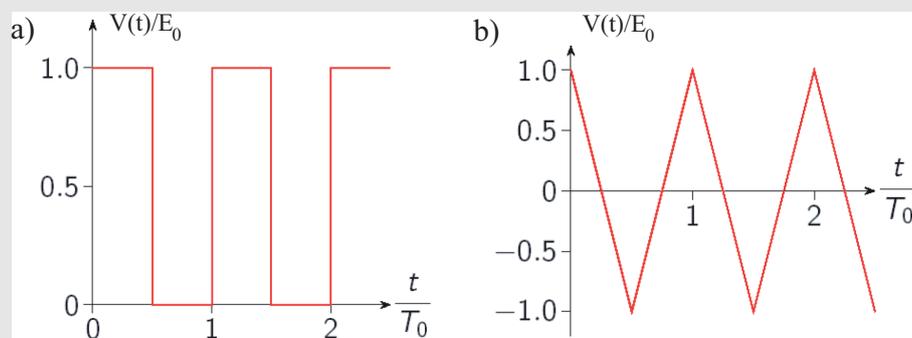
$$\varphi_n = -\text{Arctan} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad \text{pour } n \geq 1$$

### Définition

- $a_0$  est la valeur moyenne ou composante continue (i.e. correspondant à  $\omega_0 = 0$ ) de la fonction périodique.
- Le terme général
 
$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$
 est une fonction sinusoïdale, appelée harmonique d'ordre  $n$ .
- L'harmonique d'ordre 1 est appelée fondamental.
- $c_n$  est l'amplitude de l'harmonique  $n^{\circ}$ .

### Exemple

Calculer la décomposition en série de Fourier (DSF) des signaux créneaux et triangulaires représentés dans la figure ci-dessous.



On pourra commencer par essayer de deviner intuitivement leur spectre en utilisant l'application suivante ([simulation - lien cliquable](#)).

Exemple

Premier signal : signal créneau (ou carré)

$a_0 =$

$a_n =$

$b_n =$

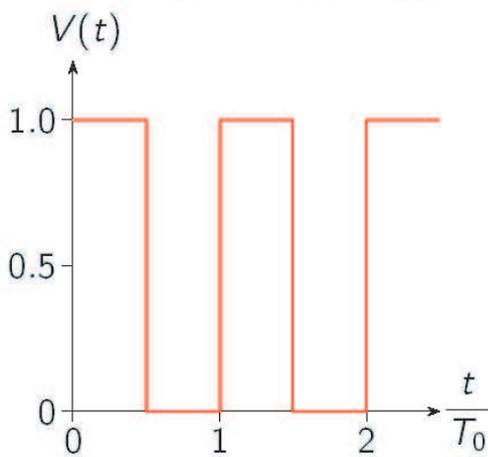
donc finalement :  $b_{2p+1} =$

Remarques :

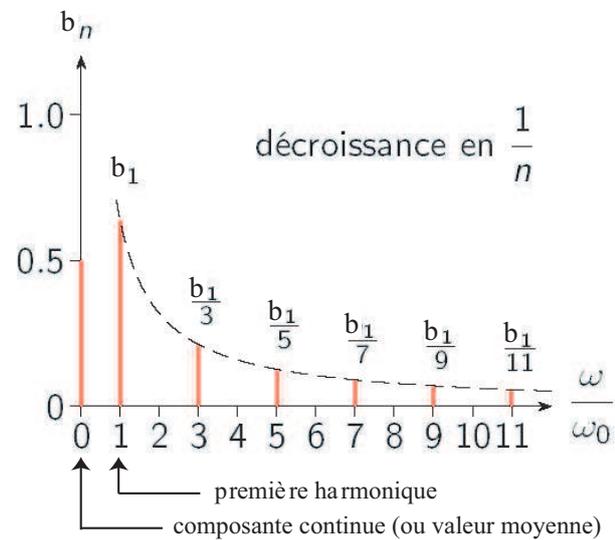
Analyse fréquentielle : le signal carré

Domaine temporel

Domaine fréquentiel



Tracés pour  $E_0 = 1 \text{ V}$ .



$$V(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega_0 t) \right)$$

FIGURE 4 – Analyse spectrale d'un signal "carré" périodique de pulsation  $\omega_0$ . Ce signal périodique peut s'écrire comme une série de Fourier, c'est à dire une somme discrète de cosinus et de sinus.

Simulation (*SignalCarreCours.py*) : besoin de beaucoup d'harmoniques car les fronts du signal sont très raides (fronts verticaux) + mise en évidence de pics (phénomène de Gibbs).

**Exemple**

*Second signal : signal triangulaire*

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} V(t) dt = \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-T_0/2}^0 E_0 \left( 1 + \frac{4t}{T_0} \right) dt + \int_0^{T_0/2} E_0 \left( 1 - \frac{4t}{T_0} \right) dt \right] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \left[ \int_{-T_0/2}^0 E_0 \left( 1 + \frac{4t}{T_0} \right) + \int_0^{T_0/2} E_0 \left( 1 - \frac{4t}{T_0} \right) \right] \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T_0} \right) dt \\ &= \frac{2E_0}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T_0} \right) dt - \frac{16E_0}{T_0^2} \int_0^{T_0/2} t \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T_0} \right) dt \end{aligned}$$

Avec une intégration par parties, on obtient :

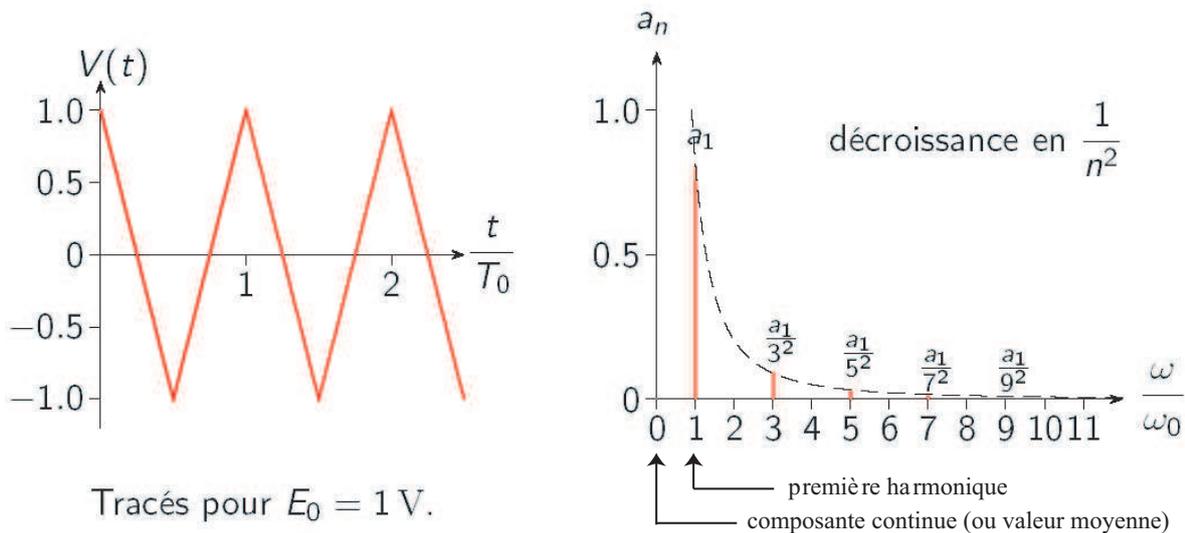
$$a_n = \begin{cases} \frac{8E_0}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{donc finalement : } a_{2p+1} = \frac{8E_0}{(2p+1)^2\pi^2}$$

Remarques :

**Analyse fréquentielle : le signal triangulaire**

Domaine temporel

Domaine fréquentiel



$$V(t) = \frac{8E_0}{\pi^2} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)\omega_0 t) \right)$$

FIGURE 5 – Analyse spectrale d'un signal "triangulaire" périodique de pulsation  $\omega_0$ . Là encore, ce signal périodique peut s'écrire comme une série de Fourier, c'est à dire une somme discrète de cosinus et de sinus.

Simulation (*SignalTriangleCours.py*) : besoin de moins d'harmoniques car les fronts du signal sont moins raides (le signal "ressemble" davantage à une sinusoïde).

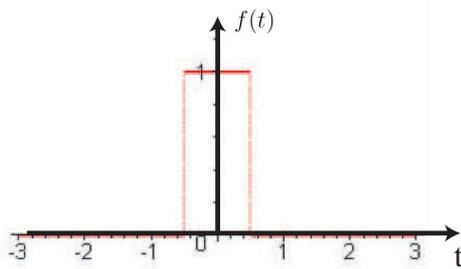
### b) Utilisation de la transformée de Fourier pour tout signal physique $s(t)$

Le signal s'écrit alors comme une superposition continue de fonctions sinusoïdales. Dans le cas d'une fonction périodique, le résultat obtenu est identique à celui obtenu avec les séries de Fourier. La transformée de Fourier est donc un outil plus puissant, utilisable pour tout signal physique<sup>3</sup> mais n'est pas au programme de MP :

$$\text{Transformée de Fourier : } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Intéressons nous simplement à l'exemple du signal "porte" qu'on rencontre souvent en optique diffractive. Ce signal n'est pas périodique et sa décomposition spectrale ne peut être obtenue à l'aide des séries de Fourier. Le résultat ci-dessous est obtenu à l'aide de la transformée de Fourier (en pratique, on utilisera en TP un algorithme de calcul rapide appelé FFT (pour *Fast Fourier Transform*)).

a) Représentation temporelle



b) Spectre

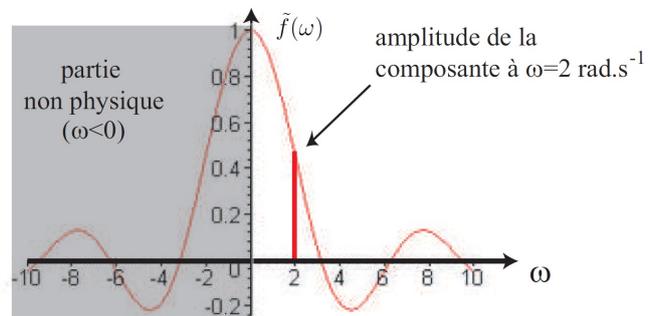


FIGURE 6 – Analyse spectrale d'un signal "porte" non périodique, obtenue à l'aide la transformée de Fourier.

### c) Bilan

On retiendra notamment que :

- Dans le spectre,  $\omega = 0$  correspond à la composante continue ou au régime permanent (i.e.  $t \rightarrow \infty$ ).
- Si la fonction temporelle est impaire, sa décomposition ne comporte que des fonctions sinus.
- Si la fonction temporelle est paire, sa décomposition ne comporte que des fonctions cosinus.
- Plus le signal temporel comporte des "pentes fortes", plus le spectre est "riche" en harmoniques élevées.

#### Remarque

En acoustique, ce sont les différentes harmoniques qui caractérisent le timbre des instruments de musique. En effet, les sons produits par ces derniers ne sont pas purs. Si le "La 440" produit par un diapason est pratiquement pur, celui généré par la guitare ou le piano est beaucoup plus fourni en harmoniques, ce qui explique la richesse des sons produit par ces instruments. Les vibrations étant produites de façon différente (poutre vibrante, cordes frottées ou frappées), il n'est pas surprenant que les sons produits soient également différents.

3. La transformée de Fourier n'est définie que pour des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$ . On ne peut donc par exemple pas calculer le spectre d'une fonction en échelon, car celle-ci est non intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, une telle fonction n'est pas physique car elle s'étend jusqu'à l'infini, ce qui impose une énergie infinie. Pour de tels cas limites, on utilise la transformée de Laplace.

### II.3 Caractérisation de la linéarité d'un système en régime harmonique

L'observation du spectre permet de tester la linéarité d'un système physique :

#### Propriété

*Si le spectre du signal de sortie  $s(\omega)$  possède des harmoniques de pulsations différentes de celles du spectre du signal d'entrée  $e(\omega)$ , alors le système est non-linéaire.*

La non-linéarité du système se manifeste donc par une *distortion harmonique*, c'est à dire l'apparition de nouvelles fréquences dans le signal de sortie. On parle aussi d'*enrichissement du spectre*.

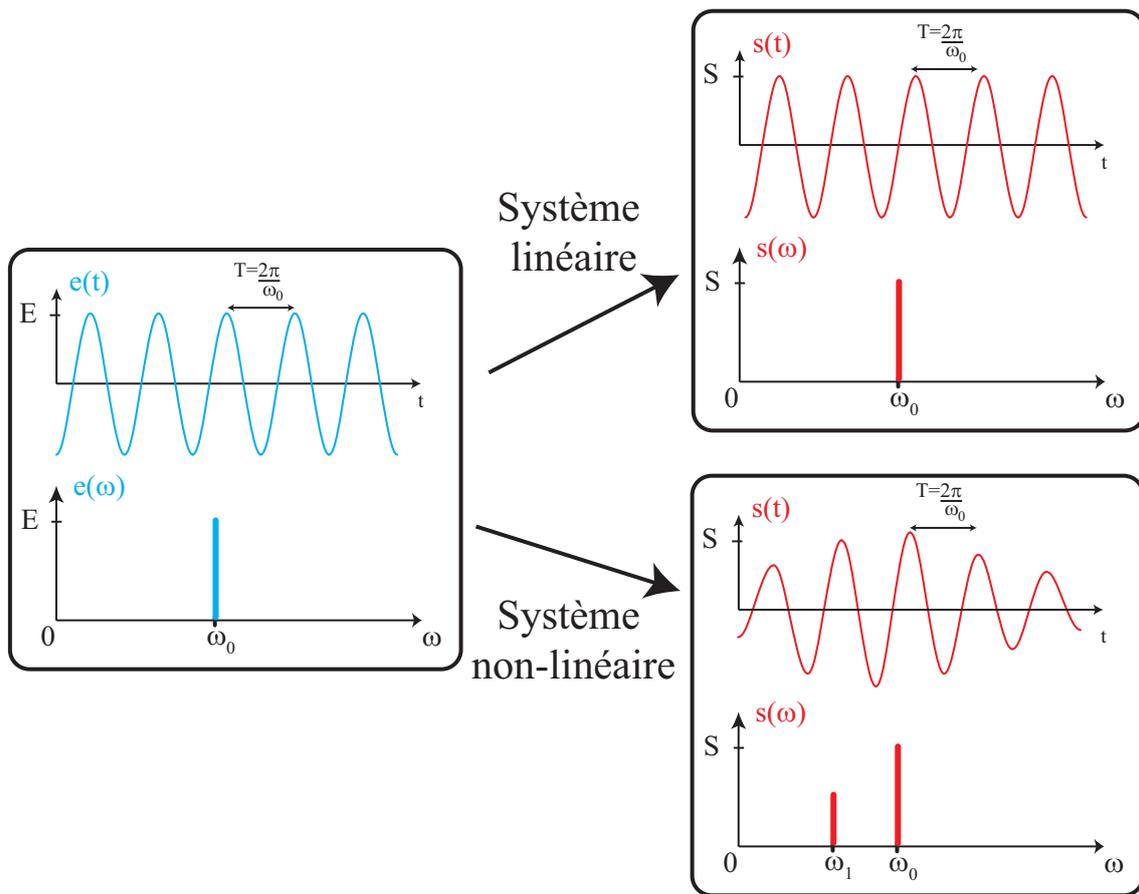


FIGURE 7 – Caractérisation de la linéarité d'un système en régime harmonique : un système linéaire ne rajoute pas d'harmoniques supplémentaires au signal d'entrée.

*Exemple :* Afin de bien comprendre l'influence d'une non-linéarité, nous illustrons sur la figure ci-dessous l'effet d'un multiplieur (composant non-linéaire) sur deux signaux d'entrée sinusoïdaux de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  différentes :

$$s(t) = e_1(t) \times e_2(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) \times E_2 \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} E_1 E_2 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

On parle d'enrichissement du spectre par *intermodulation* dans ce cas.

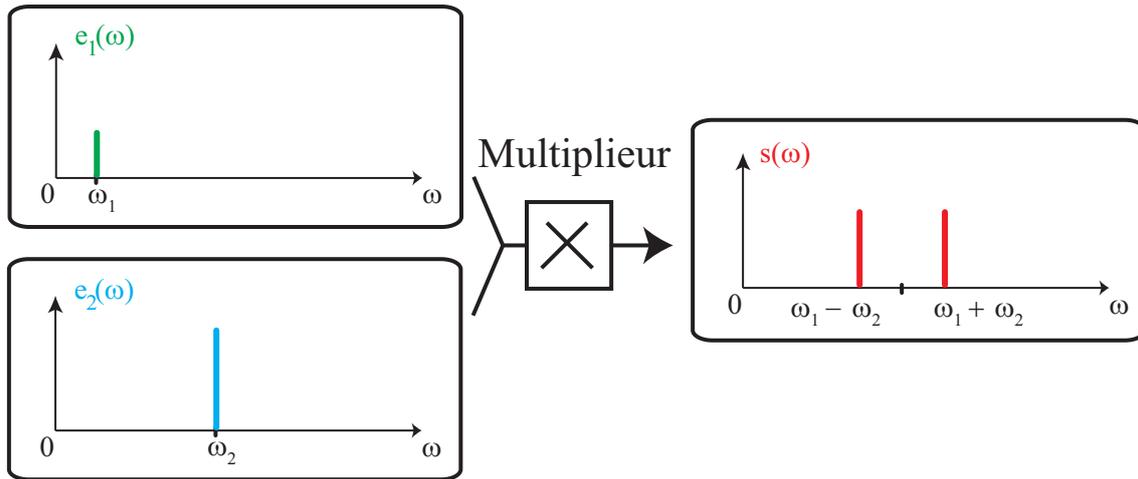


FIGURE 8 – Enrichissement du spectre par intermodulation avec un multiplieur. Le multiplieur est donc un composant non linéaire

*Transition* : Au lieu de nous limiter à l'étude de l'effet d'un système sur une seule composante sinusoïdale, cherchons à tracer une courbe représentant la réponse en régime harmonique d'un système linéaire à tout signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

## II.4 Fonction de transfert

On rappelle que la **fonction de transfert** ou **transmittance**  $\underline{H}$  est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{S}{E}$$

En utilisant les notations complexes dans l'équation différentielle linéaire à coefficients constants liant  $e(t)$  et  $s(t)$  définie précédemment, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{S}{E} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Dans le cas général,  $\underline{H}$  est donc le rapport de deux polynômes en  $j\omega$  et caractérise ainsi la **réponse fréquentielle** du système. On rappelle que le système est qualifié de **filtre** lorsque  $\underline{H}$  dépend effectivement de la pulsation  $\omega$ . On définit l'**ordre du filtre** comme le degré maximum des polynômes  $N(\omega)$  et  $D(\omega)$ .

Bien que chacun de ces polynômes puisse être de degré élevé, on montre ci-dessous qu'une telle fonction de transfert peut se décomposer en produit de fonctions de transfert du premier et second ordre. On pourra donc par la suite se limiter à l'étude de fonctions de transfert du premier et du second ordre sans restreindre la généralité de l'étude.

Remarque

Revenons maintenant sur l'expression de la transmittance opérationnelle, en notant  $p = j\omega$  :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Les polynômes  $N(p)$  et  $D(p)$  étant à coefficients réels, leurs racines sont réelles ou complexes conjuguées<sup>a</sup>. En regroupant les termes de la forme  $(p - p_k)(p - p_k^*)$  en  $p^2 - 2p\mathcal{R}e[p_k] + |p_k|^2$ , nous pouvons écrire les polynômes  $N(p)$  et  $D(p)$  sous la forme de produits de polynômes de degré inférieur ou égal à deux à coefficients réels.

La transmittance opérationnelle  $H(p)$  s'écrit alors sous la forme d'un produit de transmittances opérationnelles élémentaires  $H_k(p)$  d'ordre inférieur ou égal à deux :

$$H(p) = \prod_k H_k(p)$$

a. On se reportera au cours de mathématiques de première année.

## II.5 Diagramme de Bode

### • Gain et phase de la fonction de transfert

On rappelle que la fonction de transfert complexe peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

où  $G(\omega)$  est le **gain** du quadripôle, qui correspond au module de  $\underline{H}$  et au rapport des amplitudes des signaux de sortie et d'entrée :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \left| \frac{S}{E} \right|$$

$\varphi(\omega)$  est la **phase** du quadripôle, correspondant à l'argument de  $\underline{H}$  et au déphasage entre les signaux de sortie et d'entrée :

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}[\underline{H}(\omega)] = \varphi_S(\omega) - \varphi_E(\omega)$$

### • Echelle logarithmique

Lorsqu'un signal couvre une très grande gamme de fréquence (entre  $10^{-3}$  à 100 Hz par exemple), il est commode d'utiliser une échelle de fréquence logarithmique pour rendre compte des propriétés d'un système. Comme le montre la figure ci-dessous, cette échelle permet de ne pas "tasser" l'ensemble des résultats sur une partie du graphique.

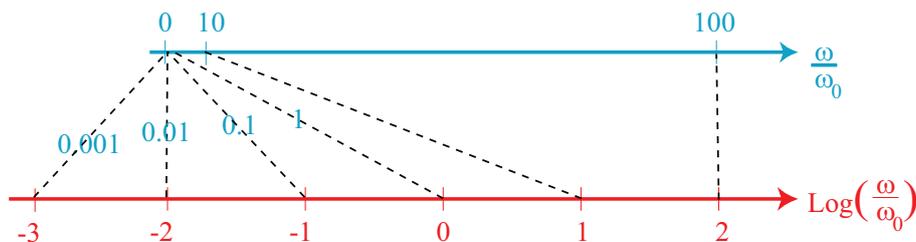


FIGURE 9 – Comparaison entre échelle linéaire et échelle logarithmique.

### • Gain en décibels

Il est également commode de représenter le gain sur une échelle logarithmique. Conventionnellement, on utilise pour cela le gain en **decibel**  $G_{dB}$  défini par<sup>a</sup> :

$$G_{dB} = 20 \log [G(\omega)]$$

On remarquera que le decibel (dB) est une unité sans dimension. Il est utile de connaître quelques points de repère :

- $G_{dB} = 20$  dB correspond à  $G = \frac{S}{E} = 10$ .
- $G_{dB} = 3$  dB correspond à<sup>5</sup>  $G = \frac{S}{E} \simeq \sqrt{2}$ .
- $G_{dB} = -3$  dB correspond à  $G = \frac{S}{E} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

• Diagramme de Bode :

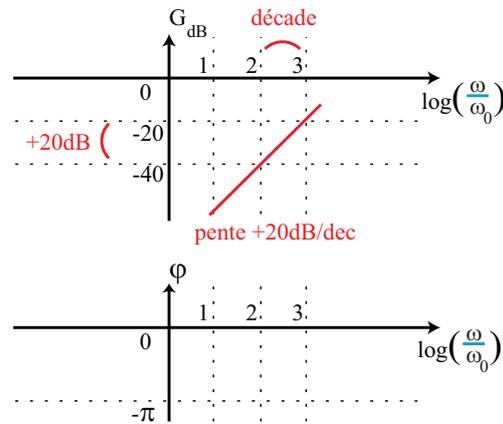
Le diagramme de Bode est constitué du tracé :

- du gain en decibel  $G_{dB}$  en fonction de  $\log(\omega)$
- de la phase  $\varphi$  en fonction de  $\log(\omega)$

Dans un diagramme de Bode, les pentes s'expriment en dB/décade, où une décade est définie par un facteur 10 en pulsation (ex :  $\omega \rightarrow 10 \omega$ ) :

- Si :  $G(\omega) \propto \omega \implies$  pente de  $+20$  dB/décade<sup>a</sup>
- Si :  $G(\omega) \propto \omega^2 \implies$  pente de  $+40$  dB/décade
- Si :  $G(\omega) \propto \frac{1}{\omega} \implies$  pente de  $-20$  dB/décade

a. Le gain est multiplié par 10 lorsque la pulsation est multipliée par 10, ce qui correspond à  $+20$ dB.



*Remarque* : On se contente en général de tracer le *diagramme asymptotique* du système qui consiste à étudier la fonction de transfert à très haute et très basse fréquence et à tracer les asymptotes de  $G_{dB}$  et  $\varphi$ . Ce tracé est en général suffisant pour connaître la nature du montage.

4. On notera que l'échelle **decibel** est également couramment utilisée en acoustique pour qualifier l'amplitude d'un son :  $I_{dB} = 10 \log \left( \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right)$ , où  $\mathcal{P}$  désigne la puissance acoustique reçue et  $\mathcal{P}_0$  une puissance acoustique de référence.

5. On le vérifiera à la calculatrice :  $3dB = 10 \log_{10} 2 = 3.01$  et  $\sqrt{2} = 1.414$ .

## II.6 Généralités sur le filtrage d'un signal

Les quatre figures ci-dessous illustrent en représentation temporelle et spectrale les 4 fonctions principales rencontrées lors du filtrage d'un signal : le filtrage passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande.

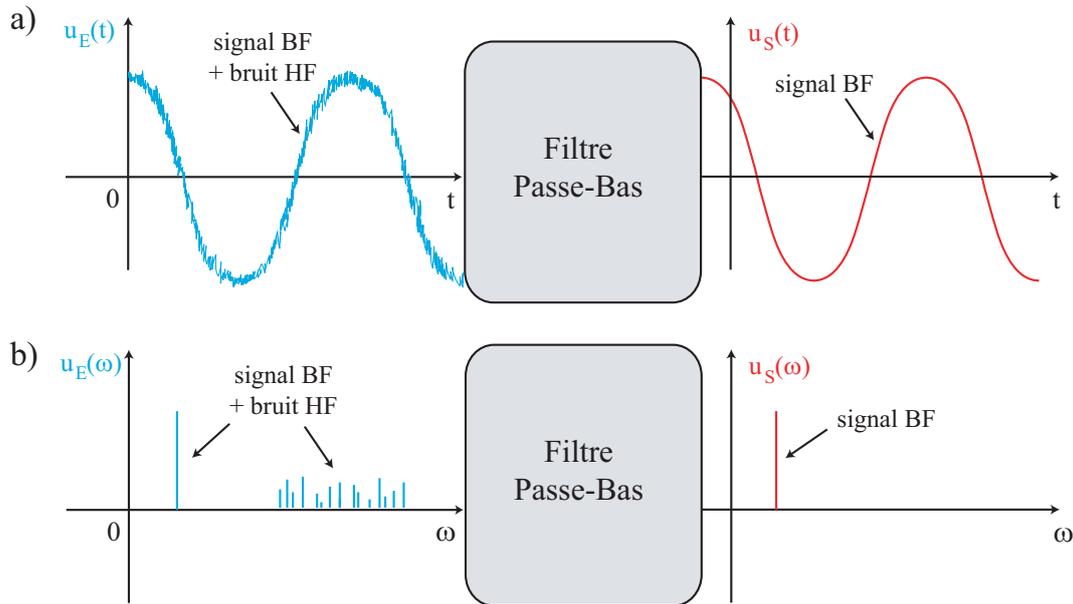


FIGURE 10 – Illustration de l'effet d'un filtre passe-bas sur un signal basse fréquence (BF) dégradé par un bruit haute fréquence (HF). a) Représentation temporelle. b) Représentation fréquentielle.

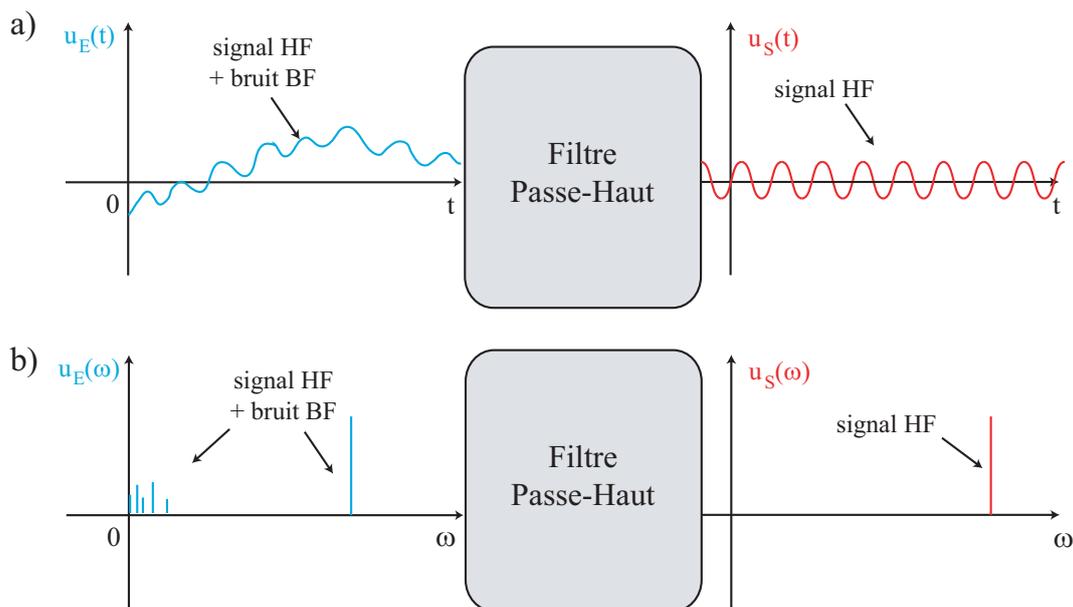


FIGURE 11 – Illustration de l'effet d'un filtre passe-haut sur un signal haute fréquence (HF) dégradé par un bruit basse fréquence (BF). a) Représentation temporelle. b) Représentation fréquentielle.

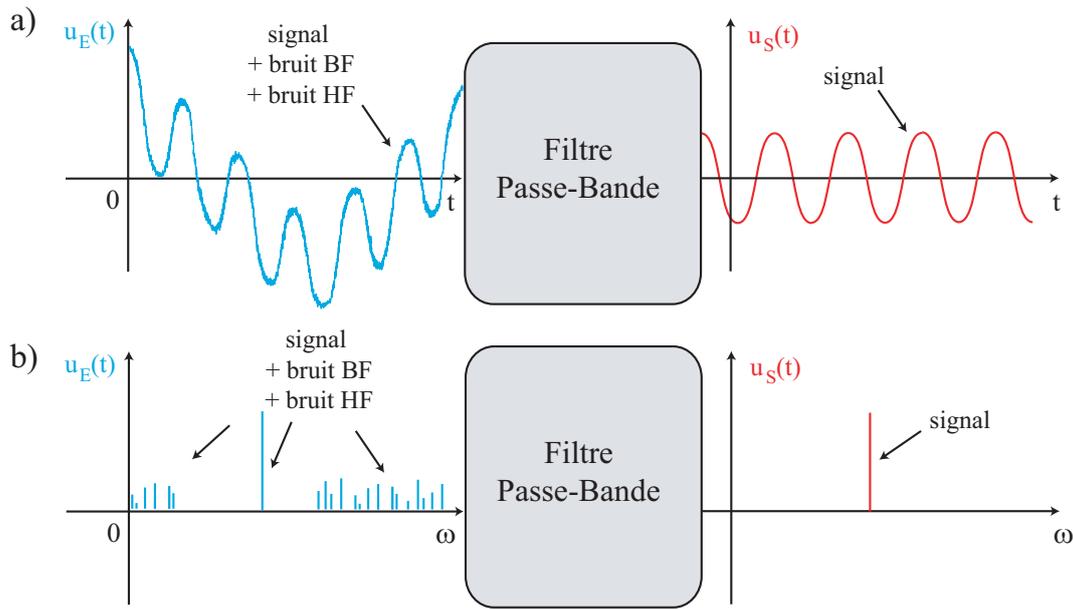


FIGURE 12 – Illustration de l'effet d'un filtre passe-bande sur un signal comportant à la fois des hautes fréquences (HF) et des basses fréquences (BF). a) Représentation temporelle. b) Représentation fréquentielle.

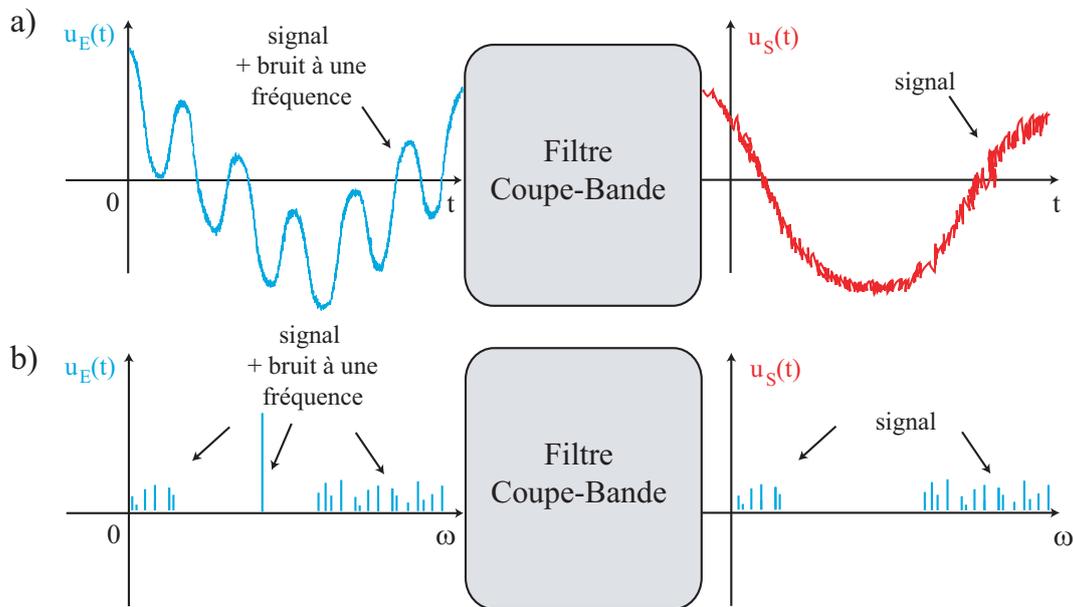


FIGURE 13 – Généralisation de la notion de filtrage pour une image : illustration de l'effet d'un filtre coupe-bande sur un signal comportant à la fois des hautes fréquences (HF) et des basses fréquences (BF) et un bruit à une fréquence donnée. a) Représentation temporelle. b) Représentation fréquentielle.

Photo originale

Avec filtre passe-bas

Avec filtre passe-haut

Avec filtre passe-bande



FIGURE 14 – Illustration de l'effet d'un filtrage spatial sur une image. Tout comme la fréquence sonore correspond à la périodicité dans le temps pour que le motif sonore se répète, la fréquence spatiale correspond à la périodicité spatiale pour que le motif de l'image se répète.

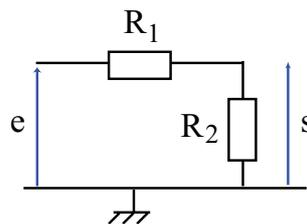
*Transition* : Puisque toute fonction de transfert peut se décomposer en produit de fonctions d'ordre inférieur ou égal à deux, nous allons maintenant nous contenter de rappeler les principales fonctions linéaires d'ordre zéro, un et deux, sur des exemples exclusivement en électronique, où  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$  seront des tensions.

## II.7 Réponse harmonique des systèmes d'ordre zéro

Le seul cas de système d'ordre zéro est la multiplication par une constante réelle :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = A$$

Une première méthode pour réaliser un tel filtre est un *pont diviseur de tension*, de gain :  $A = \frac{R_2}{R_2 + R_1}$



L'inconvénient est évidemment que ce filtre constitue un **atténuateur** puisque  $A = \frac{R_2}{R_2 + R_1} < 1$ .

Afin de réaliser un **amplificateur**, pour lequel  $A \geq 1$  à toute fréquence, il est nécessaire d'utiliser un circuit actif tel que des montages à Amplificateur Linéaire Intégré (ALI - voir annexe en fin de poly) : le montage amplificateur non inverseur ( $A > 1$ ), amplificateur inverseur ( $A < -1$ ), et le suiveur<sup>6</sup> ( $A = 1$ ). Ces trois montages font intervenir un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire et seront revus en TP.

6. Le suiveur permet de prélever une tension sans appeler de courant grâce à l'impédance d'entrée très élevée de l'ALI.

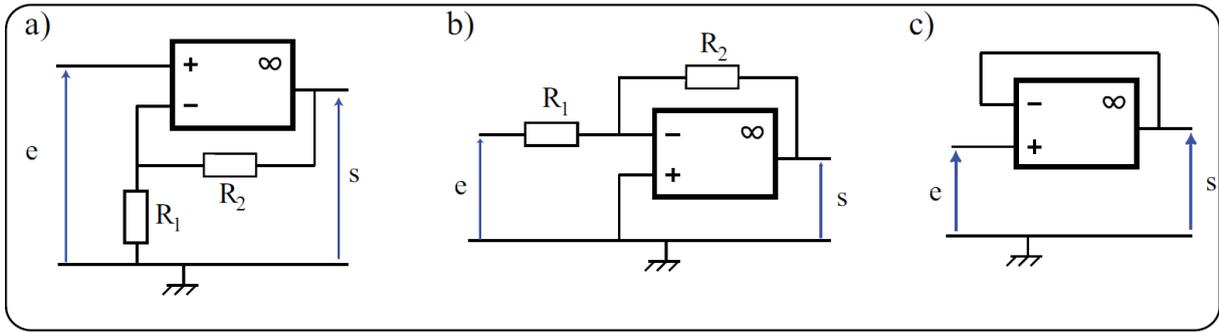


FIGURE 15 – Les trois principaux montages amplificateurs : a) non-inverseur ( $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ ), b) inverseur ( $A = -\frac{R_2}{R_1}$ ) et c) suiveur ( $A = 1$ ).

### II.8 Réponse harmonique des systèmes du premier ordre

Il existe trois principaux types de montages linéaires du premier ordre.

#### a) Passe-bas ou intégrateur

- Modèle théorique

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

où  $K$  est le gain maximal du filtre,  $\omega$  la pulsation, et  $\omega_c$  la **pulsation de coupure**<sup>7</sup>.

	$\underline{H}$	$G$	$G_{dB}$	$\varphi$
BF ( $\omega \rightarrow 0$ )				
HF ( $\omega \rightarrow \infty$ )				
$\omega = \omega_c$				

#### Remarque

Un filtre passe-bas du premier ordre peut également être qualifié d'**intégrateur**, car à haute fréquence ( $\omega \gg \omega_c$ ), la fonction de transfert est proportionnelle à  $\frac{1}{j\omega}$ , dont on rappelle que cela correspond à une intégration en régime sinusoïdal.

7. On rappelle que  $\omega_c$  est appelée **pulsation de coupure** et correspond à la valeur de la pulsation  $\omega$  qui vérifie :

$$\begin{cases} G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \\ G_{dB}(\omega_c) = G_{dB\max} - 3dB = 20\log(K) - 3dB \end{cases}$$

Le diagramme de Bode est donné ci-dessous dans le cas où  $K =$  et  $f_c =$  Hz.

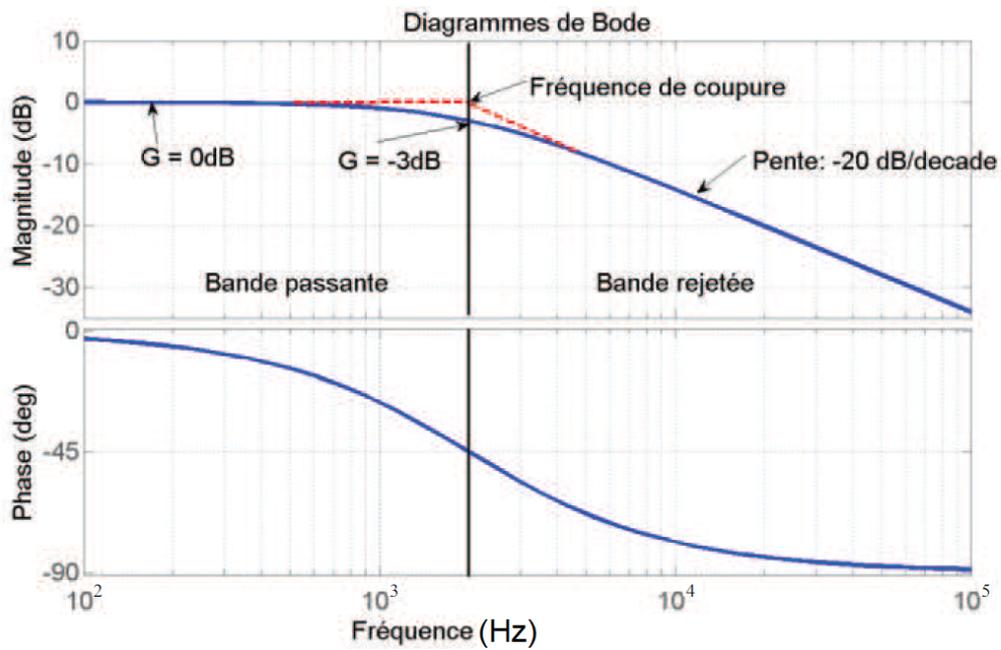


FIGURE 16 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre.

- Caractérisation expérimentale (Oscillo5)

Montage :

Choix des composants et remarques :

**b) Passe-haut ou dérivateur**

• Modèle théorique

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{K}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{jK\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

où  $K$  est le gain maximal du filtre, et  $\omega_c$  la **pulsation de coupure**.

	$\underline{H}$	$G$	$G_{dB}$	$\varphi$
BF ( $\omega \rightarrow 0$ )				
HF ( $\omega \rightarrow \infty$ )				
$\omega = \omega_c$				

Remarque

Un filtre passe-haut du premier ordre peut également être qualifié de **dérivateur**, car à basse fréquence ( $\omega \ll \omega_c$ ), la fonction de transfert est proportionnelle à  $j\omega$ , dont on rappelle que cela correspond à une dérivation en régime sinusoïdal.

Le diagramme de Bode est donné ci-dessous dans le cas où  $K = 1$  :

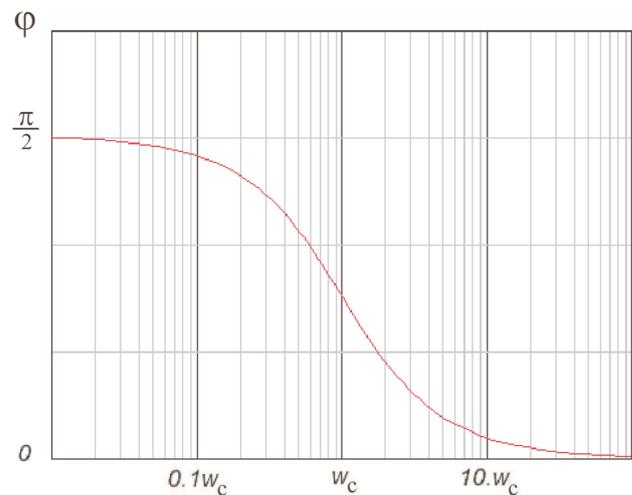
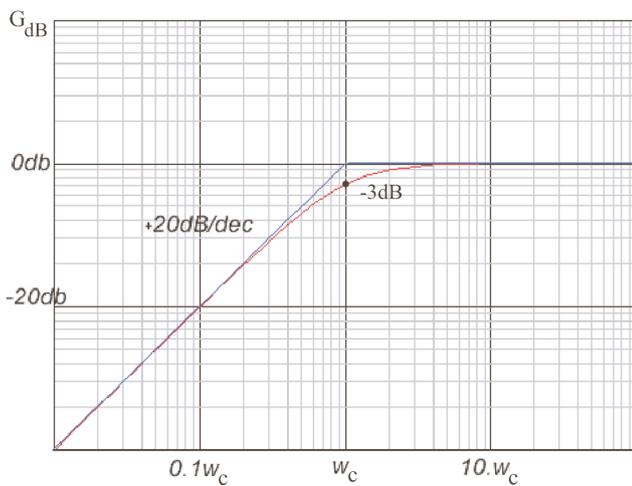


FIGURE 17 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre.

- Caractérisation expérimentale (Oscillo5)

Montage :

Choix des composants et remarques :

c) Déphaseur (voir DM1)

La fonction de transfert d'un filtre déphaseur du premier ordre est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

où  $\omega_c$  la **pulsation de coupure**.

## II.9 Réponse harmonique des systèmes du second ordre

Il existe 4 principaux systèmes du second ordre.

a) Filtre passe-bas du second ordre

- Modèle théorique

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{K}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où  $K$  est le gain à basse fréquence,  $\omega_0$  la **pulsation propre** du filtre et  $Q$  le **facteur de qualité** du filtre.

	$\underline{H}$	$G$	$G_{dB}$	$\varphi$
BF ( $\omega \rightarrow 0$ )				
HF ( $\omega \rightarrow \infty$ )				
$\omega = \omega_0$				

Le diagramme de Bode est donné dans la figure ci-dessous :

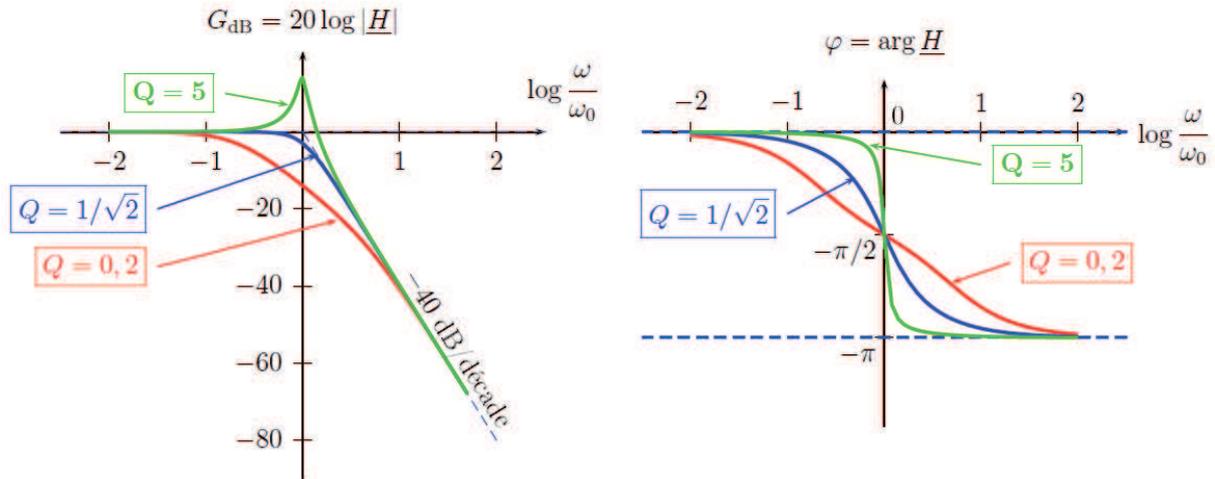


FIGURE 18 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du second ordre.

Remarque

|| Pour des facteurs de qualité faibles, il n'y a pas de résonance, et on préfère en général utiliser le facteur d'amortissement défini par  $2z = \frac{1}{Q}$ .

**Propriété**

- Sur le gain :
  
- Sur la phase :
  
- Caractérisation expérimentale (Oscillo5)

Montage :

Choix des composants et remarques :

**b) Filtre passe-haut du second ordre**

• Modèle théorique

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 K}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où  $K$  est le gain à basse fréquence,  $\omega_0$  la **pulsation propre** du filtre et  $Q$  le **facteur de qualité** du filtre.

	$\underline{H}$	$G$	$G_{dB}$	$\varphi$
BF ( $\omega \rightarrow 0$ )				
HF ( $\omega \rightarrow \infty$ )				
$\omega = \omega_0$				

Le diagramme de Bode est tout à fait analogue à celui du filtre passe-bas. La phase varie dans ce cas entre  $\pi$  à 0 au lieu de 0 à  $-\pi$ . Les différences avec le filtre d'ordre 1 sont là encore similaires.

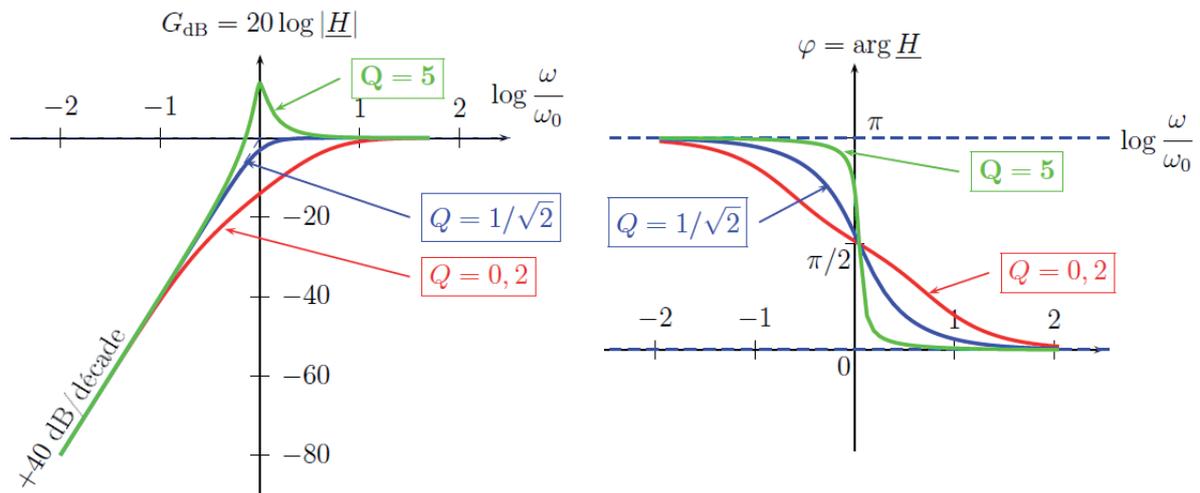


FIGURE 19 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du second ordre.

**Propriété**

• Sur le gain :

• Sur la phase :

- Caractérisation expérimentale (Oscillo5)

Montage :

Pour  $L = 50mH$  et  $C = 100nF$ , on obtient les courbes de gain et de phase suivantes en faisant varier la valeur de la résistance.

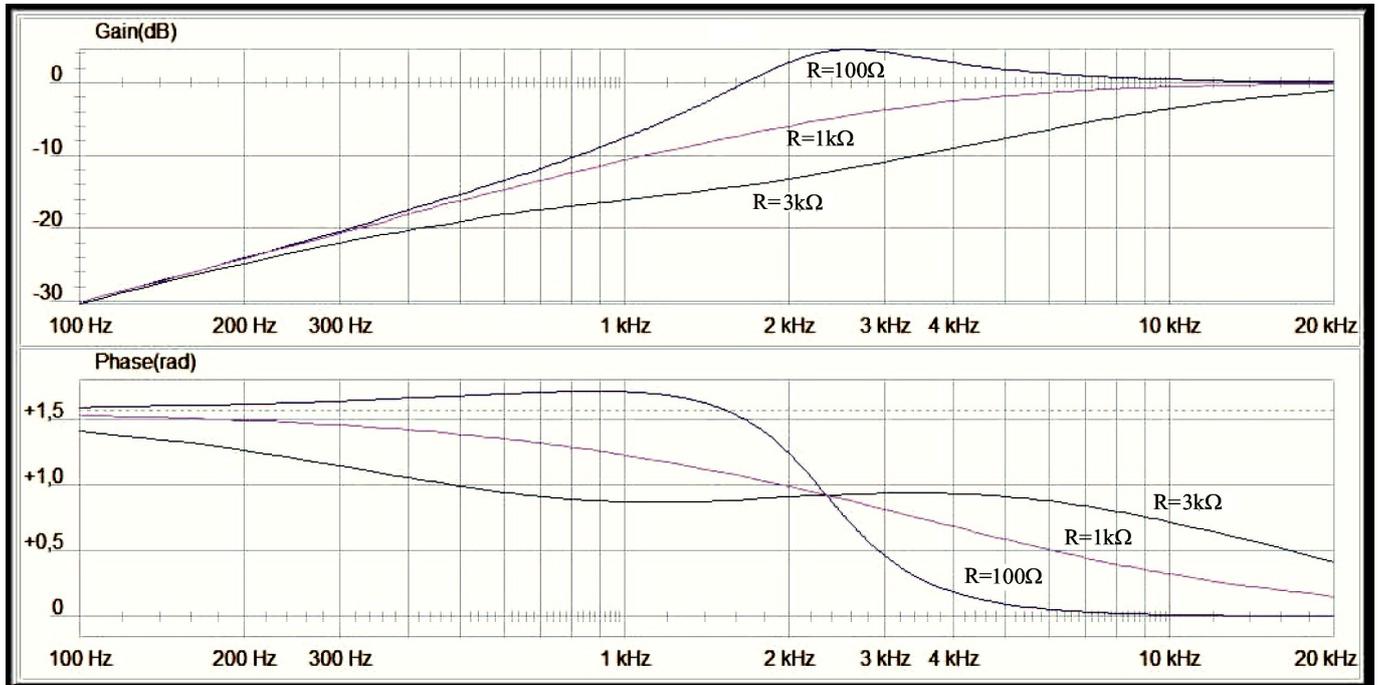


FIGURE 20 – Diagramme de Bode expérimental d'un filtre passe-haut du second ordre.

Remarque :

### c) Filtre passe-bande du second ordre

- Modèle théorique

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{K}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où  $K$  est proportionnel au gain maximal du filtre,  $\omega_0$  la **pulsation propre** et  $Q$  est le **facteur de qualité**.

On rappelle que  $Q$  est relié à la **bande passante**  $\Delta\omega$  du filtre par la relation :

$$\Delta\omega = \omega_{c1} - \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{Q}$$

où  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  sont les deux pulsations de coupure à  $-3dB$  du filtre.

	$\underline{H}$	$G$	$G_{dB}$	$\varphi$
BF ( $\omega \rightarrow 0$ )				
HF ( $\omega \rightarrow \infty$ )				
$\omega = \omega_0$				

Le diagramme de Bode est représenté ci-dessous pour  $K = 1$  :

### Propriété

- Sur le gain :

- Sur la phase :

- Caractérisation expérimentale (Oscillo5)

Montage :

Choix des composants et remarques :

### d) Filtre coupe-bande du second ordre

La fonction de transfert d'un filtre coupe-bande de second ordre est donnée par :

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où  $K$  est proportionnel au gain maximal du filtre,  $\omega_0$  la **pulsation propre** et  $Q$  est le **facteur de qualité**.

La figure ci-dessus présente un exemple de filtre coupe-bande du second ordre.

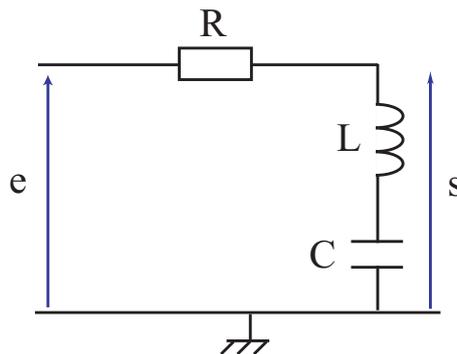


FIGURE 21 – *Filtre coupe-bande du second ordre : circuit RLC aux bornes de LC* ( $H(\omega) = \frac{1-LC\omega^2}{1+jRC\omega-LC\omega^2}$ ).

## II.10 Produit de fonctions de transfert

En utilisant la décomposition de la fonction de transfert en produit de fonctions élémentaires, on pourra donc tracer le diagramme de Bode d'un filtre dans le cas général, quel que soit son ordre.

Supposons par exemple qu'on décompose une fonction de transfert en produit de trois fonctions de transfert du premier ou du deuxième ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega) \times \underline{H}_3(j\omega)$$

On a donc

$$\begin{aligned} |\underline{H}(j\omega)| &= |\underline{H}_1| \times |\underline{H}_2| \times |\underline{H}_3| \\ G_{dB} &= G_{dB1} + G_{dB2} + G_{dB3} \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned}$$

On pourra donc facilement tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  si on sait tracer les diagrammes de Bode des fonctions de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$ ,  $\underline{H}_2(j\omega)$  et  $\underline{H}_3(j\omega)$ .

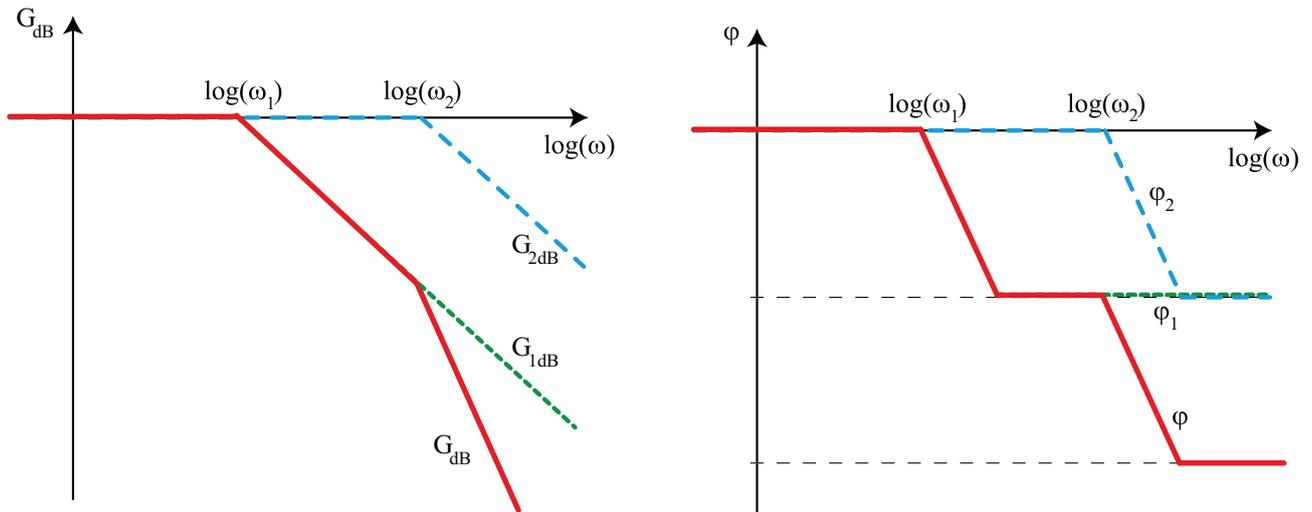


FIGURE 22 – Exemple de diagramme de Bode d'une fonction de transfert s'écrivant comme le produit de deux fonctions de transfert.

## Conclusion

Nous avons vu comment caractériser un filtre linéaire en régime harmonique permanent. On notera qu'il existe d'autres méthodes de caractérisation : la réponse à un échelon ou à une impulsion. Ces réponses dites *non-harmoniques* nécessitent l'emploi de la transformée de Laplace et seront abordées en cours de Sciences Industrielles.

Citons quelques exemples courants d'utilisation de filtres.

Exemple

Filtre ADSL

Le téléphone utilise des signaux électriques transitant par les fils téléphoniques et ayant une fréquence comprise entre 0 et 4 kHz environ. Or, les câbles utilisés permettent le transport de signaux à des fréquences allant jusqu'à 1 MHz. Le principe de l'ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line - Liaison numérique à liaison asymétrique) est d'exploiter cette gamme de fréquences inutilisée.

L'opérateur additionne (à l'aide d'un sommateur) dans la ligne téléphonique la tension relative au téléphone ( $f < 4$  kHz) et celle relative à l'internet ( $f > 35$  kHz, pour éviter le recouvrement des informations). Chez lui, l'utilisateur décompose ces deux signaux au moyen d'un filtre ADSL, composé de deux filtres :

- un filtre passe-bas permet de supprimer les fréquences supérieures à 4 kHz pour le bon fonctionnement du téléphone ;
- un filtre passe-haut permet de supprimer les fréquences inférieures à 4 kHz pour le modem ADSL.

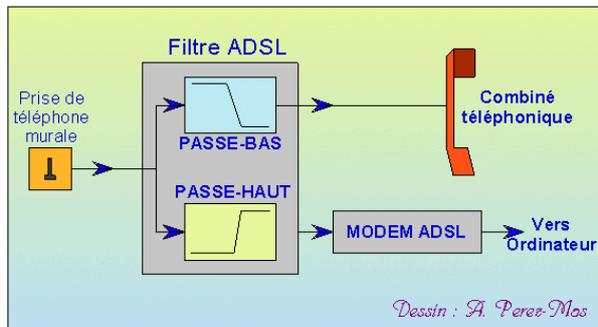
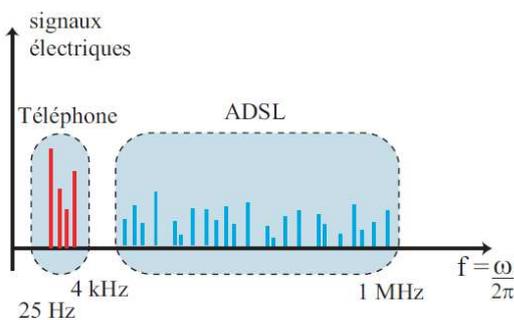


FIGURE 23 – (A gauche) Bandes de fréquences utilisables pour des communications électriques dans un fil de cuivre : téléphone à basse fréquence (25 Hz - 4 kHz) et ADSL à haute fréquence (26 kHz - 1 MHz). (A droite) Principe de fonctionnement d'un filtre ADSL.

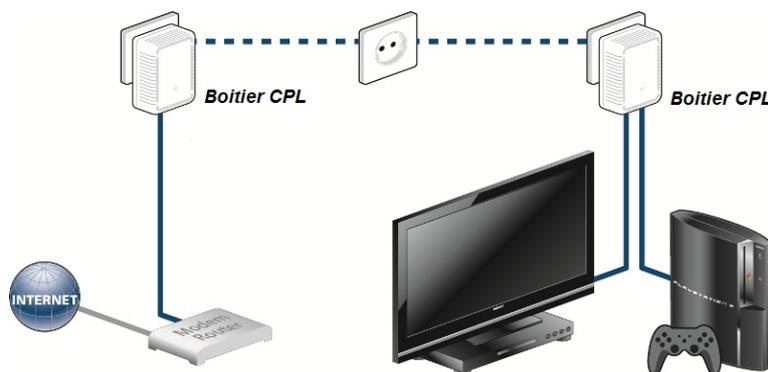


FIGURE 24 – L'ADSL est maintenant tombé en désuétude et largement remplacé par la fibre optique. On notera cependant qu'un principe analogue est maintenant couramment utilisé par exemple pour connecter une Box à un ordinateur ou à une télévision : les CPL (Courants Porteurs en Ligne), qui permettent de faire transiter de l'information à haute fréquence (téléphonie, internet, TV, hi-fi) dans les câbles électriques du réseau EDF, utilisés traditionnellement pour l'alimentation à 220V à 50Hz.

ExempleAppareil auditif (sonotone)

Afin qu'un appareil auditif soit adapté à l'oreille d'un patient, sa fonction de transfert doit être soigneusement calculée de façon à ce que l'appareil joue le rôle de filtre en amplifiant les fréquences que le patient entend mal, sans amplifier les autres, de façon à compenser sélectivement la déficience auditive du patient, comme le montre la figure ci-dessous. En pratique, de nombreux filtres en cascade sont nécessaires.

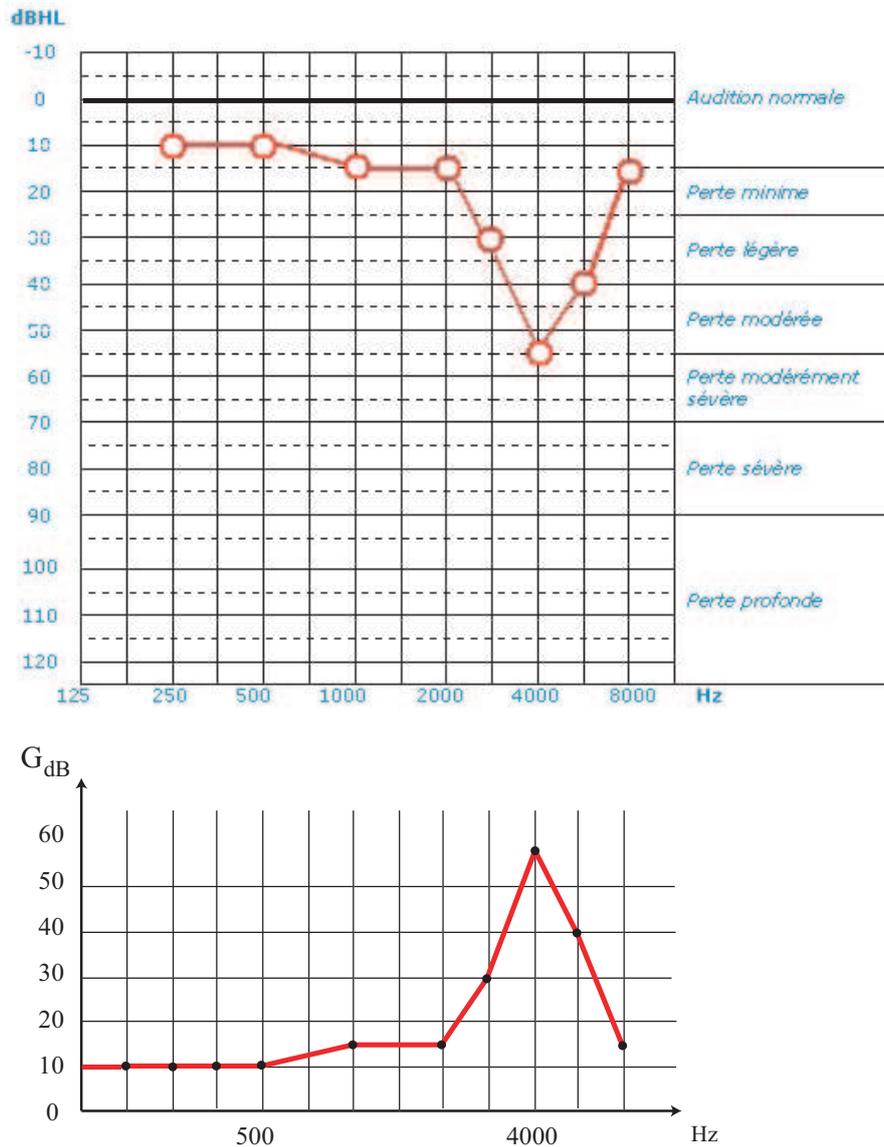
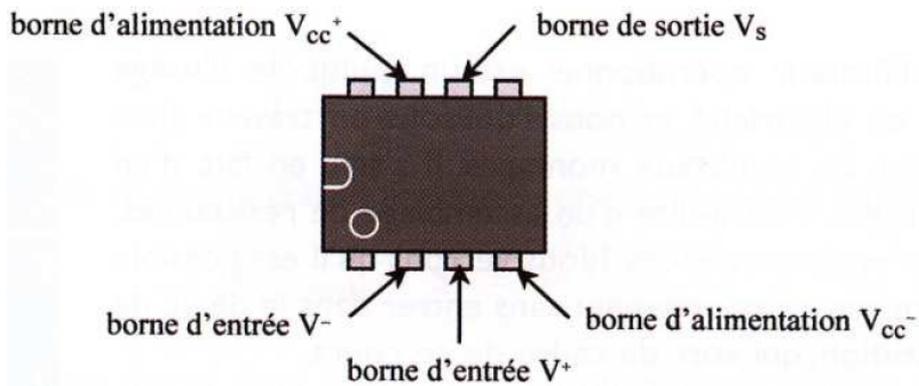


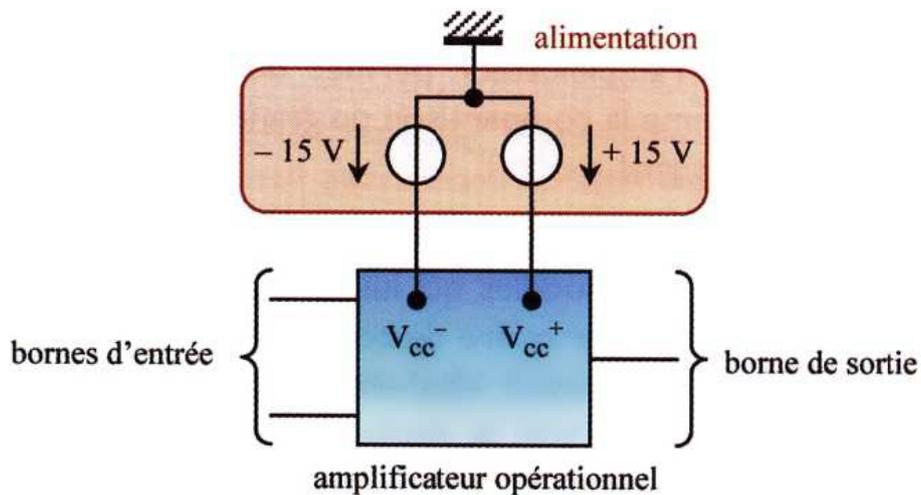
FIGURE 25 – Exemple d'audiogramme d'un patient entendant mal les fréquences autour de 4 kHz, et filtre adapté à la correction de ce défaut d'audition.

## Annexe I - Amplificateur linéaire intégré (ALI)

### Description



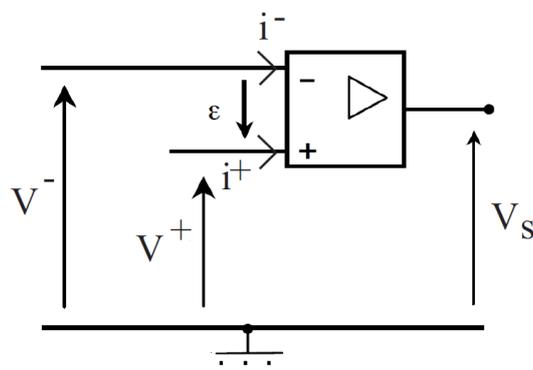
Les bornes  $V_{cc}^+$  et  $V_{cc}^-$  servent à l'alimentation de l'ALI, sans laquelle il ne fonctionne pas.



Un ALI possède deux bornes d'entrée (**inverseuse**, dont le potentiel est noté  $V^-$ , et **non inverseuse**, dont le potentiel est noté  $V^+$ ), et une borne de sortie, de potentiel  $V_s$ .

### Représentation conventionnelle

L'alimentation n'apparaît pas sur la représentation conventionnelle de l'ALI.

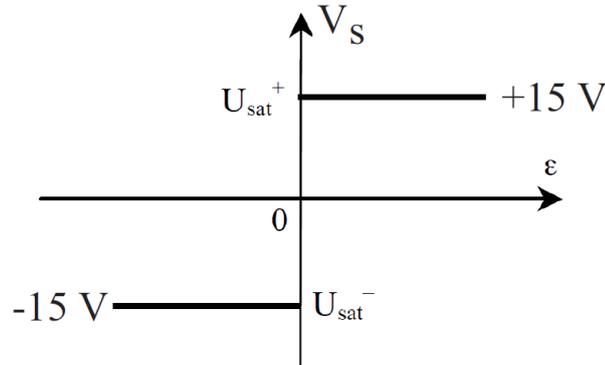


On appelle :

- $\varepsilon = V^+ - V^-$  la **tension différentielle d'entrée**
- $i^+$  et  $i^-$  les **courants de polarisation**

### Modèle de l'ALI idéal

- Dans l'hypothèse d'idéalité, les impédances d'entrée sont supposées infinies de sorte que les courants d'entrée des bornes inverseuse et non-inverseuse sont considérés comme nuls :  $i^+ = i^- = 0$
- La caractéristique  $V_s = f(\varepsilon)$  d'un ALI idéal est donnée ci-dessous (l'ALI ne peut délivrer une tension excédant celles délivrées par l'alimentation extérieure, de sorte qu'on note  $U_{sat}^+ = V_{cc}^+ = +15\text{ V}$  la tension de saturation haute et  $U_{sat}^- = V_{cc}^- = -15\text{ V}$  la tension de saturation basse).

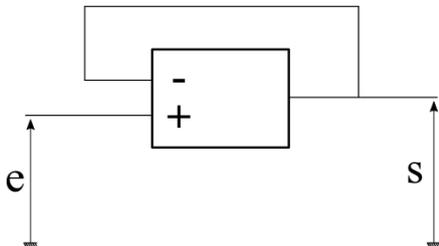


On distingue deux régimes de fonctionnement :

- En régime linéaire :  $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$  et  $U_{sat}^- < V_s < U_{sat}^+$ .
- En régime de saturation :  $V_s = U_{sat}^+$  si  $\varepsilon > 0$  et  $V_s = U_{sat}^-$  si  $\varepsilon < 0$ .

### Exemples de montages à ALI linéaires

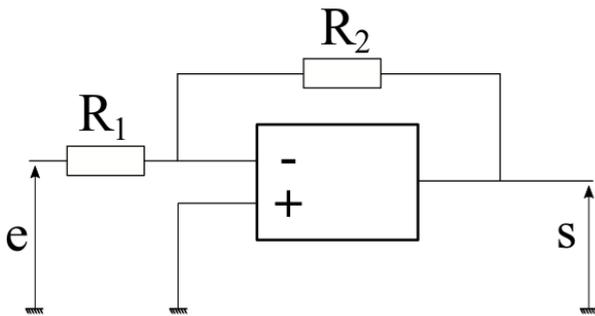
#### 1) Suiveur



Intérêt : réaliser une adaptation d'impédance ou mettre en cascade plusieurs filtres. Par exemple, si on veut réaliser un filtre de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{(1 + jx)^2}$  :

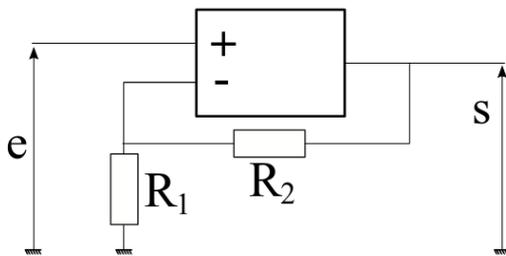
- 
-

## 2) Amplificateur inverseur



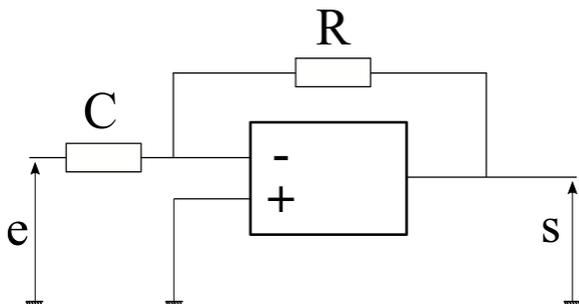
Intérêt : amplifier et inverser un signal si  $R_2 > R_1$ .

## 3) Amplificateur non inverseur



Intérêt : amplifier un signal si  $R_2 > R_1$ .

## 4) Dérivateur



Intérêt : dériver un signal. On peut ainsi par exemple transformer un signal triangulaire en signal créneau.

### III Annexe II - Comment extraire les paramètres d'un filtre d'ordre 1 ou d'ordre 2 ?

	$\bar{H}$	Détermination de $K$	Détermination de $\omega_c$ ou $\omega_0$	Détermination de $Q$
Passe-bas d'ordre 1				
Passe-haut d'ordre 1				
Passe-bas d'ordre 2				
Passe-haut d'ordre 2				
Passe-bande				

## Questions sur le cours - Filtrage d'un signal périodique

### I Généralités sur les systèmes linéaires et non-linéaires

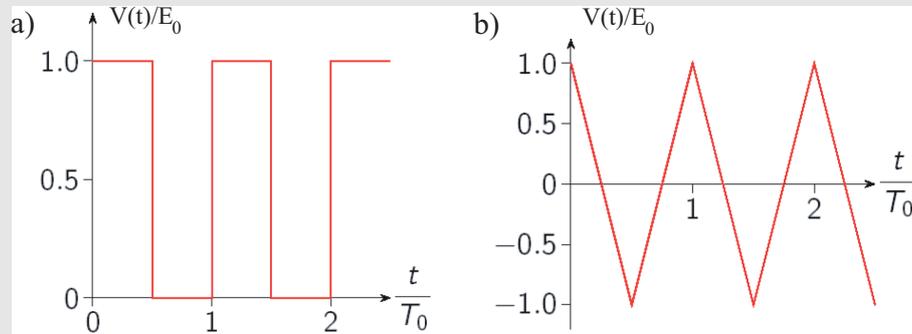
- Quelles sont les propriétés associées à un système linéaire ?
- Dans le cas d'un système linéaire régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, donner la forme de l'équation différentielle, définir son ordre. Énoncer un critère de stabilité pour de tels systèmes lorsqu'ils sont du premier ou du second ordre.
- Donner des exemples de systèmes linéaires et non-linéaires en mécanique, en électronique et en électromagnétisme.

### II Réponse harmonique d'un système linéaire

- Dans le cas d'un système linéaire alimenté par un signal sinusoïdal, sous quelle forme peut-on toujours chercher la sortie ?
- Expliquer la différence entre le régime transitoire et le régime permanent.
- Représenter les signaux suivants en représentation temporelle, ainsi que leur spectre associé :  $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$  et  $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ .

#### Exemple

Calculer la décomposition en série de Fourier (DSF) du signal créneau de la figure ci-dessous, et préciser qualitativement les caractéristiques de celles du signal triangulaire.



- Comment obtenir le spectre d'un signal périodique ? d'un signal non périodique ? Que témoigne la présence d'harmoniques élevées dans le spectre d'un signal ?
- Comment caractériser la linéarité d'un système physique ? Citer et détailler un exemple d'effet typiquement non-linéaire.
- Définir la fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire. Dans quel cas le système considéré est-il un filtre ? On définira alors son ordre. Pourquoi peut-on se limiter sans restriction à l'étude des fonctions d'ordre inférieur ou égal à 2 ?
- Quel est l'intérêt du diagramme de Bode et quelle est sa définition ? À quoi correspondent un gain de  $-3dB$ ,  $3dB$  et  $20dB$  ? Quelle est la pente des asymptotes de  $G_{dB}$  si  $G(\omega) \propto \omega; \omega^2; \frac{1}{\omega}$  ?
- Illustrer schématiquement l'effet des filtres suivants à la fois en représentation temporelle et fréquentielle : passe-bas, passe-haut, passe bande et coupe bande.

- Donner la fonction de transfert associée à des systèmes linéaires d'ordre zéro.
- Donner la fonction de transfert associée aux trois systèmes linéaires d'ordre un. Définir la pulsation de coupure, et justifier qu'on puisse qualifier ces systèmes d'intégrateur, dérivateur ou déphaseur. On donnera un exemple concret de chaque filtre.
- Donner la fonction de transfert associée aux quatre systèmes linéaires d'ordre deux. Définir la bande passante. On donnera un exemple concret de chaque filtre.
- Expliquer comment tracer simplement le gain et la phase de filtres d'ordre supérieur à 2.
- Expliquer le principe de fonctionnement des filtres ADSL, des prises CPL et des appareils auditifs.

## Annexe I - Amplificateur linéaire intégré (ALI)

- Donner la représentation conventionnelle d'un ALI et rappeler le modèle idéal de l'ALI et ses caractéristiques en distinguant les fonctionnements en régime linéaire et saturé.
- Donner un exemple de montage simple à ALI fonctionnant en régime linéaire. Calculer sa fonction de transfert et donner son intérêt.

## Annexe II - Comment extraire les paramètres d'un filtre d'ordre 1 ou d'ordre 2 ?

- Remplir le tableau de la page suivante.

### Extrait du programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2.1. Signaux périodiques</b>	
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : relier la décomposition spectrale et l'allure du signal dans le domaine temporel.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur.  <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique.</b>

	$\bar{H}$	Détermination de $K$	Détermination de $\omega_c$ ou $\omega_0$	Détermination de $Q$
Passe-bas d'ordre 1				
Passe-haut d'ordre 1				
Passe-bas d'ordre 2				
Passe-haut d'ordre 2				
Passe-bande				