Correction - DM n°2 - Électronique analogique et signaux numériques

1 Etude expérimentale d'un filtre

1) On mesure sur l'oscillogramme (CH1) :

- Amplitude = 2,5 V
- $T = 2\,ms \Rightarrow f = \frac{1}{2\cdot 10^{-3}} = 500\,Hz$
- Valeur moyenne = 0 V.

2) $\underline{H} = \frac{-2jxH_0\xi}{1+2j\xi - x^2}$ $\xrightarrow{x\to 0} 0$; $\xrightarrow{x\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ passe-bande d'ordre 2 a priori

On peut déterminer la bande passante en utilisant la définition :

$\Delta f = f_{c_2} - f_{c_1}$ où $f_{c_{1,2}}$ tq $G(f_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

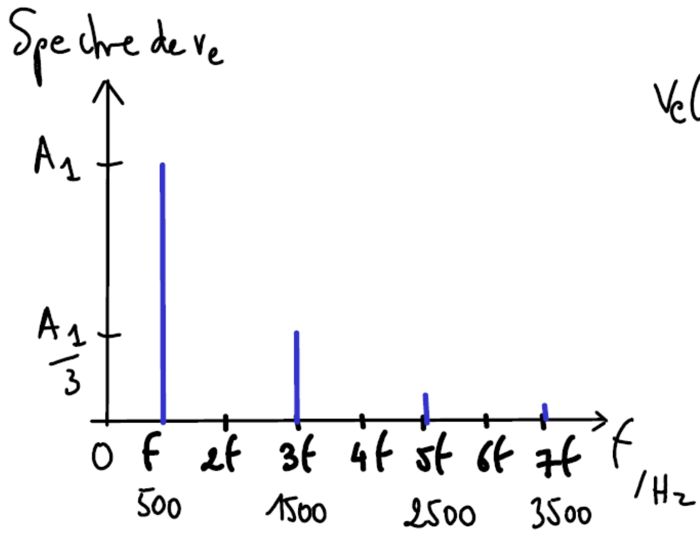
et on peut aussi mettre la fonction de transfert sous forme canonique et utiliser $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ ou $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

avec $\underline{H} = \frac{K}{1+jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \left(\times j\frac{x}{Q}\right) = \frac{j\,K\,x/Q}{j\frac{x}{Q} - x^2 + 1}$

donc par identification, $2\xi = \frac{1}{Q}$ et $H_0 = -K$ (déphasage "inhabituel")

Finalement $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = f_0 \times 2\xi = 1500 \times 2 \times 0{,}05 = \boxed{150\,Hz}$

3) Le signal créneau est impair, et sa décomposition sur les cosinus qui sont des fonctions paires est donc nulle : $\boxed{B_k = 0}$, $\forall k$



$$v_e(t) = A_1 \sin(2\pi f t) + \frac{A_1}{3}\sin(2\pi \times 3 f t) + \frac{A_1}{5}\sin(2\pi \times 5 f t) + \dots$$

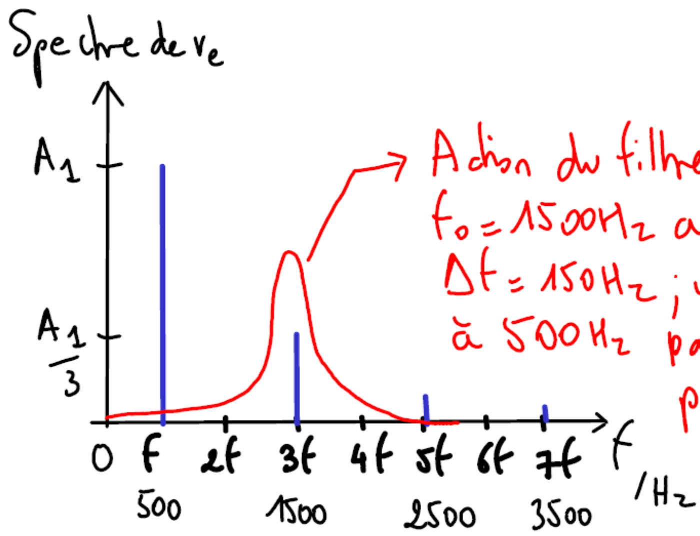
4) Si on approxime le signal de sortie à une seule sinusoïde, on peut écrire :

$v_s(t) = V_{s_{max}} \sin(\omega t + \varphi)$ avec : $V_{s_{max}} = 1\,V$

$f_s = \frac{\omega}{2\pi} = 1500\,Hz$ (3 périodes du signal pour une seule du créneau).

On peut ajouter que la phase φ est égale à π d'après l'expression de la fonction de transfert $(K = -H_0)$.

5) Si on prend en compte les 2 principales sinusoïdes



Action du filtre passe-bande centré sur $f_0 = 1500\,Hz$ avec une bande passante $\Delta f = 150\,Hz$; une petite partie du pic à 500 Hz passe, ce qui se manifeste par une petite modulation du signal à 1500 Hz justement à 500 Hz.

On peut noter qu'il n'y a pas de modulation à la fréquence 2500 Hz car l'amplitude du signal créneau à cette fréquence est 9 fois plus faible.

L'amplitude de la modulation à 500 Hz vaut environ 0,2 V.
Essayons de retrouver cette valeur à partir de la fonction de transfert :

$$V_s(t) = A_1 G(500\,\mathrm{Hz}) \cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{A_1}{3} G(1500\,\mathrm{Hz}) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

or $G(1500\,\mathrm{Hz}) = |K| = H_0 = 2$

et $G(500\,\mathrm{Hz}) = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{500}{1500} - \frac{1500}{500}\right)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\times 0{,}05}\right)^2\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}} \simeq 7{,}5 \cdot 10^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{A_1}{3} G(1500)}{A_1 G(500)} = \frac{2}{3 \times 7{,}5\cdot 10^{-2}} = 8{,}9$$

On peut comparer à la valeur expérimentale : $\dfrac{1}{0{,}2} = 5$

accord partiel seulement car lecture précise difficile.

2 Phénomène d'aliasing sur une vidéo

Afin de déterminer la vitesse de la voiture lorsque les roues semblent ne pas tourner, plusieurs constatations et estimations d'ordres de grandeurs doivent être faites :

* la roue est apparemment immobile alors que la voiture est en mouvement, (1) puis elle semble tourner à l'envers, (2) puis le sens de rotation devient confus, (3) puis elle tourne vers l'avant, (4) avant l'arrêt complet de la voiture. On peut donc distinguer 4 phases.
* On peut estimer le diamètre de la roue à $D = 50\,cm$.
* La vidéo a été réalisée avec une caméra prenant 30 images par seconde.
* La jante de la roue comporte 5 branches, et on pourra observer une apparente immobilité sur la vidéo si la roue tourne de $\frac{1}{5}$ de tour, $\frac{2}{5}$ de tour, $\frac{3}{5}$ de tour... pendant $\frac{1}{30}$ ème de seconde. (ceci n'est vrai que parce que les rayons de la jante sont identiques).
* Comme il n'y a pas d'autre phase d'immobilité entre la première phase d'immobilité et l'arrêt de la voiture, on peut en déduire directement que la roue tourne d'$\frac{1}{5}$ème de tour en $\frac{1}{30}$ème de seconde.

On peut finalement en déduire très simplement que la voiture a avancé de $\frac{1}{5}$ème de la circonférence de la roue en $\frac{1}{30}$ème de seconde, d'où :

$$V = \frac{\frac{\pi d}{5}}{1/30} = \pi \times \frac{0{,}5 \times 30}{5} = 9{,}4\ m.s^{-1} = \underline{34\ km.h^{-1}}.$$

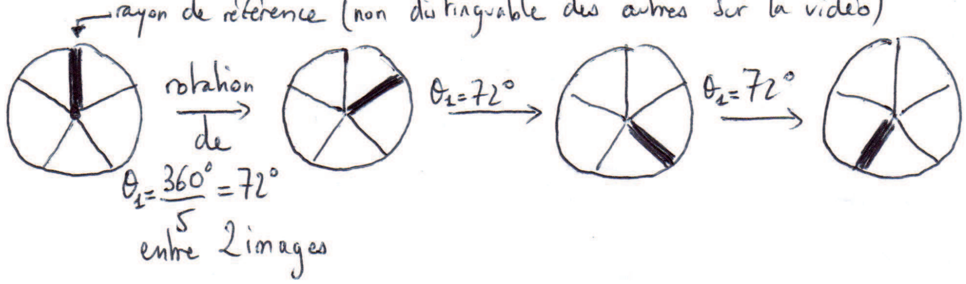
On notera que cet ordre de grandeur est tout à fait cohérent avec l'impression de vitesse modérée de la voiture au début de la vidéo, qui parcourt bien une dizaine de mètres en 1 seconde (d'après l'échelle des repères visuels en arrière plan).
On peut remarquer qu'une étude du type pointage vidéo ne peut pas être faite simplement car la voiture décélère, mais qu'elle peut néanmoins donner le bon ordre de grandeur.

<u>Remarques</u> : Le phénomène observé ici correspond à un repliement de spectre (ou aliasing) à cause d'un sous-échantillonnage. Le critère de Shannon ($f_0 < \frac{f_e}{2}$) n'est pas respecté ici. Ce critère devrait plutôt être écrit en terme de pulsations : $\omega_0 < \frac{\omega_e}{2}$ où ω_e correspond à la pulsation des "flashs" de la vidéo, et où ω_0 est la pulsation du phénomène périodique, qui vaut ici $\omega_0 = 5\omega_{roue}$ car on retrouve une roue apparemment inchangée tous les $1/5^{\text{ème}}$ de tour. Lors de l'immobilité, on a $\underbrace{\omega_0 = 5\omega_{roue} = \omega_e > \frac{\omega_e}{2}}_{\text{critère de Shannon non vérifié.}}$

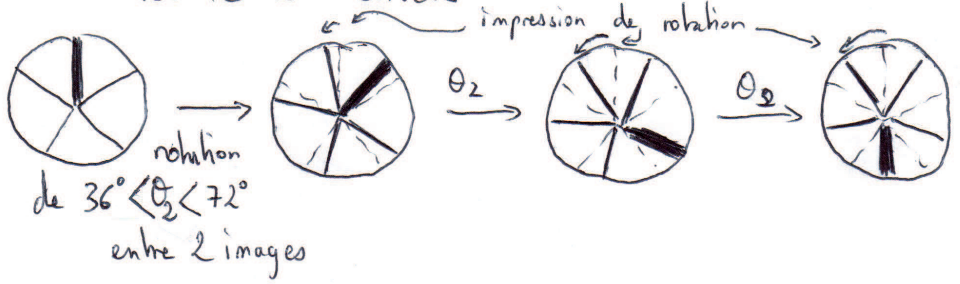
Le repliement de spectre est observé à la pulsation $\omega_0 - \omega_e = 0$, donc autour de la pulsation nulle, c'est à dire l'immobilité.
On notera qu'un même phénomène d'immobilité aurait pu être observé avec un échantillonnage encore plus défavorable, lorsque $\omega_0 = 2\omega_e$ (la roue tourne de $2/5^{\text{ème}}$ de tour entre 2 images).

Essayons maintenant d'interpréter les 4 phases de l'observation faite au début :

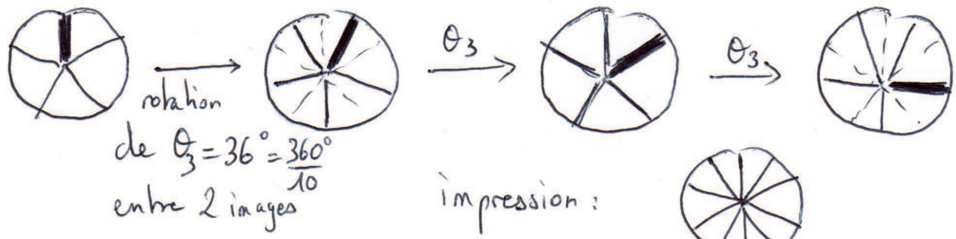
Phase 1 : impression d'immobilité de la roue



Phase 2 : la voiture ralentit – impression que la roue "tourne à l'envers".



Phase 3 : la voiture ralentit encore – la roue ne semble ni tourner vers l'avant ni vers l'arrière – impression que la roue comporte davantage de pales (10).



Phase 4 : la voiture ralentit encore davantage et s'approche de l'arrêt – impression de rotation vers l'avant (réel)