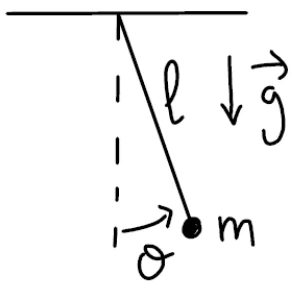
Correction - DM n°1 - Analyse dimensionnelle et électrocinétique

1 Pendule simple - analyse dimensionnelle

1)



Les paramètres physiques qui peuvent a priori intervenir dans l'expression de la période T sont : m, ℓ et g

$$\Rightarrow T = k\, m^{\alpha} \ell^{\beta} g^{\gamma}$$

$$\Rightarrow [T] = [m]^{\alpha}[\ell]^{\beta}[g]^{\gamma}$$

$$\Rightarrow T = M^{\alpha} L^{\beta} (LT^{-2})^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -2\gamma \\ 0 = \alpha \\ 0 = \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T = k\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

2) On applique le théorème de la puissance mécanique au pendule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

↖ pas de forces dissipatives

or $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \ell \dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$

$$\Rightarrow m\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

On obtient un oscillateur harmonique de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

dans le cadre des petites oscillations.

$\Rightarrow k = 2\pi$.

3) a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} \simeq \boxed{2\,s}$ ce qui semble raisonnable pour un pendule de 1 m.

b) i) cf Notebook 563a-1759230

ii) $g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$

donc $u(g) = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial \ell}\right)^2 u(\ell)^2}_{(1)} + \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u(T)^2}_{(2)}}$

or $\frac{\partial g}{\partial \ell} = \frac{4\pi^2}{T^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial T} = -2\times\frac{4\pi^2\ell}{T^3}$

$\Rightarrow \frac{(1)}{(2)} = \left(\frac{\frac{\cancel{4\pi^2}}{T^2}u(\ell)}{2\frac{\cancel{4\pi^2}\ell}{T^3}u(T)}\right)^2 = \frac{T^2u(\ell)^2}{4\ell^2u(T)^2} \simeq \frac{4\times10^{-4}}{4\times1\times10^{-2}} \simeq 10^{-2}$

Le second terme est donc environ 100 fois plus grand que le premier, et on peut donc négliger l'incertitude sur la longueur dans celle de g, de sorte que :

$u(g) \simeq 2\times\frac{4\pi^2\ell}{T^3}u(T)$ soit $\frac{u(g)}{g} = 2\frac{u(T)}{T} \simeq 0{,}1$

Finalement : $\boxed{g \simeq 10 \pm 1 \quad m.s^{-2}}$

Cette mesure effectuée sur une seule période n'est évidemment pas très précise...

c) Dans la pratique, on peut augmenter la précision sur la mesure de T en faisant une mesure sur autant de périodes que l'on veut, de manière à ce que l'incertitude sur la période soit très inférieure à celle sur la longueur.
Evaluons le temps de mesure pour que cela soit le cas à 1% près :

$$\frac{u(T)}{NT} = \frac{1}{100}\,\frac{u(\ell)}{\ell} = 10^{-4} \Rightarrow N = \frac{u(T)}{T}\times 10^{4} = \frac{0,1}{2}.10^{4}$$

soit $\boxed{N = 500 \text{ périodes}}$

qui correspondent à $\Delta t_{tot} = NT = 1000\,s \simeq 17\,min$
Ceci est tout à fait réalisable.

Dans ce cas, $u(g) \simeq \left|\frac{\partial g}{\partial \ell}\right| u(\ell) = \frac{4\pi^2}{T^2} u(\ell)$

soit $\frac{u(g)}{g} \simeq \frac{u(\ell)}{\ell} = 1\%$

et finalement $\boxed{u(g) = 0,1\ m.s^{-2}}$

Ceci est suffisant pour mesurer que $g = 9,8 \pm 0,1\ m.s^{-2}$ mais cela est insuffisant pour clairement mettre en évidence les variations de g avec la latitude (variations entre 9,78 et 9,83 $m.s^{-2}$ entre l'équateur et les pôles).

2 Circuit RLC parallèle

1.

	U	i_1	i_2	i_3
$t = 0^+$	0	0	$\frac{E}{R}$	0
$t \to +\infty$	0	$\frac{E}{R}$	0	0

2. (a) $\frac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i_3 = 0.$

   (b) $\frac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_3 = 0$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7,07.10^3$ rad.s^{-1} ; $Q = \frac{Rr}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}} = 5,89.$

3. (a) $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = 7,04.10^3$ rad.s^{-1} ; $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 1,67.10^{-3}$ s.

   (b) $U(t) = \frac{E}{RC\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t).$

(c) En calculant le premier maximum de la fonction précédente par un calcul de dérivée $\dfrac{dU}{dt} = 0$, on obtient : $t_0 = \frac{1}{\Omega} atan\left(\Omega\tau\right) = 2.1.10^{-4}\ s$ (calculatrice en radians !) ; En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient $U(t_0) = U_{\max} = 0,30\ V$.
On aurait pu obtenir cette valeur avec une approximation consistant à dire que le premier maximum est atteint lorsque le sinus vaut 1. On obtient les mêmes valeurs numériques dans ce cas car τ et $\dfrac{2\pi}{\Omega}$ sont du même ordre de grandeur. Attention, cela n'aurait pas été le cas si τ avait été beaucoup plus faible...

(d) Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.

4. Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.

5. (a) On rappelle que le régime pseudo périodique de pseudo pulsation Ω était caractérisé par $U\left(t\right) = \frac{E}{RC\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\Omega t\right)$, et donc :

$$\delta = ln\left(\frac{U(t_i)}{U(t_{i+1})}\right) = ln\left(e^{-\dfrac{t_i - t_{i+1}}{\tau}}\right) = \frac{t_{i+1} - t_i}{\tau} = \frac{2\pi}{\Omega\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

or $Q \simeq 6$ de sorte que $4Q^2 \gg 1$ et finalement :

$$\boxed{\delta \simeq \frac{\pi}{Q}}$$

(b) Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.

(c) Voir Jupyter Notebook **2d0d-1759934**.