Fiche - Mesures et incertitudes

I Évaluation de type A (statistique)

Lorsqu'il est difficile d'évaluer précisément l'origine des incertitudes lors d'une unique manipulation, on peut estimer l'incertitude en réalisant N **fois la mesure en répétant le même protocole expérimental** (par exemple lors d'une mesure d'un volume équivalent dans un dosage, ou d'une mesure de l'angle à partir duquel un palet glisse pour déterminer un coefficient de frottement). Dans ce cas, l'incertitude-type ΔX vaut, pour une liste $\{X_i\}$ de N valeurs de la variable X de valeur moyenne $\langle X \rangle$:

$$\boxed{\Delta X = k \times \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \langle X \rangle \right)^2}}$$

avec $k = 1$ pour un niveau de confiance à 68% ; $k = 2$ pour un niveau de confiance à 95%

II Évaluation de type B (mesure unique)

Lorsqu'on réalise **une unique mesure directe**, on peut estimer l'incertitude-type ΔX sur la variable X de la façon suivante :

• dans le cas des appareils dont la notice est fournie (voltmètre, GBF, fiole jaugée,...) ou dans le cas des appareils analogiques (règle, éprouvette graduée, curseur sur un oscilloscope...) dont **la précision est inconnue**[1] :

$$\boxed{\Delta X = k \times \frac{\text{précision constructeur} \quad \text{ou} \quad 1/2 \text{ graduation}}{\sqrt{3}}}$$

avec $k = 1$ pour un niveau de confiance à 68% ; $k = 2$ pour un niveau de confiance à 95%

• sinon, on estime qualitativement, le plus précisément possible, la plage dans laquelle on est certain d'avoir la valeur à mesurer (plage de netteté en optique, fréquence de résonance en électronique par exemple).

III Propagation des incertitudes

Le plus souvent, la grandeur X qui nous intéresse se déduit des grandeurs mesurées directement $\{a, b, ...\}$ à l'aide d'une formule, et on doit alors déduire l'incertitude-type ΔX de Δa, Δb, ...

III.1 Cas simples : sommes, différences, produits et quotients

• Dans le cas où X s'exprime uniquement comme **une somme ou une différence** des grandeurs a, b, ... :

$$\boxed{\Delta X^2 = \Delta a^2 + \Delta b^2 + ...}$$

• Dans le cas où X s'exprime uniquement comme **un produit ou un quotient** **sans exposants** des grandeurs a, b, ... :

$$\boxed{\left(\frac{\Delta X}{X} \right)^2 = \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2 + ...}$$

1. On notera que, comme $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15$, on pourra tout à fait se contenter d'omettre ce facteur, sauf lorsqu'il est explicitement demandé. L'origine du facteur $\sqrt{3}$ peut se retrouver facilement dans le cas d'une distribution rectangulaire (cf exercice en fin de fiche).

III.2 Autres cas

- Dans le **cas général** :

$$\boxed{\Delta X^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + ...}$$

Exemple : On s'intéresse à un pendule simple dont la période d'oscillation est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Déterminer, à partir de la donnée de l'incertitude Δg sur g, l'incertitude ΔT sur la période T, en supposant que l'incertitude $\Delta \ell$ sur la longueur ℓ du pendule est négligeable.

Lorsque la formule est encore plus complexe, ou si $\Delta \ell$ n'est pas négligeable par exemple, on peut avantageusement faire une simulation numérique reposant sur un **tirage aléatoire de type Monte-Carlo**. Le principe est relativement simple : sur l'exemple précédent, on tirage aléatoirement N valeurs de g dans l'intervalle $[g_0 - \Delta g; g_0 + \Delta g]$ et N valeurs de ℓ dans l'intervalle $[\ell_0 - \Delta \ell; \ell_0 + \Delta \ell]$, puis on en déduit N valeurs de T et on en déduit la valeur moyenne T_0 et l'écart-type ΔT. Si N est suffisamment grand, le résultat est équivalent à celui obtenu à partir de la formule générale de propagation des incertitudes (cf DM1).

IV Présentation d'une mesure et chiffres significatifs

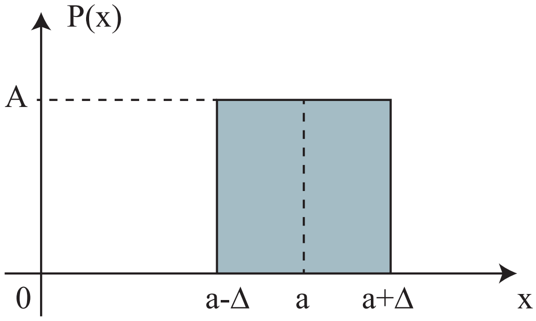
Un résultat de mesure doit toujours être présenté avec une incertitude-type et un intervalle de confiance :

$$\boxed{X = X_{mesuré} \pm \Delta X \quad \text{pour un intervalle de confiance à ... \%}}$$

On présente toujours le résultat avec un seul chiffre significatif pour l'incertitude, et autant de décimales pour la mesure et l'incertitude.

V Exercice

On considère une loi de probabilité continue de la variable X décrite par la distribution rectangulaire ci-dessous.



1. Calculer A en fonction de Δ pour que la loi de probabilité soit normalisée.
2. Calculer la valeur moyenne $\langle x \rangle$ de cette distribution continue.
3. Calculer la valeur quadratique moyenne $\langle x^2 \rangle$ de cette distribution continue.
4. En déduire que l'écart-type σ s'écrit $\sigma = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$ pour une telle distribution.