DM n°1 - Analyse dimensionnelle et électrocinétique

À rendre pour le mardi 10 septembre

1 Pendule simple - analyse dimensionnelle

1. En utilisant une analyse dimensionnelle, déterminer, à une constante multiplicative près, notée k, l'expression de la période d'un pendule simple constitué d'une masse m oscillant au bout d'un fil sans masse inextensible de longueur ℓ dans le champ de pesanteur terrestre.
2. Retrouver l'expression de la constante k en utilisant une méthode énergétique.
3. **(facultatif)** On veut réaliser une mesure de g à l'aide d'un pendule de longueur $\ell = 1.00\ m \pm 1\ cm$ à l'aide d'un chronomètre précis au dixième de seconde près[1].
   (a) Quel est l'ordre de grandeur de la période T mesurée (on pourra prendre $g \simeq 10\ m.s^{-2}$ pour cette question) ?
   (b) Quelle est la précision maximale accessible sur la mesure de g sur une seule période ?
      i. Méthode 1 : en utilisant une méthode de Monte-Carlo codée en python.
      On se reportera au Jupyter Notebook **64a7-1758779** dans Capytale pour répondre à cette question.
      ii. Méthode 2 : par le calcul.
      On rappelle que la formule générale permettant de calculer l'incertitude type $u(f)$ sur une fonction $f(x, y)$ de deux variables x et y d'incertitudes respectives $u(x)$ et $u(y)$ est donnée par :

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u(x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u(y)^2}$$

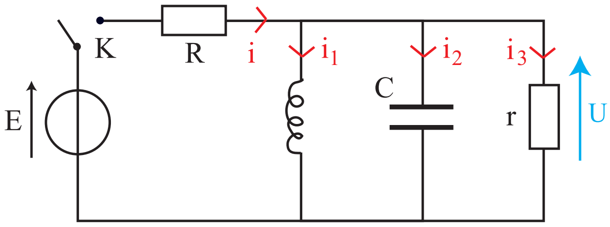
      Montrer, avec une hypothèse qu'on justifiera, que

$$\frac{u(g)}{g} \simeq 2\frac{u(T)}{T}$$

      et conclure.
   (c) Sans se limiter à une mesure sur une seule période, quelle serait la précision maximale de mesure de g ?

2 Circuit RLC parallèle

On considère le circuit RLC parallèle de la figure ci contre. Le condensateur C est initialement déchargé et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur en $t = 0$.



1. Déterminer U, i_1, i_2, i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur et au bout d'un temps très grand. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

1. On supposera donc ici que les incertitudes-type respectives sur la longueur ℓ et sur la période T sont données par $u(\ell) = 1\ cm$ et $u(T) = 0.1\ s$.

2. (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $i_3\left(t\right)$.
   (b) Écrire cette équation sous forme canonique, exprimer puis calculer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
   Données : $R = 2,5$ kΩ ; $r = 1,25$ kΩ ; $C = 1$ μF ; $L = 20$ mH ; $E = 6$ V.
   (c) Montrer que la solution de l'équation différentielle correspond à un régime pseudo-périodique.
3. (a) Calculer la pseudo-pulsation Ω et le temps caractéristique d'amortissement τ.
   (b) Déterminer l'expression de $U\left(t\right)$.
   (c) Calculer le temps t_0 au bout duquel U atteint son premier maximum. En déduire la valeur maximale de U.
   (d) Tracer la courbe $U(t)$ avec python, et vérifier la cohérence avec les résultats obtenus précédemment.
   On se reportera au Jupyter Notebook **20f7-1759040** dans Capytale pour répondre à cette question.
4. Faire directement la résolution numérique de l'équation différentielle avec python et comparer avec les résultats précédents. On se reportera à la suite du Notebook.
5. **(facultatif)** Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, on définit le **décrément logarithmique** par $\delta = ln\left(\dfrac{U(t_i)}{U(t_{i+1})}\right)$, où t_i correspond à l'instant pour lequel la courbe $U(t)$ atteint son $i^{ième}$ maximum local.
   (a) En réutilisant l'expression théorique de $U(t)$ obtenue précédemment, montrer que $\delta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$, où Q est le facteur de qualité.
   (b) En déduire la valeur numérique du facteur de qualité Q en utilisant la courbe tracée sur python, et la comparer à celle trouvée précédemment.
   (c) La méthode consistant à compter le nombre d'oscillations de la courbe pour évaluer la valeur de Q est-elle fiable ?