

Traitement numérique du signal

Table des matières

I Échantillonnage d'un signal analogique	1
I.1 Échantillonnage parfait	1
I.2 Mise en pratique d'un échantillonnage - Échantillonneur bloqueur	2
II Spectre du signal échantillonné	3
II.1 Spectre théorique	3
II.2 Mise en pratique - Calcul du spectre par FFT	5
III Critère de Nyquist-Shannon	8
III.1 Repliement de spectre	8
III.2 Énoncé du critère de Nyquist-Shannon	9
III.3 Exemples de phénomènes d'aliasing "spatial"	10
III.4 Filtre anti-repliement	11
IV Conversions analogique-numérique (CAN) et application au filtrage numérique	12
IV.1 Chaîne complète de traitement numérique de l'information	12
IV.2 Pas de quantification	12
IV.3 Filtrage numérique	13
IV.3.1 Principe du filtrage numérique	13
IV.3.2 Filtre passe-bas du premier ordre	13
IV.3.3 Caractéristiques et limites du filtre numérique	14

Avec les progrès de l'informatique, l'électronique analogique est progressivement remplacée par le numérique, beaucoup plus versatile.

Dans ce chapitre, nous étudierons tout d'abord le principe de l'échantillonnage d'un signal analogique. Nous montrerons que cela induit une perte d'information qui peut conduire à des résultats erronés si aucune précaution n'est prise lors de l'échantillonnage.

Nous verrons ensuite l'ensemble d'une chaîne de traitement numérique du signal. Nous verrons enfin comment mettre à profit le format numérique de l'information pour réaliser un filtrage numérique.

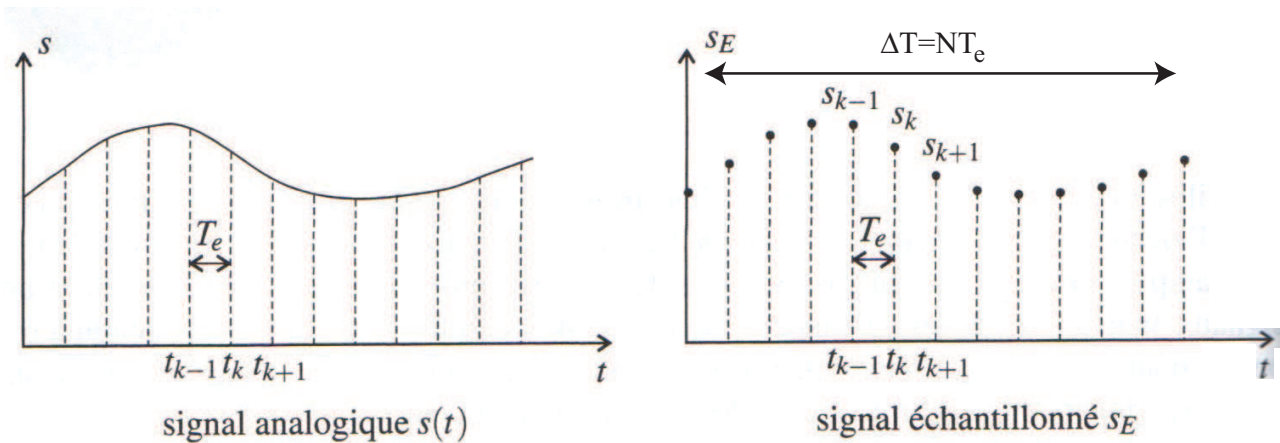
I Échantillonnage d'un signal analogique

Afin de pouvoir réaliser l'acquisition numérique d'un signal analogique, la première étape consiste à échantillonner le signal.

I.1 Échantillonnage parfait

Définition

L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal $s(t)$ étudié à des instants régulièrement espacés, de la forme $t_k = kT_e$, où $k \in [0..N - 1]$, T_e étant la période d'échantillonnage et N étant le nombre de points d'acquisition.



On obtient ainsi le signal échantillonné : $s_E = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$, où $s_k = s(t_k)$. On appelle f_e la **fréquence d'échantillonnage** définie par :

$$f_e =$$

Intuitivement, on comprend que l'échantillonnage s'accompagne nécessairement d'une perte d'information, et que le signal échantillonné sera d'autant plus fidèle au signal analogique que T_e est petit, ou que f_e est grande.

Pour une durée $\Delta T = NT_e$ donnée du signal, cela revient également à avoir un grand nombre N de points.

On comprend dès lors qu'un **compromis entre nombre d'échantillons et capacité de stockage** devra être trouvé.

I.2 Mise en pratique d'un échantillonnage - Échantillonneur bloqueur

En pratique, il est impossible de réaliser l'échantillonnage du signal comme expliqué précédemment car cela supposerait de réaliser la mesure de s_k instantanément.

L'échantillonnage correspond en pratique à prélever la valeur du signal analogique $s(t)$ à numériser pendant un temps τ faible, périodiquement toutes les T_e secondes, avec $\tau \ll T_e$.

Remarque

|| A titre d'exemple, échantillonner un film correspondrait à **cligner des yeux** toutes les T_e secondes. τ correspondrait ici au temps pendant lequel les yeux sont ouverts. Un autre exemple est celui du **stroboscope**, pour lequel τ correspond à la durée des flashes.

Expérimentalement (cf TP), un moyen simple de réaliser cette opération est d'utiliser un **échantillonneur bloqueur**.

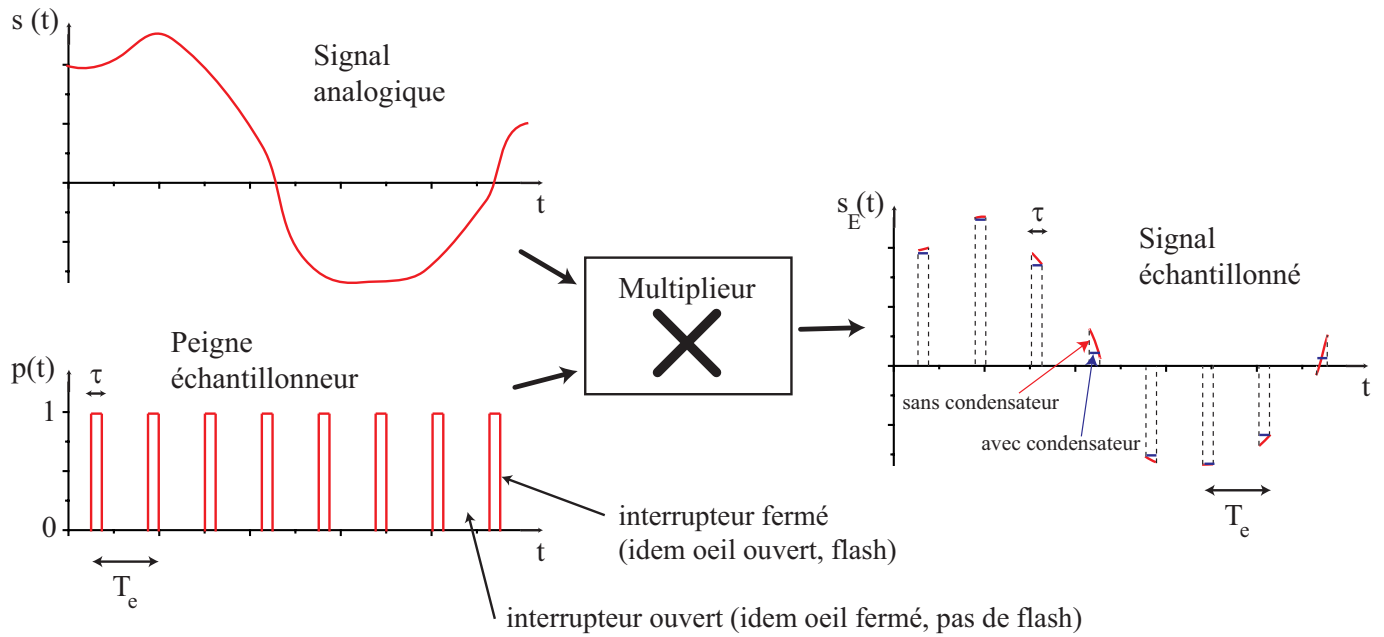
Ce montage électronique est tout simplement un interrupteur commandé à la fréquence T_e .

Le signal échantillonné $s_E(t)$ obtenu en sortie correspond ainsi à la multiplication du signal analogique par un peigne échantillonneur, de période T_e et d'amplitude unité :

$$s_E(t) = s(t) \times p(t)$$

Remarque

|| En pratique, lorsque l'interrupteur est fermé, afin de filtrer les fluctuations de la tension $s(t)$ pendant l'enregistrement et le coder sous forme numérique (voir CAN), on utilise souvent un condensateur. Ce dernier se charge et maintient un niveau de tension stable pendant la durée τ .



On notera que le cas de l'échantillonnage idéal correspond à la limite $\tau \rightarrow 0$, et le peigne correspond dans ce cas à un **peigne de Dirac**.

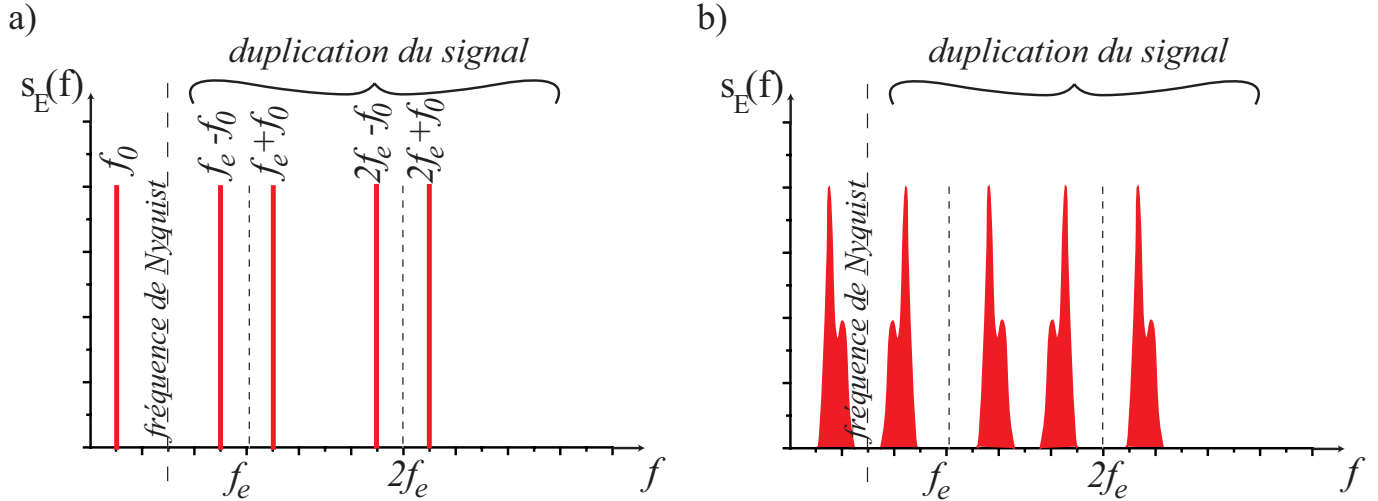
Expérience introductive : On réalise un échantillonnage à $f_e = 10\text{kHz}$ d'un signal audio dont on fait varier la fréquence de 1kHz à 10kHz . On écoute le signal grâce à un haut-parleur. On constate alors que la fréquence du signal ne correspond pas à celle qui est entendue au delà de 5kHz . Essayons de comprendre ce phénomène.

II Spectre du signal échantillonné

II.1 Spectre théorique

Propriété

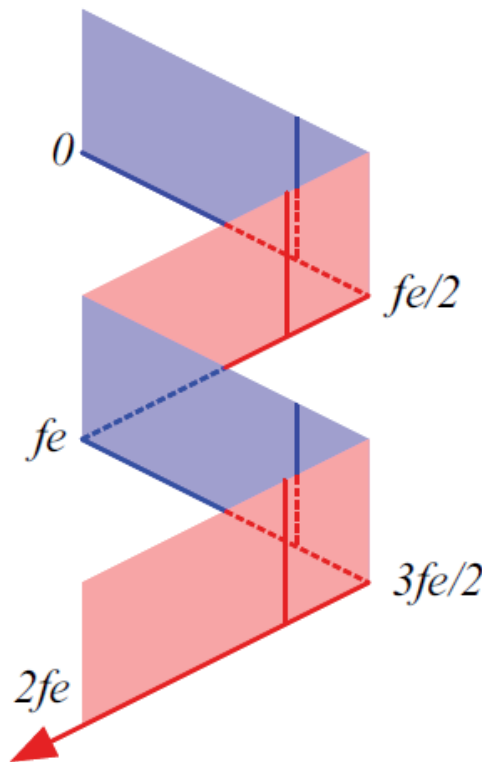
L'échantillonnage d'un signal crée une duplication de son spectre autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage.



• Cas général

Dans le cas général, le spectre d'un signal échantillonné, appelé DFT (*Discrete Fourier Transform*), présente toujours des duplications semblables (figure b) précédente).

On peut remarquer que le spectre du signal échantillonné permet de retrouver le spectre du signal de départ par **pliage** du spectre autour des fréquences $\frac{f_e}{2}$ (appelée **fréquence de Nyquist**), f_e , $\frac{3f_e}{2}$, $2f_e$...



II.2 Mise en pratique - Calcul du spectre par FFT

Un algorithme particulièrement efficace, appelé FFT (*Fast Fourier Transform*), a été mis au point dans les années 1960 pour calculer le spectre d'un signal échantillonné. C'est cet algorithme de FFT, dont le principe repose sur un nombre d'échantillons pouvant s'écrire comme une puissance de 2 ($N = 2^p$), qui est toujours utilisé dans les ordinateurs, les oscilloscopes numériques, dans le programme Latis Pro, etc...

Avec Python, la fonction qui permet de calculer la FFT est `fftpack.fft` après avoir chargé le package `from scipy import fftpack`. Cette fonction, calculée à partir de la liste des N points échantillonnés, renvoie une liste de N points correspondant aux amplitudes¹ des composantes aux fréquences $\{0, \frac{f_e}{N}, \frac{2f_e}{N}, \dots, f_e - \frac{f_e}{N}\}$.

On n'a donc accès qu'à la bande de fréquence $[0, f_e[$, avec une résolution spectrale - c'est à dire le plus petit écart en fréquence observable - donnée par :

$$\Delta f_{min} = \text{résolution spectrale}$$

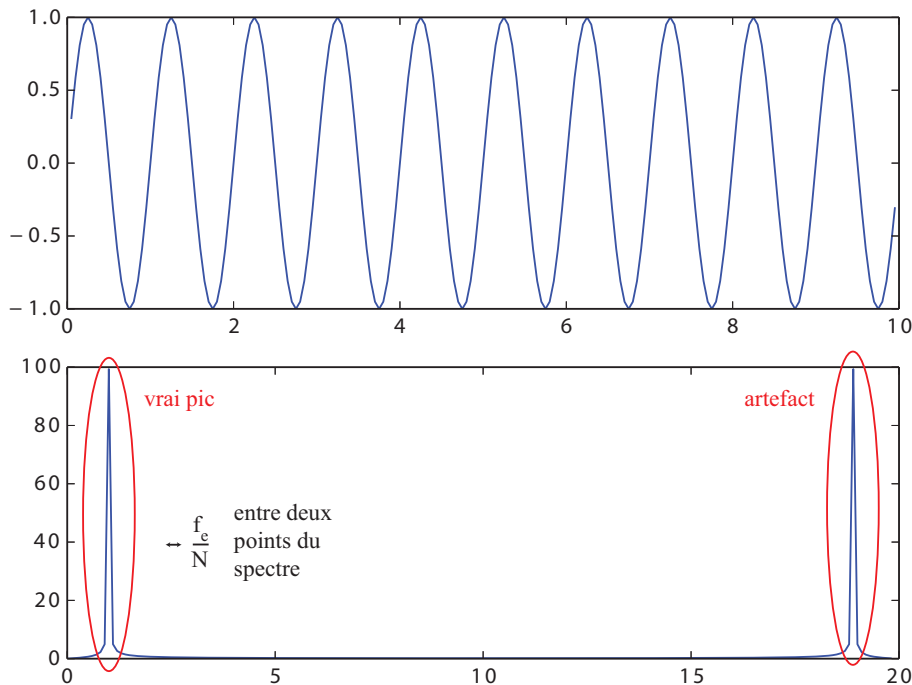


FIGURE 1 – Sinusoïde de fréquence $f_0 = 1\text{Hz}$ et son spectre obtenu par FFT, avec $f_e = 20\text{ Hz}$ et $N = 200$ points, en utilisant le fichier `Cours2-FFTsinus.py` sur le site de la classe. Dans le spectre, on constate bien la présence d'un pic à $f_0 = 1\text{ Hz}$ et d'un second pic à $f_e - f_0 = 19\text{ Hz}$. La résolution spectrale vaut ici $\Delta f_{min} = \frac{f_e}{N} = \frac{20}{200} = 0.1\text{ Hz}$. $\Delta T_{tot} = NT_e = 10\text{s}$.

On peut remarquer que la résolution spectrale est égale à l'inverse de la durée totale d'acquisition. En effet :

$$\Delta f_{min} =$$

où ΔT_{tot} est la durée totale d'acquisition. Ainsi, afin d'améliorer la résolution spectrale, c'est à dire de diminuer Δf_{min} , on aura donc intérêt à augmenter la durée ΔT_{tot} d'acquisition, ce qui a pour conséquence d'observer un signal temporel inexploitable car "tassé" sur lui-même. On retiendra donc qu'il existe toujours un compromis entre signal temporel et spectre.

1. On ne s'intéresse généralement qu'à la hauteur relative des pics et non à la valeur précise de l'ordonnée.

Propriété

Afin d'améliorer la visualisation du spectre, c'est à dire de diminuer Δf_{min} , on a intérêt à augmenter la durée ΔT d'acquisition, au détriment du signal temporel ^a.

a. Ce compromis est général pour toutes les grandeurs liées par transformée de Fourier, comme nous le reverrons en optique.

Afin de d'améliorer la résolution $\Delta f_{min} = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{\Delta T_{tot}}$, on peut :

Méthode 1 : soit augmenter le nombre N de points échantillonnés, comme le montre la figure ci-dessous.

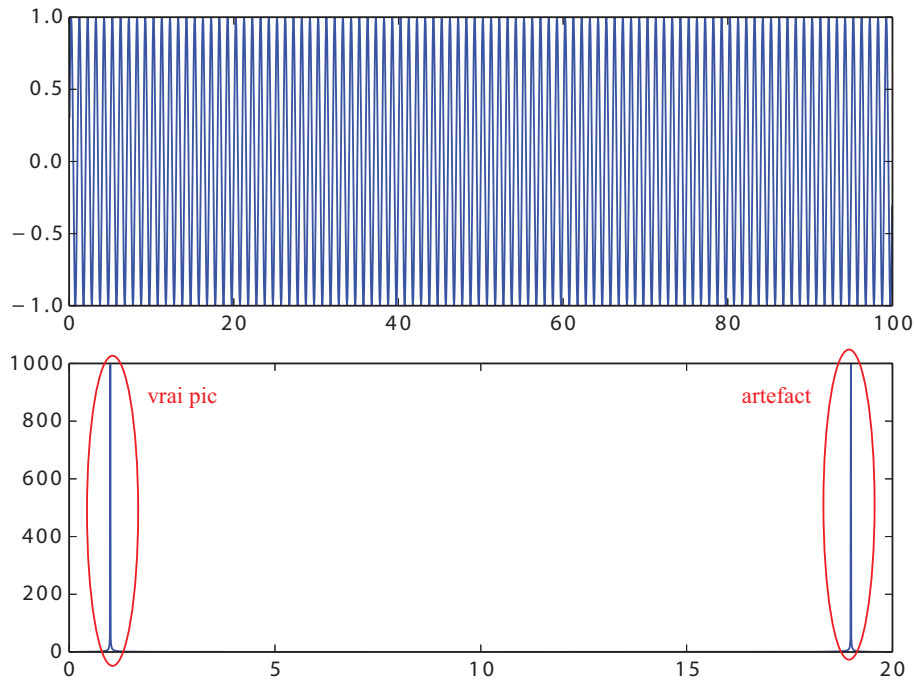


FIGURE 2 – Sinusoïde de fréquence $f_0 = 1\text{Hz}$, avec $f_e = 20\text{ Hz}$ et $N = 2000$ points. La résolution spectrale vaut maintenant $\Delta f_{min} = \frac{f_e}{N} = \frac{20}{2000} = 0.01\text{ Hz}$. $\Delta T_{tot} = NT_e = 100\text{s}$.

L'effet de cette modification, à f_e constant, est d'augmenter la durée totale d'acquisition donnée ΔT_{tot} . Le signal temporel est donc "moins beau" car il est plus difficile d'en distinguer les détails.

Méthode 2 : soit diminuer la fréquence d'échantillonnage. Là encore, le signal temporel est moins exploitable pour la même raison.

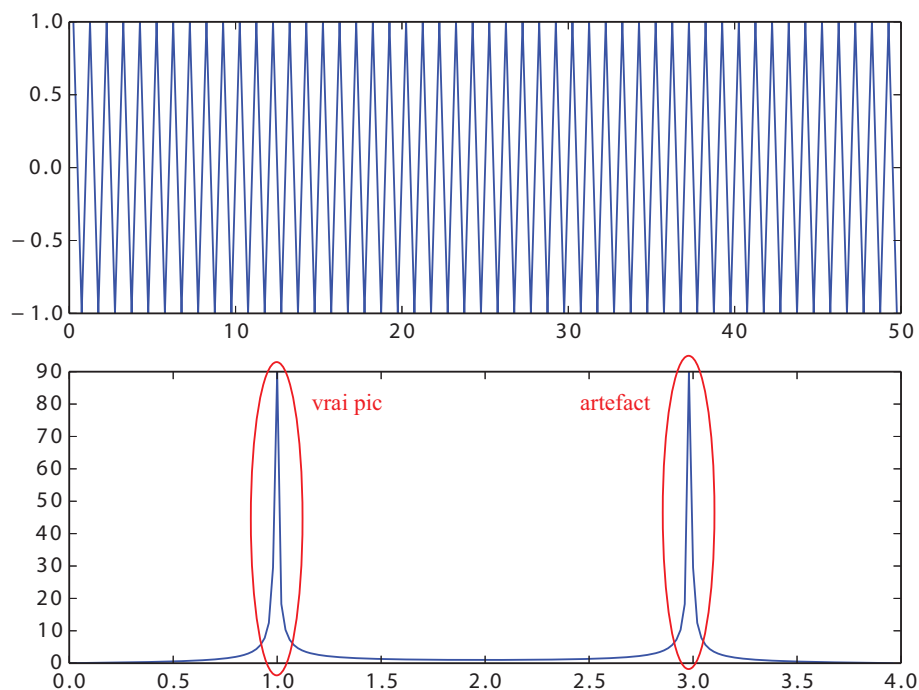


FIGURE 3 – Sinusoïde de fréquence $f_0 = 1\text{Hz}$, avec $f_e = 4\text{ Hz}$ et $N = 200$ points. La résolution spectrale vaut $\Delta f_{\min} = \frac{f_e}{N} = \frac{4}{200} = 0.02\text{ Hz}$. $\Delta T_{\text{tot}} = NT_e = 50\text{s}$

Par ailleurs, on peut voir également que le signal temporel ne ressemble plus vraiment à une sinusoïde, et que les pics à f_0 et $f_e - f_0$ se sont rapprochés.

Transition : Ces pics peuvent-ils se croiser et que visualise-t-on dans ce cas ?

III Critère de Nyquist-Shannon

III.1 Repliement de spectre

Envisageons maintenant un cas où les deux pics précédents "se croisent", c'est à dire que $f_0 > f_e - f_0$, soit $f_0 > \frac{f_e}{2}$.

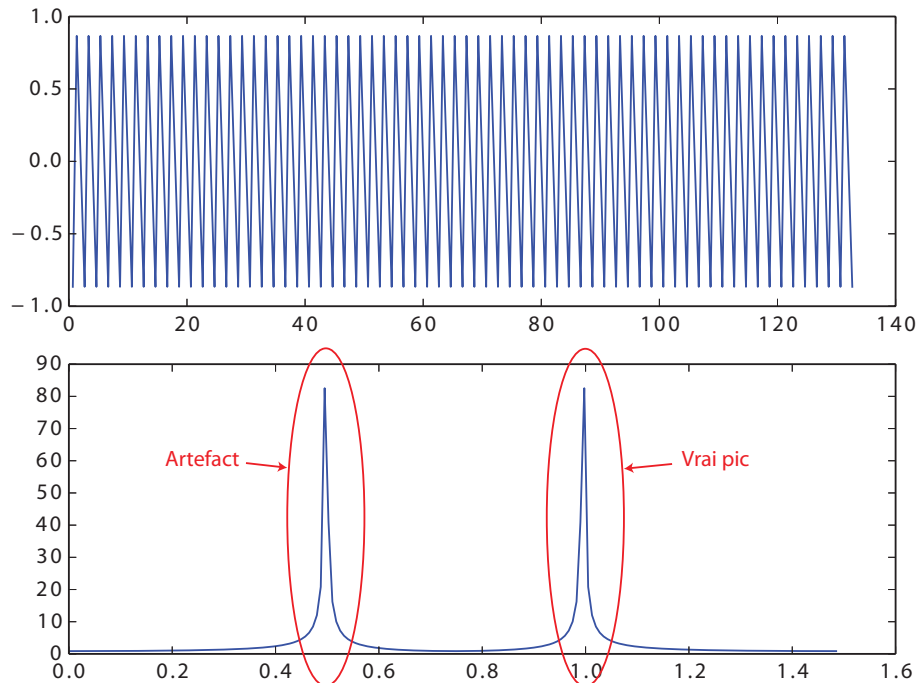


FIGURE 4 – Sinusoïde de fréquence $f_0 = 1\text{Hz}$, avec $f_e = 1.5\text{ Hz}$ et $N = 200$ points. Dans le spectre obtenu par FFT, on constate la présence d'un pic à $f_0 = 1\text{ Hz}$ et d'un second pic à $f_e - f_0 = 0.5\text{ Hz}$.

On voit que sélectionner le pic de fréquence la plus faible dans le spectre ne correspond plus à la fréquence du signal, mais à un "artefact" dû à l'échantillonnage. On notera qu'augmenter le nombre N d'échantillons ne résout pas le problème.

Propriété

Le phénomène de repliement de spectre, ou aliasing en anglais, conduit à une information erronée lorsque

$$f_0 > \frac{f_e}{2} \quad \text{fréquence de Nyquist}$$

Dans ce cas, le pic de plus basse fréquence correspond à celui qui est "replié" autour de la fréquence de Nyquist, à la valeur $f_e - f_0$.

Retour sur l'expérience introductive : Lorsqu'on échantillonne le signal audio à $f_e = 10\text{kHz}$, il se produit un phénomène de repliement de spectre dès que $f_0 > f_e/2 = 5\text{kHz}$. Comme l'oreille est davantage sensible aux fréquences comprises entre 1 kHz et 5 kHz qu'aux plus hautes fréquences, on entend tout d'abord presque uniquement le pic principal quand $f_0 < 5\text{kHz}$, puis presque uniquement le pic replié lorsque $f_0 > 5\text{kHz}$!

III.2 Énoncé du critère de Nyquist-Shannon

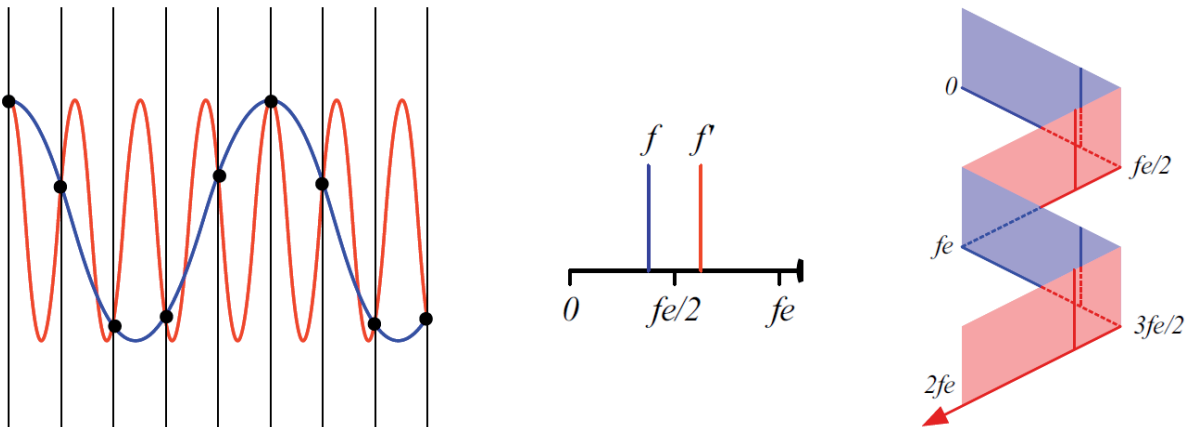
D'après ce qui précède, on peut en déduire le critère suivant afin d'utiliser correctement la FFT discrète d'un système d'acquisition :

Critère de Shannon

La fréquence $f_e/2$, appelée fréquence de Nyquist, doit être plus grande que la fréquence maximale $f_{0,max}$ du signal dont on veut tracer le spectre :

$$f_e > 2f_{0,max} \quad \text{ou} \quad T_e < \frac{T_{0,min}}{2}$$

Si ce n'est pas le cas, on peut faire passer une autre sinusoïde de fréquence plus faible par les points échantillonnés, comme le montre la figure ci-dessous.



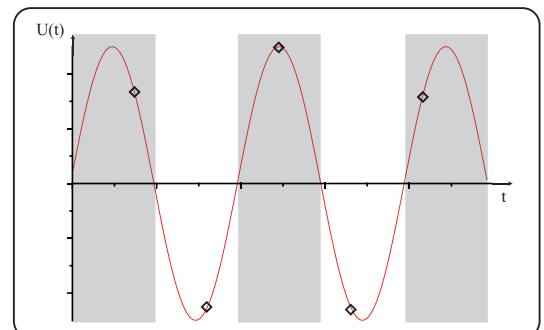
Méthode

Si on ne connaît pas l'ordre de grandeur de la fréquence maximale du signal à analyser :

- on choisit la fréquence de Nyquist $f_e/2$ la plus grande possible, afin d'éviter tout repliement ;
- puis on réduit f_e jusqu'à obtenir un spectre exploitable, et non "tassé" sur la gauche de l'axe.

On notera qu'il est intuitif qu'il faille au moins un échantillon par demi-période pour que la sinusoïde de plus basse fréquence s'identifie avec le signal réel, et ainsi éviter un repliement de spectre.

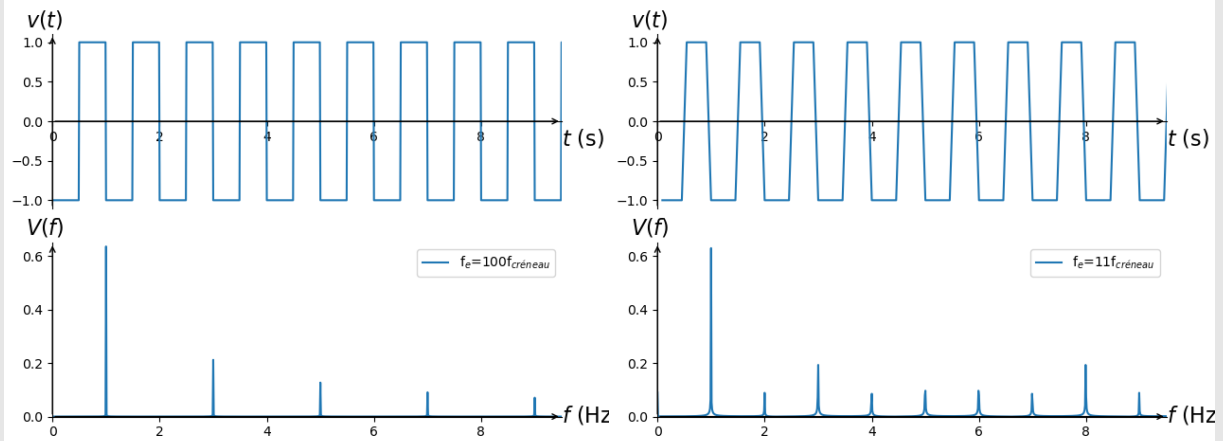
Par exemple, pour que la fréquence identifiée corresponde à f_0 , il faut placer au moins un point d'échantillonnage dans chaque zone de la figure ci-contre.



Exemple

Tracé du spectre d'un signal créneau de fréquence $f_{\text{créneau}} = 1\text{Hz}$.

Comme le créneau a des harmoniques s'étendant jusqu'à l'infini, $f_{0,\text{max}} \rightarrow \infty$, le critère de Shannon ne peut être vérifié pour toutes les harmoniques. Un compromis doit être trouvé pour que les pics de plus grande amplitude ne se replient pas. On prendra donc $f_e \gg f_{\text{créneau}}$ pour éviter de visualiser de multiples pics repliés (cf figure ci-dessous obtenue avec le programme "Cours2-FFTCreneau.py").

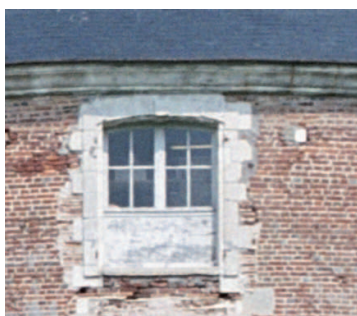
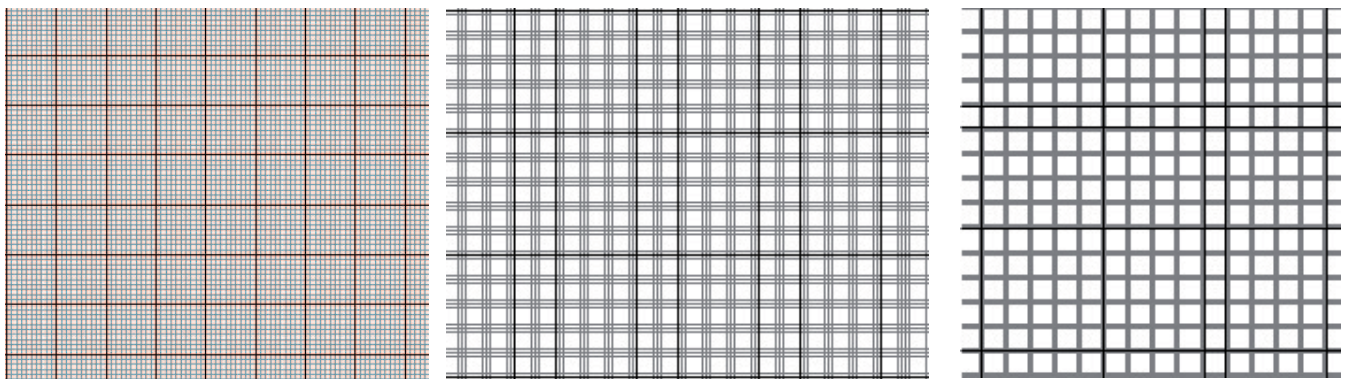


III.3 Exemples de phénomènes d'aliasing "spatial"

Le phénomène de repliement de spectre peut également se visualiser sur des images ou des vidéos. En effet, le phénomène de repliement étudié précédemment concernait la fréquence temporelle, c'est à dire la "répétitivité" du signal dans le temps, mais on peut généraliser ce phénomène au cas des fréquences spatiales, c'est à dire la "répétitivité" spatiale d'une image, échantillonnée par des pixels de taille L_{pixel} à la fréquence spatiale $f_e = 1/L_{\text{pixel}}$, par exemple :

- sur des **images** : une trame apparaît sur les zones de détails fins dans des photos dont la résolution est diminuée.

Par exemple, une feuille de papier millimétré fait apparaître des traits moins espacés lorsqu'on dézoome (l'échantillonnage réalisé à l'écran n'est pas assez précis si $f_e = 1/L_{\text{pixel}}$ est trop faible par rapport à $f = 1/L_{1\text{mm}}$, et "rate" des traits, faisant ainsi apparaître une autre périodicité). De même, un mur de château en brique, donc très détaillé, apparaît tramé lorsqu'on réduit la qualité de la photo.



Le critère de Shannon se généraliserait ici de la façon suivante : pour ne pas faire apparaître de tramage (basses fréquences spatiales), il faut que la taille des pixels soit au moins deux fois plus petite que les détails périodiques de l'image.

- sur des **vidéos** : on peut avoir l'impression que les roues d'une voiture tournent à l'envers car l'échantillonnage réalisé par la caméra n'est pas assez rapide et ne vérifie pas le critère de Shannon (cf DM2).

III.4 Filtre anti-repliement

Afin d'éviter les artéfacts erronés dans le spectre lors de l'échantillonnage d'un signal analogique, on utilise parfois un **filtre anti-repliement** ou **anti-aliasing**. Pour une fréquence d'échantillonnage f_e donnée, il suffit pour cela de filtrer les fréquences du signal analogique qui ne vérifient pas le critère de Shannon. On place donc en pratique un filtre passe-bas de fréquence de coupure proche de $\frac{f_e}{2}$:

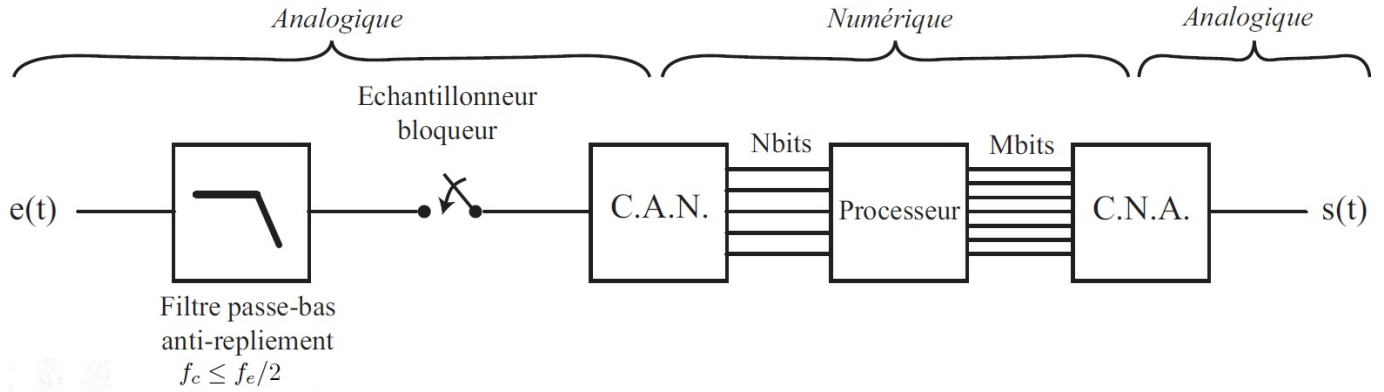
Filtre passe-bas (avec $f_c = \frac{f_e}{2}$) = Filtre anti-repliement

Exemple : Pour les fichiers audio pour lesquels on a toujours $f_e = 44,1 \text{ kHz}$, on utilise un filtre passe-bas analogique de fréquence environ égale à 20 kHz de manière à éviter le repliement. On notera que cela n'altère pas les fréquences audibles puisque l'oreille humaine n'entend que sur la bande de fréquence comprise entre 20 Hz et 20 kHz .

IV Conversions analogique-numérique (CAN) et application au filtrage numérique

IV.1 Chaîne complète de traitement numérique de l'information

Le schéma d'une chaîne de traitement numérique de l'information est présenté ci-dessous.

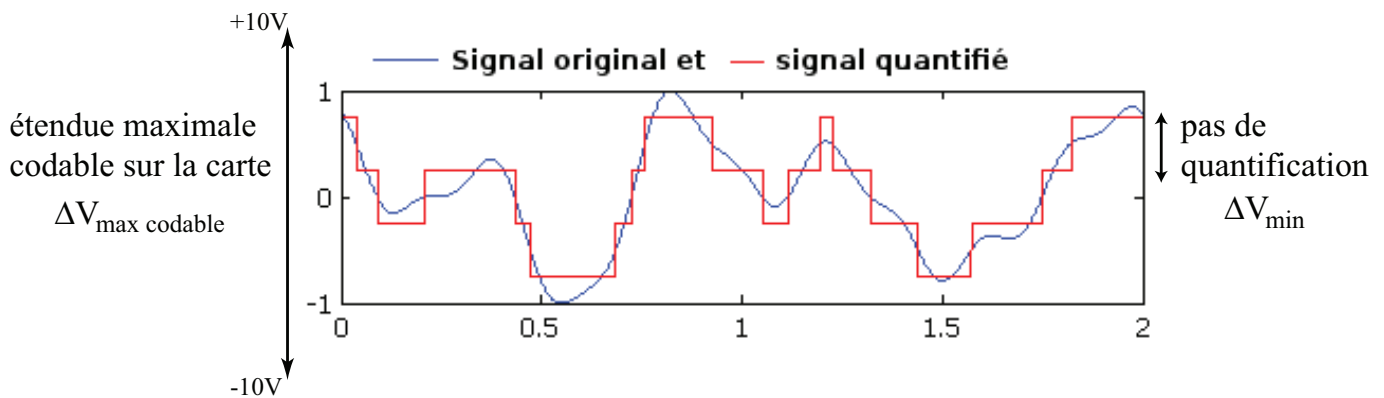


IV.2 Pas de quantification

Afin d'être transcrite sous forme numérique, c'est à dire écrite sous forme de **bits**, les valeurs échantillonnées sont envoyées dans un convertisseur analogique-numérique (CAN). Par exemple, on peut coder $2^{N_{bits}} = 256$ valeurs sur $N_{bits} = 8$ bits ou un **octet**, c'est à dire les valeurs de 0 (codé par 00000000) à $2^8 - 1 = 255$ (codé par 11111111).

On appelle **pas de quantification** ΔV_{min} l'écart le plus faible qui peut être codé entre deux valeurs de la carte d'acquisition. On peut donc écrire :

$$\Delta V_{min} =$$

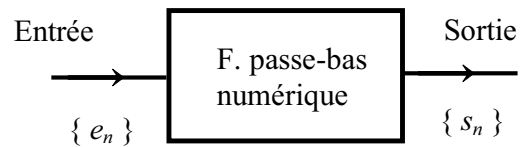


On notera que $\Delta V_{maxcodable}$, l'écart le plus grand qui peut être codé sur la carte d'acquisition correspond au double du **calibre**.

IV.3 Filtrage numérique

IV.3.1 Principe du filtrage numérique

Le filtrage numérique effectué sur une liste de valeurs $\{e_n\}$ peut être modélisé de la façon suivante :



À la suite finie des échantillons $\{e_n\}$ (entrée du filtre), il s'agit de faire correspondre une suite finie $\{s_n\}$ qui représente la **réponse du filtre**, c'est à dire les *valeurs filtrées*. Il y a plusieurs possibilités pour réaliser ce filtrage qui repose sur des relations de récurrence entre les valeurs d'entrée et de sortie.

IV.3.2 Filtre passe-bas du premier ordre

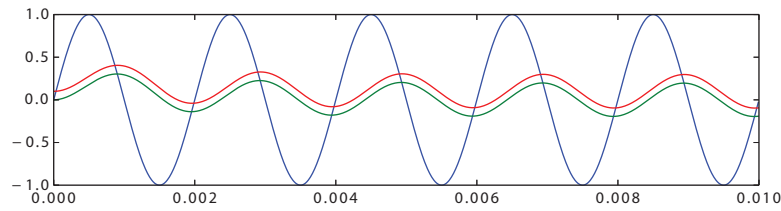


FIGURE 5 – Signaux filtrés en utilisant les 2 relations de récurrences possibles (Euler explicite et Euler implicite) avec "Cours2-FiltrePB1etPB2.py". L'une a été décalée de 0.1 pour qu'elle puisse être visible car elles se confondent parfaitement. On a choisi ici un signal d'entrée sinusoïdal à $f = 500 \text{ Hz}$ avec un passe-bas défini par $f_c = 100 \text{ Hz}$ et on a imposé $s_0 = 0$. On peut noter l'atténuation et le déphasage du signal de sortie, en accord avec ce qui est attendu.

IV.3.3 Caractéristiques et limites du filtre numérique

- **Influence du nombre de points** : il faut un nombre de points suffisants - ou une fréquence d'échantillonnage suffisante - pour pouvoir reproduire les variations du signal.

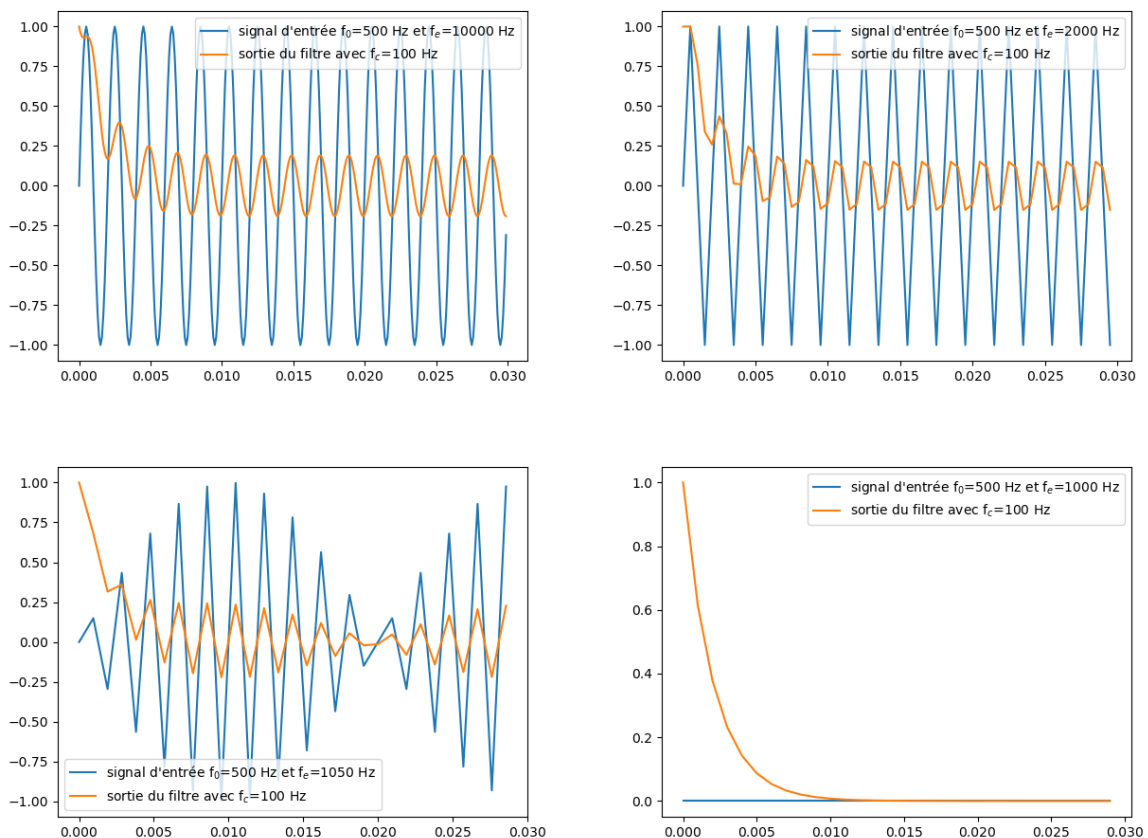


FIGURE 6 – On réalise un filtrage numérique passe-bas à $f_c = 100 \text{ Hz}$ d'un signal sinusoïdal à $f_0 = 500 \text{ Hz}$ avec le programme *Cours2-FiltrePB.py*, pour différentes fréquences d'échantillonnage : $f_e = 10\,000 \text{ Hz}$, $f_e = 2\,000 \text{ Hz}$, $f_e = 1050 \text{ Hz}$, et enfin $f_e = 1000 \text{ Hz}$ (cas critique de Shannon : $f_e = 2f_0$). On constate qu'il faut en pratique que $f_e \gg 2f_0$ pour obtenir de "beaux" signaux.

• **Bande passante et temps de réponse du filtre** : Lorsqu'on choisit des conditions initiales non nulles pour s_0 , on voit clairement apparaître un régime transitoire avant le régime permanent, dont le temps caractéristique τ est lié à la largeur de la bande passante du filtre par : $\tau = \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi f_c}$.

On utilise le programme *Cours2-FiltrePB.py* avec $f_e = 10\,000$, et $s_0 = 1$.

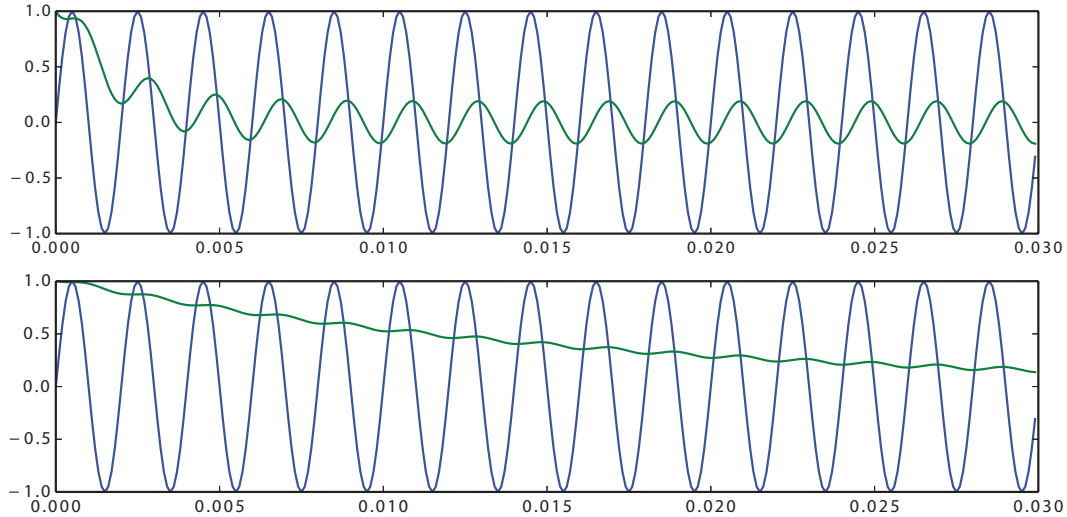


FIGURE 7 – En imposant, $s_0 = 1$, on a choisi ici un signal d'entrée sinusoïdal à $f = 500\text{ Hz}$ avec un passe-bas défini par $f_c = 100\text{ Hz}$ (en haut), et $f_c = 10\text{ Hz}$ (en bas). On note un régime transitoire dont la durée τ est inversement proportionnelle à f_c . Pour le second par exemple, on vérifie que $\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi f_c} = \frac{1}{2\pi \times 10} \simeq 0.017\text{ s}$. C'est bien ce qu'on peut lire graphiquement.

Remarque

|| Dans la figure précédente, on peut voir que les fréquences élevées ont été filtrées (passe-bas), car le signal ne peut revenir immédiatement osciller autour de 0.