TD n°3bis - Révisions de mécanique de MPSI

SYSTÈMES DE COORDONNÉES

1 Périmètre, surface et volume

1. Remplir le tableau suivant.

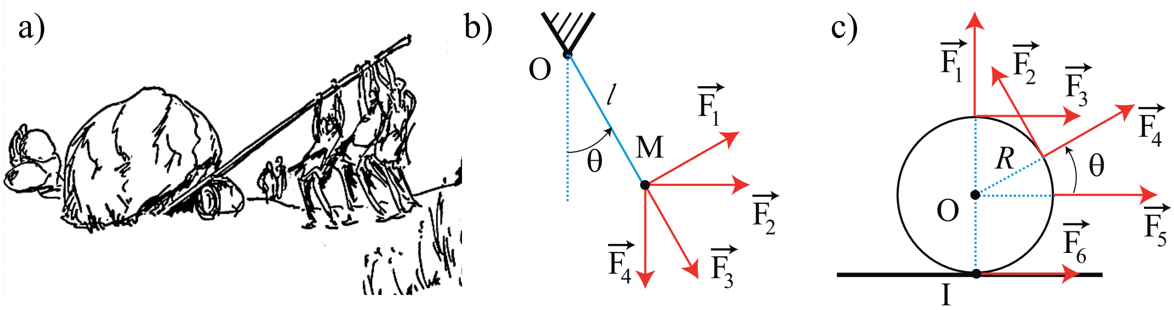
	Périmètre	Surface	Volume
Cercle/disque			N/A
Cylindre	N/A		
Sphère/Boule	N/A		

2. Retrouver les 6 résultats du tableau précédent en utilisant une intégrale à partir du système de coordonnées adapté. Retrouver les expressions de la surface latérale et du volume d'un cône (*).

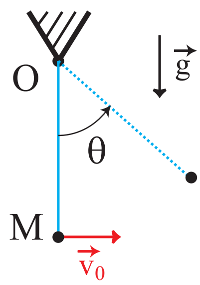
THÉORÈMES DE LA MÉCANIQUE

2 Bras de levier

1. Rappeler la définition d'un bras de levier, lors de l'application d'une force $\overrightarrow{F}$ en un point M sur un solide fixé en un point O.
2. Dans le dessin (a) ci-dessous, suivant quelle direction vaut-il mieux tirer sur le levier de façon à soulever la pierre ?
3. Déterminer la valeur du moment des forces $\overrightarrow{F}_i$ par rapport au point O dans les deux cas (b) et (c).



3 Pendule simple



Un point matériel M de masse m est relié à un point fixe O par l'intermédiaire d'une tige sans masse de longueur ℓ. A partir de sa position d'équilibre, on lui impose latéralement, de façon à initier un mouvement circulaire dans le plan vertical, une vitesse initiale d'intensité v_0.

1. Déterminer l'équation du pendule simple :
   (a) à partir du principe fondamental de la dynamique
   (b) à partir du théorème de l'énergie mécanique ou du théorème de l'énergie cinétique
   (c) à partir du théorème du moment cinétique
2. Déterminer l'expression de la tension du fil pour tout angle θ.

4 Décollement d'un solide sur un plateau oscillant

Un point matériel M de masse m est posé sur un plateau horizontal.

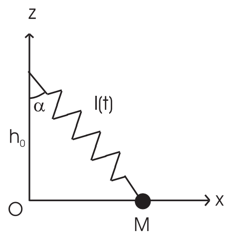
Le plateau est animé d'un mouvement vibratoire de sorte que la position verticale du plateau est donnée par $z = Acos(\omega t)$, où ω est la pulsation et A est l'amplitude des oscillations.

Quelle relation doit lier A, ω et g (champ de pesanteur) pour que M reste toujours en contact avec le plateau ?

5 Système à ressort

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal Ox. Ce point est lié à un ressort de longueur à vide l_0, de raideur k, accroché à un point H tel que $OH = h_0 < l_0$.

A l'instant initial on lâche le point matériel M sans vitesse à partir d'une position proche de la position d'équilibre.



1. Faire un bilan des forces exercées sur le point M. On écrira l'expression de la tension du ressort en fonction de k, x, l et l_0.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de M sur Ox. Pour cela, on projette la tension le long de l'axe (Ox), et on se ramène à une unique variable $x(t)$. L'équation obtenue est-elle linéaire ? En connait-on une solution ?
3. Déterminer la ou les position(s) d'équilibre de la masse.
4. Afin de déterminer si les positions d'équilibre sont stables, on étudie l'existence potentielle d'oscillations autour de chacune des positions d'équilibre. On pourra poser l'écart à l'équilibre $\epsilon(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$ avec $\epsilon(t) \ll x_{\text{eq}}, \ell_0, h_0$, et utiliser un développement limité. On donnera l'expression de la pulsation propre lorsqu'il se produit des oscillations.
5. Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser afin de déterminer les positions d'équilibres et leur stabilité ?
6. Résoudre l'équation différentielle dans le cas général avec $k = 100, m = 0.1, \ell_0 = 0.2, h_0 = 0.1$. Vérifier que le système oscille de façon quasi-harmonique autour des positions d'équilibre seulement si la masse est lâchée sans vitesse initiale à proximité immédiate de ces mêmes positions.

Réponses : 2. $m\ddot{x} = -k\left(1 - l_0/\sqrt{x^2 + h_0^2}\right)x$. 3. $x = \pm\sqrt{l_0^2 - h_0^2}$ et $x = 0$. 4. $\omega_0^2 = (k/m)(x_{\text{eq}}/l_0)^2$.

6 Conduite sur de la "tôle ondulée" (*)

On se propose d'étudier le comportement d'une moto lorsqu'elle se déplace à vitesse constante v sur une route bosselée, appelée communément "tôle ondulée".

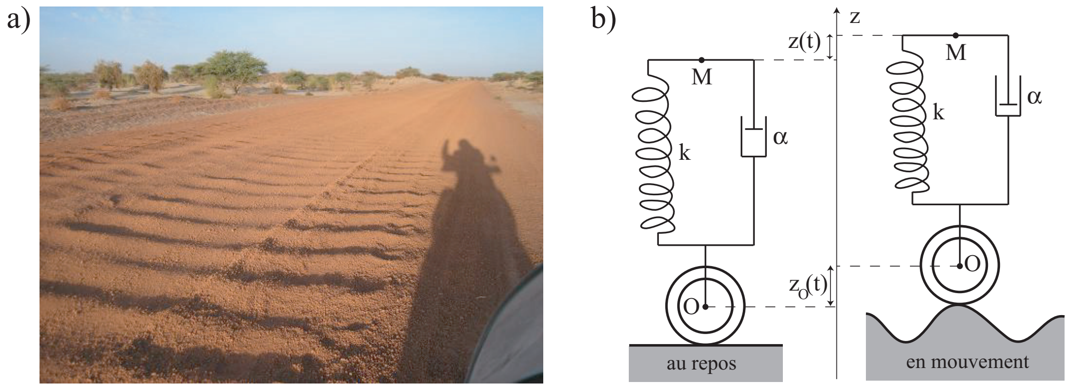


FIGURE 1 – a) Route en tôle ondulée. b) Modélisation de la fourche de la moto.

La moto est modélisée de façon simplifiée par une masse m placée en M et reposant sur une unique roue de centre O, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement α. On supposera que l'axe OM reste vertical.

On considérera que le profil de la route impose au centre O de la roue une élongation $z_O(t) = a\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})$ par rapport à sa position d'équilibre (la roue ne décolle pas du sol).

On repère le mouvement de la masse par son élongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand la moto est au repos en $x = 0$ à $t = 0$.

On considère qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O : $\overrightarrow{f} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{u_z}$.

1. Déterminer la longueur $\ell_{eq} = OM_{eq}$ du ressort à l'équilibre.
2. La moto se déplaçant à vitesse constante v sur la route bosselée, établir la position verticale de la roue $z_O(t)$ par rapport à sa position d'équilibre, ainsi que l'expression de sa vitesse verticale $\dot{z}_O(t)$.
3. Etablir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement du point M de la moto et déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. On introduira la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
4. Comment définit-on la pulsation ω de l'oscillation forcé ? Montrer que le rapport de l'amplitude complexe du mouvement d'oscillation vertical de la moto en régime forcé par rapport à l'amplitude des oscillations de la route est donnée, en posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, par :
$$\frac{z_m e^{j\varphi}}{a} = \frac{1 + j\frac{u}{Q}}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$$
5. Quelle est l'amplitude des oscillations de la moto à faible vitesse et à très grande vitesse ?
6. Sachant que la fonction $f(u) = \frac{1+\left(\frac{u}{Q}\right)^2}{(1-u^2)^2+\left(\frac{u}{Q}\right)^2}$ admet un maximum en $u = \sqrt{-Q^2 + Q\sqrt{Q^2+2}}$, à quelle vitesse est-il préférable de rouler pour que la moto ne vibre pas trop ?
7. Est-il préférable de régler les amortisseurs de façon à avoir une "fourche dure", c'est à dire une constante de raideur k grande ?

Données : $m = 200$ kg ; $\ell_0 = 75$ cm ; $k = 2.10^6$ N.m^{-1} ; $a = 5$ cm ; $\lambda = 25$ cm ; $\alpha = 5.10^3$ kg.s^{-1}

MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE

7 Questions de cours classiques sur les forces centrales

On considère un point M de masse m soumis à une force centrale newtonienne de la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u}_r$ et animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

1. Donner l'expression de la constante k dans le cas d'une interaction gravitationnelle et dans le cas d'une interaction électrostatique.
2. **Moment cinétique**
   (a) Déterminer l'expression du moment cinétique du point M, par rapport au point O fixe dans $\mathcal{R}$.
   (b) En déduire que le moment cinétique se conserve et que le mouvement est plan dans un mouvement à force centrale.
   (c) En déduire également la loi des aires.
3. **Énergie**
   (a) Montrer que l'énergie mécanique se conserve.
   (b) Montrer qu'on peut écrire l'énergie mécanique du système sous la forme :
$$E_m = E_{c,r}(\dot{r}) + E_{p,eff}(r)$$

(c) Tracer $E_{p,eff}$ et en déduire qu'il existe des mouvements *libres* et *liés* selon la valeur de l'énergie mécanique. On précisera la nature de chaque trajectoire.

(d) Déterminer l'expression de la vitesse de libération d'un objet lancé depuis la surface de la Terre. Estimer son ordre de grandeur.

4. **Lois de Kepler**

(a) Rappeler les lois de Kepler

(b) Retrouver l'expression de la constante de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire

5. **Orbite circulaire**

(a) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique d'une orbite circulaire

(b) Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire. Estimer son ordre de grandeur.

6. **Orbite elliptique**

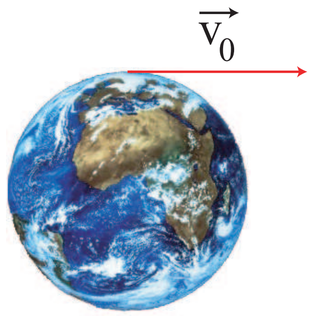
(a) Rappeler les propriétés des ellipses.

(b) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique en fonction du demi grand-axe a de l'ellipse.

8 Lancer d'un projectile

On tire horizontalement un projectile de masse m à la surface de la Terre avec une vitesse V_0 telle que :

$$V_0^2 = \alpha \frac{GM_{\mathrm{T}}}{R}$$

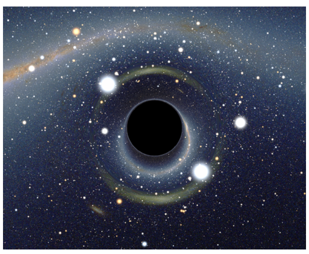


$(1 \leq \alpha < 2)$, G désignant la constante de gravitation universelle, M_{T} la masse de la Terre et R son rayon.

1. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de α, G, m, M_{T} et R.
2. Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de R, V_0 et r.
3. En déduire que l'énergie mécanique peut également s'écrire sous la forme

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{cr}}(\dot{r}) + E_{\mathrm{peff}}(r)$$

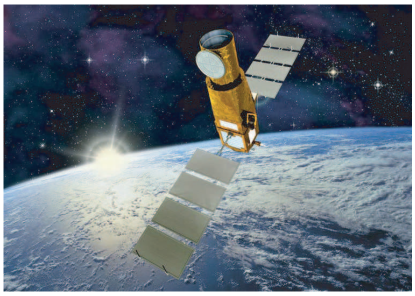
On donnera les expressions de l'énergie cinétique radiale $E_{\mathrm{cr}}(\dot{r})$ et de l'énergie potentielle effective $E_{\mathrm{peff}}(r)$.



4. Que peut-on dire de $\dot{r}$ aux altitudes maximale et minimale du projectile ? Calculer celles-ci. Interpréter les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \to 2$.
5. Expliquer pourquoi la vitesse V_0 s'appelle la *vitesse de libération* dans le cas $\alpha = 2$? En déduire la valeur critique du rapport $\frac{M_{astre}}{R_{astre}}$ au-delà de laquelle un astre se comporte comme un *trou noir*. On fera l'application numérique dans le cas de la Terre.

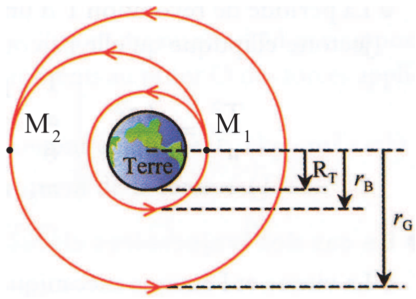
Réponses : 4. $h_{\min} = 0$ et $h_{\max} = 2\frac{\alpha-1}{2-\alpha}R$, 5. $R_T < \frac{2GM_T}{c^2} = 6mm$.

9 Mise en orbite d'un satellite (*)



On souhaite placer un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre est animée d'un mouvement de rotation de période T.

1. Calculer l'énergie mécanique E_{mB} d'un satellite de masse m en orbite circulaire basse à une distance r_{B} du centre de la Terre. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle à l'infini.
2. Exprimer l'énergie du satellite E_{S} avant son lancement, lorsqu'il est posé à la surface de la Terre à la latitude λ. Où est-il préférable de procéder au lancement ?
3. L'orbite géostationnaire est celle pour laquelle le satellite reste à la verticale d'un même point de la Terre.
   (a) Peut-on placer un tel satellite au dessus d'un point quelconque de la Terre ?
   (b) Déterminer le rayon r_{G} de l'orbite géostationnaire.
   (c) Calculer l'énergie mécanique E_{mG} d'un satellite géostationnaire.
4. Une fois le satellite placé sur une orbite basse, on veut le transférer vers l'orbite géostationnaire.
   Pour cela, on lui communique une impulsion au point M_1, afin qu'il décrive une ellipse dont l'apogée se trouve en M_2 sur l'orbite géostationnaire (ellipse de Hohmann).
   Une seconde impulsion permet alors de le stabiliser sur cette orbite.



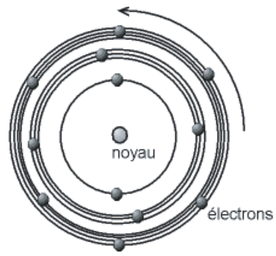
   (a) Déterminer l'énergie mécanique E_{mT} du satellite sur l'ellipse de transfert. En déduire l'énergie qu'il faut fournir en M_1 puis en M_2 pour réaliser le transfert.
   (b) Déterminer la durée du transfert.

   Données : $M_{\mathrm{T}} = 5,98.10^{24}$ kg ; $R_{\mathrm{T}} = 6,38.10^{6}$ m ; $m = 10^{3}$ kg ; $T = 86164$ s ; $r_{\mathrm{B}} = 7.10^{6}$ m ; $G = 6,67.10^{-11}$ kg^{-1}.m^{3}s^{-2}.

Réponses : 3b. $r_{\mathrm{G}} = \left(\frac{T^2 G M_{\mathrm{T}}}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42,2.10^{6}$ m, 3c. $E_{\mathrm{mG}} = -\frac{G M_{\mathrm{T}} m}{2 r_{\mathrm{G}}} = -4,73.10^{9}$ J, 4a. $E_{\mathrm{mT}} = -\frac{G M_{\mathrm{T}} m}{r_{\mathrm{B}} + r_{\mathrm{G}}} = -8,11.10^{9}$ J, 4b. $\Delta t = \pi\sqrt{\frac{(r_{\mathrm{B}}+r_{\mathrm{G}})^3}{8 G M_{\mathrm{T}}}} = 5,33$ h.

10 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. Donner l'ordre de grandeur de la masse et de la charge d'un électron, ainsi que de la distance entre l'électron et le proton.
2. En considérant l'électron en orbite circulaire autour du proton (supposé fixe) du fait de l'interaction coulombienne entre les deux particules, déterminer la vitesse de l'électron. Commentaire.
   On négligera le poids de l'électron dans le bilan des forces.
   On utilisera $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 S.I.$



Pour expliquer l'existence de spectres de raies, Bohr eut l'idée d'introduire pour l'atome le même genre de quantification que pour la lumière, en disant que seule certaines orbites circulaires étaient stables. Il admit que pour qu'une orbite circulaire soit stable il fallait que le moment cinétique de l'électron $\overrightarrow{L}$ vérifie la relation :

$$||\overrightarrow{L}|| = n\hbar \quad \text{avec} \quad n \in N^* \qquad \text{et} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad \text{avec} \qquad h = 6,62.10^{-34}\text{J.s.}$$

3. Démontrer que cette relation conduit à une quantification du rayon de la trajectoire sous la forme :

$$r = a_0 \times n^2$$

avec $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ le rayon de Bohr. Donner la valeur numérique de a_0, on prendra $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg.

4. A partir de cette relation, démontrer que l'énergie totale de l'électron se met sous la forme :

$$E_n = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \times \frac{1}{n^2}$$

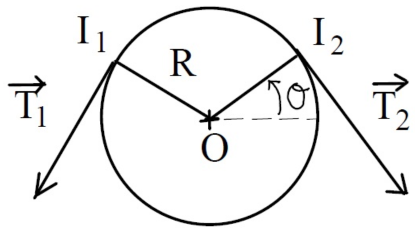
et calculer la valeur de la constante $\frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$ en eV.

Réponses : 2. $v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = 1.5 \times 10^6 m.s^{-1}$, 4. $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 52.8pm$, 5. $\frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = -13.6eV$.

ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

11 Questions de cours classiques sur la mécanique du solide

1. (a) Donner la définition d'un solide
   (b) Donner l'expression du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe. On définira le moment d'inertie et on précisera sa signification physique.
   (c) Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ.
2. Donner l'expression du théorème du moment cinétique appliqué à une poulie réelle de centre O et de rayon R, de moment d'inertie J_O, sur laquelle s'exerce un couple de frottement Γ, à laquelle sont accrochés deux fils sans masse, inextensibles, exerçant respectivement en I_1 et I_2 quelconques les forces de tension $\overrightarrow{T}_1$ et $\overrightarrow{T}_2$. Dans quel cas y a-t-il égalité entre les normes des deux tensions ?



3. Comment l'équation du pendule simple est-elle modifiée si le point matériel et le fil sont remplacés par un pendule pesant, c'est à dire un solide pouvant tourner autour l'axe Δ passant par O et perpendiculaire à la figure ? On notera J_Δ le moment d'inertie de ce solide par rapport à Δ.