TD n°3 - Dynamique en référentiel non galiléen

1 Manège

Un manège tourne à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega_0 \overrightarrow{u}_z$ constante dans le référentiel terrestre.

1. Un enfant part du centre et se dirige vers le point A de la périphérie avec une vitesse constante (par rapport au manège) de norme v_0. À l'instant initial, $\overrightarrow{OA}$ est dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{u_x}$.
   (a) Donner la vitesse de l'enfant par rapport au référentiel terrestre en utilisant la composition des vitesses. On utilisera les vecteurs de la base polaire locale.
   (b) Retrouver directement le résultat précédent en utilisant les coordonnées polaires.
2. À présent l'enfant part du centre et se dirige vers le point A de la périphérie avec une accélération constante (par rapport au manège) de norme γ. A l'instant initial, $\overrightarrow{OA}$ est dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{u_x}$.
   (a) Donner l'accélération de l'enfant par rapport au référentiel terrestre en utilisant la composition des accélérations.
   (b) Retrouver directement le résultat précédent en utilisant les coordonnées polaires.

2 Résolution de problème : influence de la force de Coriolis (*)

Thomas Ramos est-il en train de calculer l'influence de la force de Coriolis ?

On introduira tous les paramètres et hypothèses nécessaires afin de répondre à cette question. Des ordres de grandeurs numériques sont attendus pour évaluer l'influence de cette force sur un tir de transformation.

3 Tir (*)

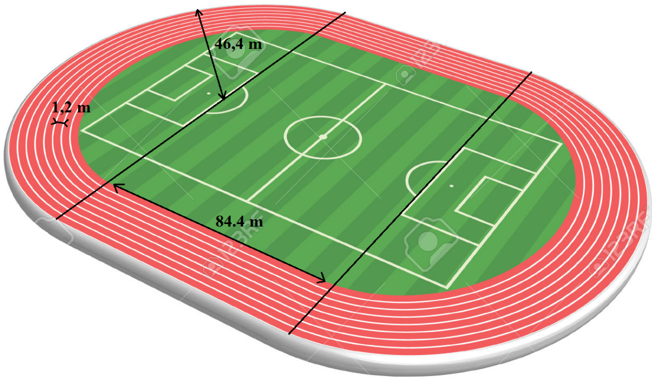
Une cible C est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur H au moment où un projectile P, soumis à son poids, est lancé à partir du sol à une vitesse $\overrightarrow{v}_0$ à partir d'une distance au sol L.

Quel doit être l'angle de tir β par rapport au sol pour que le projectile atteigne la cible ?

Réponses : $tan\beta = \dfrac{H}{L}$.

4 Athlétisme : le 200 m - Résolution de problème

Le 200 mètres est une épreuve d'athlétisme consistant à parcourir un demi-tour d'une piste d'athlétisme de 400 m. Il est couru au très haut niveau en moins de 20 secondes pour les hommes et 22 secondes pour les femmes. Le record du monde masculin est détenu depuis le 20 août 2009 par le Jamaïcain Usain Bolt avec 19,19 s, tandis que l'Américaine Florence Griffith-Joyner détient depuis 1988 la meilleure performance féminine avec 21,34 s.



Outre la distance, il existe une différence fondamentale entre le 200 m et le 100 m : le virage. Le virage oblige le coureur à lutter contre la force centrifuge ; il gaspille donc de l'énergie dans la direction opposée à celle vers laquelle la force centrifuge le repousse, énergie qu'il ne peut donner qu'avec un placement particulier de son pied. De ce fait, s'il veut avoir le même rendement, son temps d'appui au sol sera plus long ; son pied doit donc accélérer son mouvement, si bien que sa poussée ne sera jamais aussi parfaite qu'en ligne droite. Le virage oblige aussi le sprinteur à adapter sa musculature ; il doit être encore plus solide et gaîné et ses appuis doivent l'être également. Le virage peut aussi être à l'origine de disqualifications : le sprinteur peu attentif peut mordre le couloir d'à côté s'il est déporté par la force centrifuge ou s'il lui résiste trop.

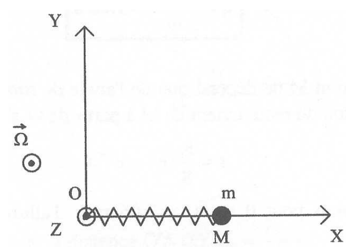
Lors d'une course de 200 m, applications numériques à l'appui, déterminer quel est le meilleur des 8 couloirs de la piste d'athlétisme d'un point de vue théorique. Est-ce le cas en pratique ?

Données sur la piste d'athlétisme :
— largeur d'un couloir : 1,2 m
— longueur de la ligne droite : 84 m
— rayon de courbure de la piste extérieure : 46,4 m

5 Mobile attaché à un ressort en rotation

Une masse ponctuelle m est traversée par une tige rigide, et peut se déplacer sans aucun frottement le long de celle-ci. On accroche un ressort de constante k à m. Le ressort et la tige sont animés dans le plan horizontal d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse de rotation Ω autour de OZ.

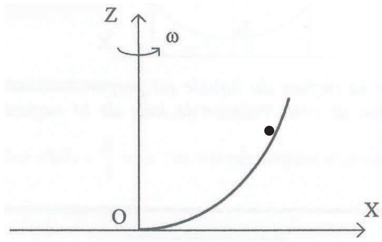
On note $x = \mathrm{OM}$ la longueur du ressort à l'instant t et L_0 la longueur à vide. A $t = 0$ les conditions initiales sont $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$.



1. Quelle est l'équation différentielle en x donnant le mouvement de m sur l'axe OX ?
2. Analyser qualitativement les trois types de solution en précisant simplement la nature du mouvement de la masse m.
3. A quelles conditions la masse reste-t-elle immobile dans le référentiel de la tige ?
4. Quelle est la valeur du module de la réaction $\vec{R}$ qu'exerce la barre sur la masse en fonction de m, g, Ω et $\dot{x}$?

Réponses : 1. $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) x = \frac{k}{m} L_0$, 3. $\frac{k}{m} > \Omega^2$ et $x_0 = \frac{kL_0}{k - m\Omega^2}$, 4. $R = m\sqrt{4\Omega^2\dot{x}^2 + g^2}$.

6 Surface de révolution particulière



On considère une gouttière en rotation uniforme autour d'un axe vertical OZ avec une vitesse angulaire de rotation ω.

Dans le repère tournant, l'équation $z = f(x)$ de la gouttière est telle que lorsque l'on pose, sans vitesse initiale, une masse ponctuelle m en n'importe quel point de cette gouttière, la masse m reste en équilibre. On néglige les frottements.

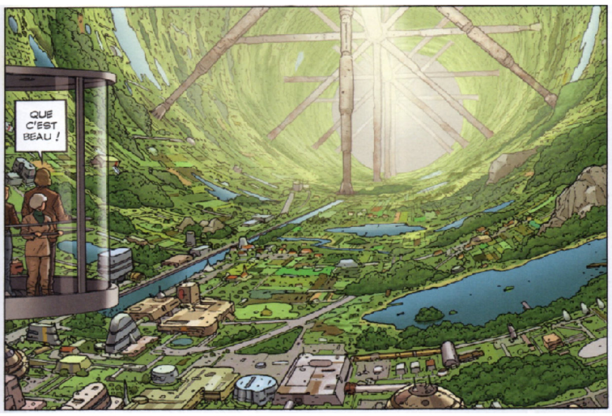
1. Exprimer l'énergie potentielle de la masse m dans le référentiel tournant.
2. Trouver l'équation $z = f(x)$ de la gouttière.

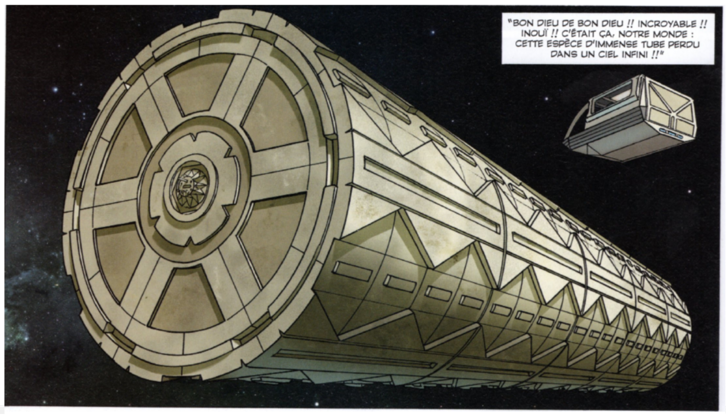
Réponses : 2. $z = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$.

7 Vaisseau cylindrique - Résolution de problème (*)

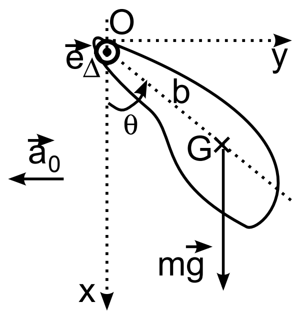
Dans la bande dessinée *Centaurus* de Léo, la planète Terre est devenue inhabitable et les descendants des humains traversent l'espace à la recherche d'un monde habitable à bord d'un vaisseau cylindrique en rotation.

1. Estimer la vitesse de rotation du vaisseau à partir des images ci-dessous.
2. Certains mouvements ou déplacements dans ce cylindre sont-ils modifiés par rapport à ceux que pourrait faire une personne sur la Terre ? On présentera une discussion dans laquelle on introduira des ordres de grandeur.





8 Pendule dans une voiture qui démarre



Un solide peut tourner sans frottement autour d'un axe Δ horizontal, fixe dans une voiture. La voiture démarre en prenant une accélération $\overrightarrow{a_0}$ constante sur une route horizontale.

Déterminer la période des petites oscillations de ce pendule autour de sa position d'équilibre.

On donne le moment d'inertie J du solide par rapport à l'axe Δ, ainsi que la distance b du centre d'inertie G de ce solide à l'axe Δ.

Réponses : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{mb}{J}[gcos\theta_{eq} + a_0 sin\theta_{eq}]$ et $\theta_{eq} = arctan\dfrac{a_0}{g}$.

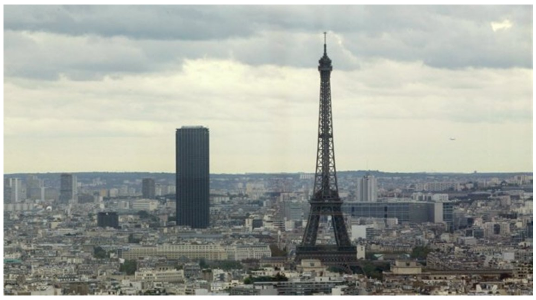
9 État d'impesanteur (*)

Proposer plusieurs situations physiques dans lesquelles une personne peut se retrouver en état d'impesanteur.

10 Déviation d'un objet lâché du haut de la tour Montparnasse - Résolution de problème

On lâche une bille de plomb sans vitesse initiale du haut de la tour Montparnasse (210 m), un jour sans vent.

1. Estimer numériquement la déviation que subirait la bille. On rappelle que la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre est contenue dans le poids de la bille. Pour simplifier, on supposera que ce dernier passe par le centre de la Terre. On justifiera clairement les autres approximations faites.
2. Vérifier que le résultat obtenu à la question précédente correspond bien à celui que fournit le fichier *TD-3-DeviationVersEst.py* disponible sur le site de la classe. Discuter ensuite de la validité des approximations précédentes en modifiant le fichier Python de façon à faire une résolution complète du système d'équations couplées.



11 Fusée

Une fusée en mouvement sur la verticale ascendante dans le référentiel terrestre supposé galiléen est soumise au champ de pesanteur terrestre supposé uniforme. On négligera l'influence des frottements.
Elle éjecte des gaz avec un débit massique D_m constant et une vitesse relative $\overrightarrow{u}$ constante *par rapport à la fusée* et dirigée vers le bas. On appellera $m(t)$ la masse de la fusée et de son contenu à l'instant t. On note $\overrightarrow{v}$ le vecteur-vitesse de la fusée ; on suppose que la fusée est immobile à $t = 0$.

1. Pourquoi la fusée et son contenu constituent un système ouvert (S_o) ?
2. Faire un schéma d'un système fermé (S_f) que l'on précisera à l'instant t et à l'instant $t + \mathrm{d}t$.
3. Exprimer $m(t)$ en fonction de $m_0 = m(t = 0)$, D_m et t.
4. En supposant le champ de pression uniforme autour de la fusée, montrer que le mouvement de la fusée est régi par l'équation $m(t)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m(t)\overrightarrow{g} - D_m\overrightarrow{u}$. Commentaires ?
5. En déduire l'expression de $\overrightarrow{v}(t)$.

Réponses : 3. $m(t) = m_0 - D_m t$, 5. $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{g}t + \ln\left(1 - \frac{D_m t}{m_0}\right)\overrightarrow{u}$.