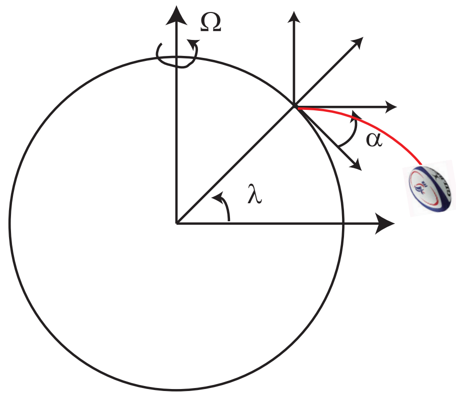
TD n°3 - Correction des exercices en autonomie

1 Résolution de problème : influence de la force de Coriolis

Afin de répondre à cette question, commençons par faire un raisonnement très simple que nous raffinerons au besoin. Comparons l'influence des deux forces qui agissent sur le ballon pendant le tir : le poids et la force d'inertie de Coriolis (nous supposerons que les frottements sont négligeables, bien que ceux-ci, ainsi que l'influence du vent doivent évidemment être pris en compte par le buteur).



Lors du tir, nous supposerons que l'angle avec la verticale du lieu est de $\alpha = 45°$, pour un terrain orienté Nord-Sud à une latitude de $\lambda = 45°$. Dans ce cas, le ballon fait initialement un angle droit avec l'axe de rotation de la Terre, et sa vitesse est maximale. Nous la supposerons égale à environ $v_0 = 20\ m.s^{-1}$. On peut alors calculer le rapport maximal entre le poids et la force de Coriolis, au début du tir :

$$\frac{F_{Coriolis}}{F_{Poids}} = \frac{2m\Omega v_0}{mg} \simeq 3 \times 10^{-4}$$

où $\Omega = \dfrac{2\pi}{86164} = 7.3 \times 10^{-5} rad.s^{-1}$.

La force de Coriolis est donc très négligeable devant le poids, même si nous avions pris d'autres valeurs numériques différentes pour λ, α, v_0, g. Il est donc inutile de raffiner le modèle et on peut conclure que les buteurs n'ont pas à modifier leurs habitudes lorsqu'ils changent de latitude.

On peut aussi tout à fait aboutir à la même conclusion en comparant tout simplement le temps passé par le ballon en l'air, qui est de l'ordre de quelques secondes, à la période de rotation de la Terre :

$$\frac{\Delta t_{tir}}{T_{sidéral}} \ll 1 \qquad \Rightarrow \text{force de Coriolis négligeable}$$

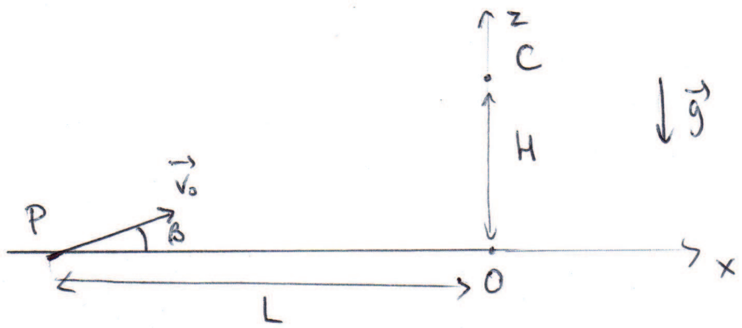
2 Tir

On peut bien sûr se placer dans le référentiel terrestre, déterminer x_P, z_P et z_C pour traduire $z_P(x_P = L) = z_C$: c'est long et il y a plus efficace. (Voir calcul ci-dessous)

Dans le référentiel en chute libre d'origine C, la cible C est immobile et le projectile P a un mouvement rectiligne uniforme donné par sa vitesse initiale (la pesanteur y est compensée par la force d'inertie d'entraînement (car $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(C)_{(R_0)} = -m\vec{g}$ où (R_0) est ici le référentiel terrestre) ; tout se passe comme dans le référentiel terrestre sans pesanteur...).

Alors il vient directement $\boxed{\tan\beta = H / L}$, à condition que la vitesse v_0 soit suffisante pour que C se situe à l'intérieur de la parabole de sûreté de P.

On pourra se reporter à la fin ($t = 49mn$) de cet excellent cours de Walter Lewin au MIT sur le même thème pour une version présentée "à l'américaine" ! : $https://www.youtube.com/watch?v = k6aJyOHTDYM$



Coordonnées dans $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$: $P(-L, 0)$; $C(0, H)$

PFD à C dans R_g : $m_c \ddot{z}_c = -m_c g$, $m_c \ddot{x}_c = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} z_c(t) = -g\frac{t^2}{2} + H \text{ (vitesse initiale nulle)} \\ x_c(t) = 0 \end{cases}$

PFD à P dans R_g : $m_p \ddot{z}_p = -m_p g$, $m_p \ddot{x}_p = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} z_p(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\beta\, t \\ x_p(t) = -L + v_0 \cos\beta\, t. \end{cases}$

Pour que le projectile touche la cible, il faut que :

$z_p = z_c$ lorsque $x_p = 0$

$\hookrightarrow$ pour $t_0 = \frac{L}{v_0 \cos\beta}$.

$\Rightarrow z_p(t_0) = z_c(t_0) \Rightarrow \cancel{-\frac{g}{2}\left(\frac{L}{v_0\cos\beta}\right)^2} + \frac{v_0 \sin\beta\, L}{v_0 \cos\beta} = \cancel{-\frac{g}{2}\left(\frac{L}{v_0\cos\beta}\right)^2} + H.$

$\Rightarrow \boxed{\tan\beta = \frac{H}{L}}$

Une autre condition pour que cela soit possible est que le point C n'ait pas encore touché le sol à $t = t_0$, soit

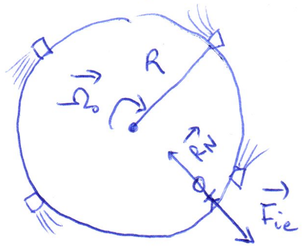
$z_c(t_0) > 0 \Rightarrow -\frac{g t_0^2}{2} + H > 0 \Rightarrow H > \frac{g L^2}{2 v_0^2 \cos^2\beta}$

soit $\boxed{v_0 > \sqrt{\frac{g L^2}{2 H \cos^2\beta}}}$

3 Vaisseau cylindrique - Résolution de problème

1) En estimant la hauteur des bâtiments à quelques dizaines de mètres, on peut estimer la taille du rayon du vaisseau à plusieurs centaines de mètres.

Nous prendrons $R \simeq 500$ m pour la suite.



Dans le référentiel du vaisseau, les personnes sont soumises à la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge) qui les "plaque" vers l'extérieur. Ceci permet de recréer une gravité artificielle si $\|m\vec{g}\| = \|\vec{F_{ie}}\|$, soit si :

$$mg = m\Omega_0^2 R \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \simeq \sqrt{\frac{10}{500}} \simeq \boxed{0,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}.$$

Ceci correspond à $\frac{0,4}{2\pi} \simeq \frac{1}{16}$ ème de tour par seconde, ce qui est une rotation relativement rapide. On notera que plus le vaisseau a un petit rayon, plus la rotation doit être rapide.

Cette rotation serait générée et entrenue à l'aide de petits moteurs de fusée comme sur la figure ci-dessus.

2) ⊛ Etant donnée la taille du vaisseau par rapport à la taille d'une personne, la gravité artificielle est pratiquement uniforme pour ses habitants, même s'ils vivent dans un immeuble (où la gravité y est légèrement plus faible néanmoins).

⊛ Etudions maintenant la possibilité pour les habitants du vaisseau de ressentir l'influence de la force de Coriolis :

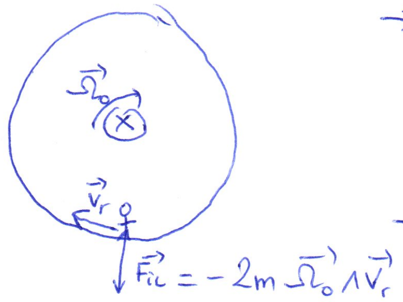
$$\vec{f_{ic}} = -2m\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{v}_{personne/vaisseau}$$

→ s'ils se déplacent parallèlement à l'axe de rotation, alors aucun effet de cette force ne peut être ressenti car $\vec{f_{ic}} = \vec{0}$.

→ s'ils se déplacent sur le sol, perpendiculairement à l'axe de rotation alors :

→ s'ils se déplacent dans le même sens que la rotation du vaisseau (schéma ci-contre), ils auront l'impression que la gravité est plus importante.

→ c'est l'inverse dans l'autre sens et ils se sentiront plus "légers".



Estimons l'ordre de grandeur correspond :

avec $m = 50$ kg, $\Omega_0 = 0{,}4\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

$\|\vec{F}_{ic}\| = 200$ N avec $v_r = 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$ (course à pied)

Dans ce cas, le poids apparent est 700 N ($\|m\vec{g}\| + \|\vec{F}_{ic}\|$)

ou 300 N ($\|m\vec{g}\| - \|\vec{F}_{ic}\|$)

et la personne a l'impression de peser 70 kg ou 30 kg au lieu de 50 kg, ce qui est très facile à ressentir.

Rq : Pour un TGV dans ce type de vaisseau, avec $v_r = 100\ \mathrm{m.s^{-1}}$, soit $\|\vec{F}_{ic}\| = 4000$ N et une personne aurait l'impression de peser 450 kg dans un sens et -350 kg dans l'autre.

La valeur négative indique en fait que les objets peuvent être en apesanteur lorsque le déplacement est contraire à la rotation, avec $2m\Omega_0 v_r = mg$, soit $v_r = \dfrac{g}{2\Omega_0} = \dfrac{10}{2 \times 0{,}4} = 12{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$

soit dès la vitesse de 45 km.h⁻¹.

Bilan : dans ce vaisseau, les moyens de transport ne devraient pas excéder des vitesses de l'ordre de $10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, ou tourner uniquement dans un sens ! Jouer au tennis poserait également beaucoup de problème...

→ L'effet sur un saut serait faible car les vitesses sont faibles et la force de Coriolis décalerait d'un côté à la montée et dans l'autre à la descente...

4 Etat d'impesanteur

Comment peut-on se placer en état d'impesanteur ?

1) → cosmonaute complètement isolé dans un espace vide de corps
2) → dans l'ISS (altitude $h \simeq 400$ km)
3) → dans un vol parabolique en avion.
4) → dans un ascenseur.

2) Y-a-t-il de la gravité dans l'ISS ?

PFD à l'astronaute dans l'ISS : $\vec{0} = -\dfrac{GMm}{(R_T+h)^2}\vec{u_r} - m\vec{a}_{ISS/Terre}$.

$$\Rightarrow \vec{a}_{ISS/Terre} = -\frac{GM}{(R_T+h)^2}\vec{u_r}$$

$$= -\frac{GM}{R_T^2} \times \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}\vec{u_r} = -g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}\vec{u_r}.$$

Avec $h = 400$ km, $\|\vec{a}_{ISS/Terre}\| = \underbrace{g(ISS)}_{\text{champ de gravité au niveau de l'ISS}} = 988 \times g_0 \,! \neq 0$

$\Rightarrow$ les astronautes sont en impesanteur grâce à la force centrifuge sur la navette.

Comment avoir une telle accélération pour l'ISS ?

PFD à l'ISS dans Rgéocentrique : $m_{ISS}\vec{a}_{ISS/Terre} = -\dfrac{G m_{ISS} M}{(R_T+h)^2}\vec{u_r}$.

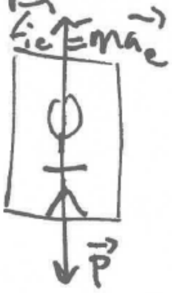
Or le mvmt est circulaire uniforme $\Rightarrow \vec{a}_{ISS/Terre} = \dfrac{-v_0^2}{(R_T+h)}\vec{u_r}$

donc $v_0^2 = \dfrac{GM}{R_T+h}$ et $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T+h}} = 27600 \text{ km.h}^{-1}$

si on choisit $h = 400$ km

(Rq : si $h=0$, $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T}} = 28\,600 \text{ km.h}^{-1}$; est-ce la vitesse d'un point à la surface de la Terre ? Non, car $v = \dfrac{2\pi R}{T} = \dfrac{40000.10^3}{24h} \simeq 1700$ km.

"impesanteur" dans un ascenseur: à l'éq dans R ascenseur.



Il faut que $\vec{f_{ie}} + \vec{P} = \vec{0}$, de sorte que $\vec{R} = \vec{0}$ au niveau du sol de l'ascenseur:

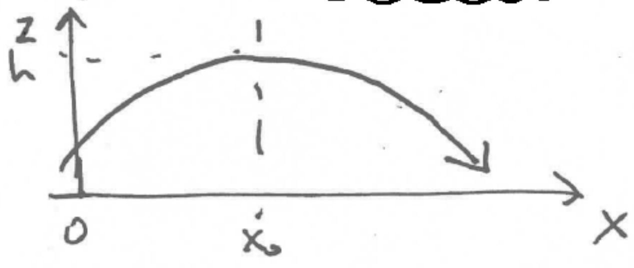
$$-m\vec{a_e} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a_e} = \vec{g}}$$

L'ascenseur doit lui-même être en chute libre, tout comme son occupant.

C'est également le cas si l'ascenseur:
* ralentit alors qu'il est en train de monter.
* accélère vers le bas.

Vol parabolique en avion : $z = -a(x-x_0)^2 + h$

$x = v_0 t + x_0$ par ex



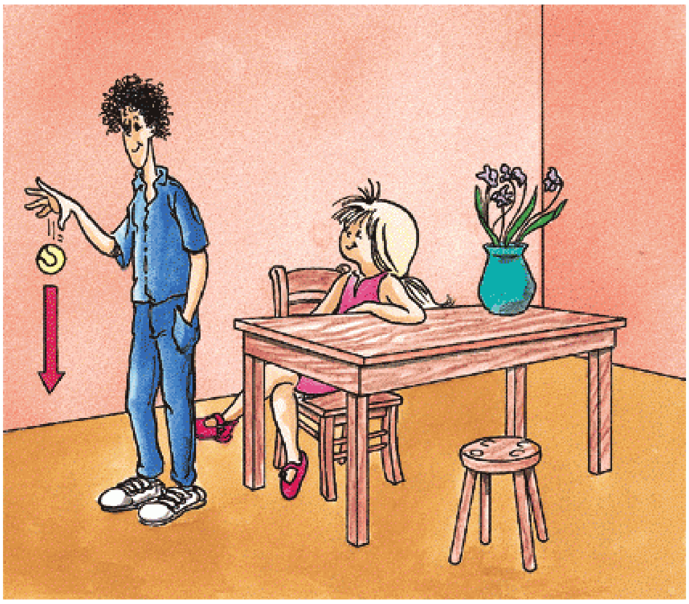
$\Rightarrow z = -a v_0^2 t^2 + h$

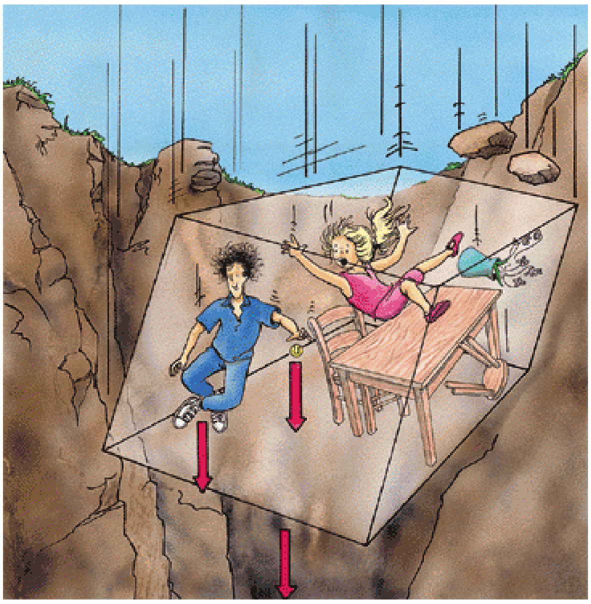
$\Rightarrow \dot{z} = -2 a v_0^2 t$

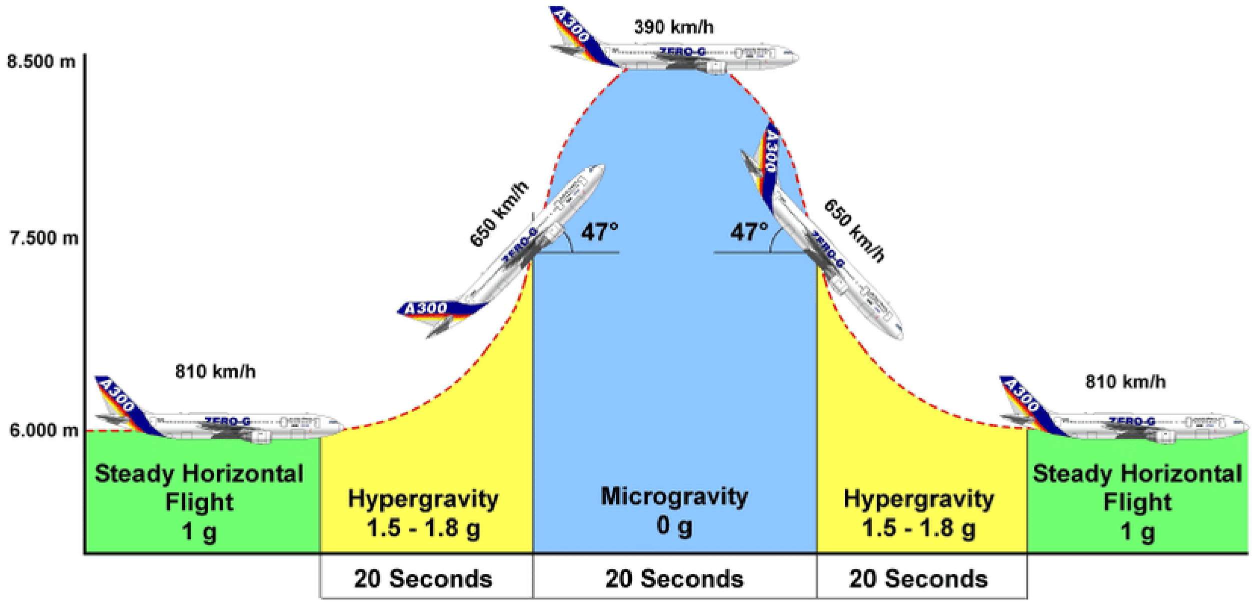
$\ddot{z} = -2 a v_0^2$] accélération de l'avion vers le bas

Si PFD à un objet dans R avion avec $2av_0^2 = g$:

à l'éq dans R avion : $\vec{0} = m\vec{g} - m\underbrace{\vec{a_e}}_{\vec{g}} \Rightarrow$ impesanteur






8.500 m
7.500 m
6.000 m
390 km/h
650 km/h
650 km/h
810 km/h
810 km/h
47°
47°
Steady Horizontal Flight 1 g
Hypergravity 1.5 - 1.8 g
Microgravity 0 g
Hypergravity 1.5 - 1.8 g
Steady Horizontal Flight 1 g
20 Seconds
20 Seconds
20 Seconds