

## DM n°3 - Électrocinétique et mécanique

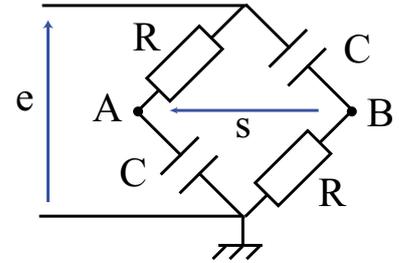
### À rendre pour le mercredi 25 septembre

## 1 Déphaseur

1. Montrer que la fonction de transfert du circuit de la figure ci-contre peut s'écrire, en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)} = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec une pulsation  $\omega_c$  appelée pulsation critique dont on précisera la valeur en fonction de  $R$  et  $C$ .



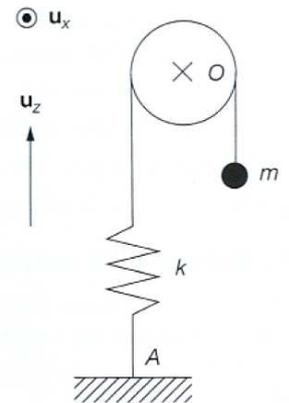
2. Caractériser ce filtre par l'étude asymptotique de sa fonction de transfert, à basse et haute fréquence, et pour  $\omega = \omega_c$ . On présentera les résultats sous la forme d'un tableau faisant figurer les équivalents de la fonction de transfert, du gain, du gain en décibels et de la phase.
3. En déduire le tracé du diagramme de Bode complet :  $G_{dB}(\log(\omega))$  et  $\varphi(\log(\omega))$ .
4. On cherche à utiliser ce montage pour déphaser un signal d'entrée généré par un GBF.
- Expliquer pourquoi il n'est pas possible de brancher directement le GBF à l'entrée  $e$  et l'oscilloscope à la sortie  $s$ . Comment peut-on résoudre ce problème ?
  - On souhaite tout d'abord déphaser un signal sinusoïdal de  $320\text{Hz}$  de  $-\pi/2$ . Proposer une valeur de  $R$  et de  $C$  qui permette de réaliser cette opération en prenant en compte les contraintes expérimentales.
  - On souhaite maintenant observer l'influence du filtre précédent lorsque le signal d'entrée est un signal créneau de fréquence  $320\text{Hz}$ . En remplissant le Notebook **f4ac-631100** et en vous aidant de la capacité numérique sur le filtrage,
    - tracer sur un même graphique l'allure du signal d'entrée et du signal filtré en appliquant la fonction de transfert à chacune des harmoniques.
    - tracer sur un même graphique l'allure du signal d'entrée et du signal filtré en appliquant une relation de récurrence traduisant l'équation différentielle régissant le filtre.
    - Comparer les deux résultats précédents. Le signal d'entrée est-il simplement déphasé ? On proposera une explication.

## 2 Oscillations d'un système complexe

On considère le système suivant : ressort (raideur  $k$ ), poulie (rayon  $R$ , moment d'inertie  $J_{Ox}$ ) et objet de masse  $m$  (figure ci-contre).

Le fil est supposé souple, inextensible, de masse nulle et ne glissant pas sur la poulie, elle-même en liaison pivot parfait par rapport à l'axe  $Ox$  fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

En utilisant une méthode énergétique, déterminer la période des oscillations.



## 3 Oscillations d'un système lesté

On considère un disque  $D$  de rayon  $a$  mobile sans frottements autour de son axe horizontal  $Ox$ . On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à cet axe. Une masse  $M$  est fixée à la périphérie de ce disque. On note  $\theta$  l'angle entre la verticale et la position de  $M$ . Un fil inextensible et sans masse est enroulé sur le disque. À l'extrémité de ce fil, pend une masse  $m$ . On néglige les frottements avec l'air. Voir le schéma de la figure 1.

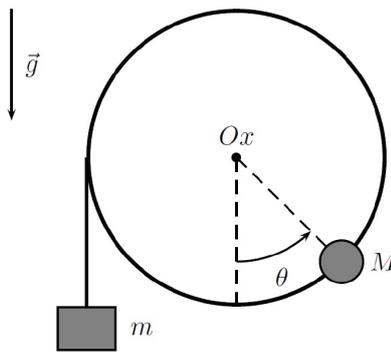


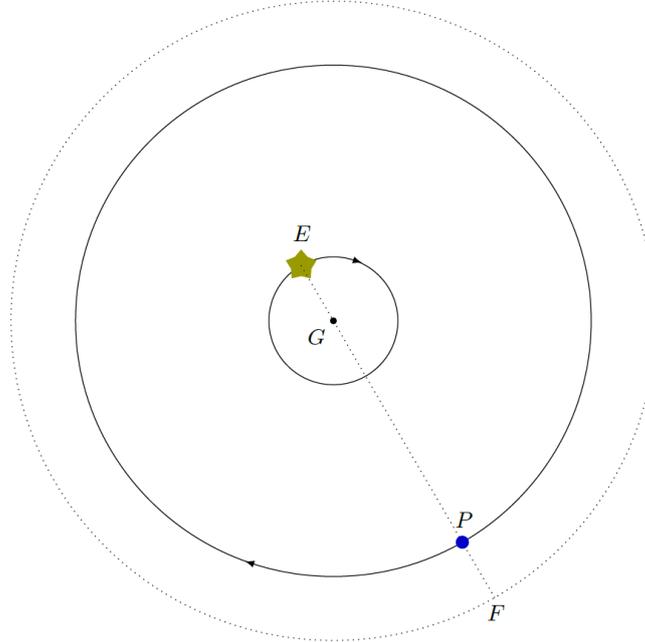
FIGURE 1 – Disque déséquilibré

1. Établir l'équation différentielle du second ordre en  $\theta$  relative au mouvement du système.
2. Déterminer les positions d'équilibre.
3. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre et déterminer la pulsation des petites oscillations du système au voisinage de l'une d'elles.

Indication : 3.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{M}{(M + m + \frac{J}{a^2})} \frac{g}{a} \cos\theta_{eq,1}}$ .

## 4 Détection d'une exoplanète : *Proxima Centauri b* (facultatif)

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de *Proxima Centauri b*, une planète « super Terre » rocheuse de masse  $M_P$  d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de *Proxima Centauri* (soit dans la zone habitable). Cette exo-planète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.



**Figure 7** Schéma représentant l'étoile  $E$  et la planète  $P$  en rotation autour du point  $G$ , centre de masse du système {étoile + planète} ; le point  $F$  est un point utilisé pour étudier le mouvement de  $E$  et  $P$  autour de  $G$

### A - Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse  $G$  du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile  $E$  et la planète  $P$  tournent toutes les deux autour du centre de masse  $G$  du système complet (figure 7).

Le centre de masse  $G$  est défini par l'une des deux relations

$$(M_E + M_P)\overrightarrow{AG} = M_E\overrightarrow{AE} + M_P\overrightarrow{AP} \quad \text{pour tout point } A$$

$$M_E\overrightarrow{GE} + M_P\overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

Toutes les forces autres que la force d'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre  $G$  dont les 3 axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

**Q 41.** Établir la relation  $\overrightarrow{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P}\overrightarrow{EP}$ . Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.

On note pour la suite  $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$  et  $\|\vec{r}\| = r$ .

**Q 42.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète  $P$  dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{r}$ .

On considère le point  $F$  défini par  $\vec{r} = \overrightarrow{GF}$ . Ce point est en mouvement circulaire, de période  $T$ , autour de  $G$ .

**Q 43.** Établir la relation

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(M_E + M_P)}{4\pi^2}.$$

Quel nom porte cette loi ?

**Q 44.** Justifier que  $E$  a un mouvement circulaire uniforme autour de  $G$  et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de  $M_P$ ,  $M_E$ ,  $r$  et  $T$ .

**.B – Résultats ayant conduit à la découverte de la planète *Proxima Centauri b***

Dans le cas le plus favorable à l'observation, la Terre est dans le plan des trajectoires de  $E$  et  $P$  (figure 7), l'étoile  $E$  possède alors un mouvement apparent oscillant et la mesure de sa composante  $V$  de vitesse selon l'axe de visée depuis la Terre est possible par effet Doppler-Fizeau, qui entraîne un décalage des raies spectrales de l'étoile par rapport à leur position mesurée sur Terre, selon la relation

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{V}{c}$$

où  $f_{\text{em}}$  et  $f_{\text{obs}}$  représentent respectivement la fréquence à l'émission et la fréquence observée sur Terre.

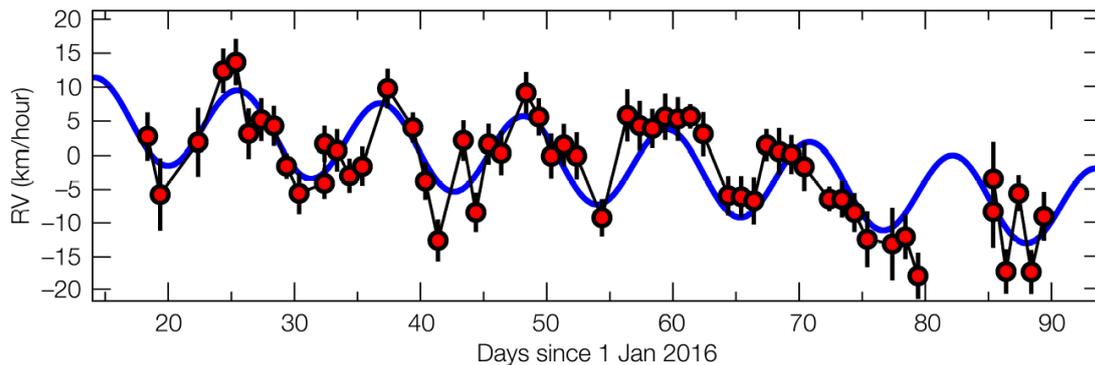
Le professeur Bouchy de l'observatoire astronomique de Provence propose, en 2005, dans son intervention sur les exoplanètes la formule suivante pour le décalage Doppler lors de la détection indirecte d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = - \left( \frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_P \sin i}{(M_P + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c\sqrt{1-e^2}}$$

où  $M_P$  et  $M_E$  sont respectivement les masses de la planète et de l'étoile,  $T$  la période de la planète,  $e$  l'excentricité de l'orbite et  $i$  l'angle entre la ligne de visée et la perpendiculaire au plan orbital du système. L'excentricité  $e$  vérifie  $0 \leq e < 1$ , avec  $e = 0$  pour une orbite circulaire.

**Q 45.** En utilisant les résultats de la sous-partie précédente (IV.A), établir une formule analogue à la formule proposée par le professeur Bouchy. Commenter les différences.

**Q 46.** Connaissant la masse de *Proxima Centauri*,  $M_E = 2,44 \times 10^{29}$  kg déterminée grâce à l'analyse de son rayonnement, exploiter les données expérimentales de la figure 8 pour déterminer la masse de la planète *Proxima Centauri b*.



**Figure 8** Variations de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* au cours du premier trimestre 2016 — Source : European Southern Observatory, Guillem Anglada-Escudé

## Données

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Constante universelle de la gravitation

$$g = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$$

Rayon moyen de la Terre

$$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$$

Distance Terre-Soleil

$$D_{TS} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Rayon du Soleil

$$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$$

Masse du Soleil

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$